উচ্চ মাধ্যমিক ঐচ্ছিক গণিত

[HIGHER SECONDARY ELECTIVE MATHEMATICS]

(একাদশ শ্রেণীর জন্য)

কে. পি. বসু

পশ্চিমবঙ্গ মধ্যশিক্ষা পর্ষৎ কর্তৃক উচ্চ মাধ্যমিক ঐচ্ছিক গণিতের
১১শ শ্রেণীর পাঠসূচী অনুসারে লিখিত
(৭।৩।৫৮ তারিখের SH/1/58 নং সার্কুলার দ্রষ্টব্য)

উচ্চ মাধ্যমিক ঐচ্ছিক গণিত

(HIGHER SECONDARY ELECTIVE MATHEMATICS)

(একাদশ শ্রেণীর জন্য)

ঢাকা কলেজের ভূতপূর্ব্ব গণিতাধ্যাপক, 'এল্‌জেবরা মেড্‌ ইজি',
'মডার্ণ জিওমেট্রি', 'ইণ্টারমিডিয়েট্‌ এল্‌জেবরা',
'ইণ্টারমিডিয়েট্‌ সলিড্‌ জিওমেট্রি' প্রভৃতি প্রণেতা

অধ্যাপক কালীপদ বসু, এম্‌. এ.

প্রণীত

কে. পি. বসু পাবলিশিং কোং

৪২, কর্ণওয়ালিস ষ্ট্রীট, কলিকাতা ৬

সিটি কলেজের গণিতাধ্যাপক শ্রীনিরঞ্জন দাশগুপ্ত, এম্. এ.
কর্ত্তৃক পরিবর্ত্তিত ও পুনর্লিখিত

তৃতীয় সংস্করণ : মার্চ্চ, ১৯৬৩

মূল্য : চার টাকা

প্রকাশক : শ্রীজয়ন্ত বসু, বি. এ.
কে. পি. বসু পাবলিশিং কোং
৪২, কর্ণওয়ালিস ষ্ট্রীট, কলিকাতা ৬

মুদ্রাকর : শ্রীত্রিদিবেশ বসু
কে. পি. বসু প্রিন্টিং ওয়ার্কস
১১, মহেন্দ্র গোস্বামী লেন, কলিকাতা ৬

ভূমিকা

পশ্চিমবঙ্গ মধ্যশিক্ষা পর্ষৎ কর্তৃক উচ্চ মাধ্যমিক ঐচ্ছিক গণিত (Elective Mathematics)-এর পাঠ্যসূচী অনুসারে একাদশ শ্রেণীর ছাত্র-ছাত্রীদের জন্য লিখিত এই পুস্তকখানি প্রকাশিত হইল।

ঐচ্ছিক গণিতের মান সম্বন্ধে পশ্চিমবঙ্গ মাধ্যমিক শিক্ষা পর্ষতের নির্দ্দেশ যে ইহার প্রশ্নপত্র **ইণ্টারমিডিয়েট্ গণিত পরীক্ষার প্রথম প্রশ্নপত্র** (First Paper) এর সহিত সমমানের হইবে। সেদিকে দৃষ্টি রাখিয়াই পুস্তকখানি লিখিত হইয়াছে।

এই পুস্তক প্রণয়নে অধ্যাপক কে. পি. বসু মহাশয়ের 'ইণ্টারমিডিয়েট এল্‌জেবরা' পুস্তক অবলম্বন করিয়া 'বীজগণিত' অংশ লিখিত হইয়াছে। আমার প্রিয় ছাত্র এবং সহকর্ম্মী সিটি কলেজের (দক্ষিণ শাখার) গণিতাধ্যাপক শ্রীমান অজিতকুমার বসু, এম. এস্-সি. পুস্তক প্রণয়নে আমাকে যথেষ্ট সাহায্য করিয়াছেন, তাঁহার সাহায্য ব্যতীত এই কার্য্য আমার পক্ষে হয়ত সম্ভবপর হইত না।

কলিকাতা
৭. ৩. ৬০

শ্রীনিরঞ্জন দাশগুপ্ত

SYLLABUS FOR THE HIGHER SECONDARY ELECTIVE MATHEMATICS

CLASS XI

Algebra :

Theory of Quadratic Equations and Expressions; Permutation and Combination; Binomial Theorem for positive integral index.

Elementary idea of sum of an infinite series in connection with infinite geometric series; The use of the expansion of $(1+x)^n$ where n is fractional or negative (proof for the establishment of this expansion is not required but the restriction on the value of x should be known) ; Definition of e as an infinite series; Direct application of the series for e^x, $\log_e(1+x)$ (proofs for the establishment of these series are not required but restrictions on the values of x, if any, should be known).

Acquaintance with graphs of x^n (n a positive integer), $\log_e x$, e^x.

Trigonometry :

Graphs of simple trigonometric functions.

Trigonometric equations and general values; Inverse Circular Functions.

Relation between sides and angles of a triangle; In-radius, circum-radius and area of a triangle; Practical solution of a triangle with the help of logarithms; Simple problems of heights and distances.

Co-ordinate Geometry :

Circle: Chords, Tangents, Normals and elementary properties connected with them; Parabola, Ellipse, Hyperbola referred to their principal axes; Analytical treatment of these curves in respect of (1) the focus and the directrix properties, (2) tangents and normals and elementary properties connected with them, (3) centre and diameter (*Note*—Discussion should always be restricted to rectangular Cartesian co-ordinates).

সূচীপত্র

বীজগণিত

ত্রিকোণমিতি

স্থানাঙ্ক জ্যামিতি

বীজগণিত

প্রথম অধ্যায়

দ্বিঘাত সমীকরণ ও রাশিমালা-তত্ত্ব

(Theory of Quadratic Equations and Expressions)

1.1. নবম শ্রেণীর পাঠ্যপুস্তকের অষ্টম অধ্যায়ে দ্বিঘাত সমীকরণের সমাধান-প্রণালী সম্বন্ধে বিস্তৃত আলোচনা করা হইয়াছে। বর্তমান অধ্যায়ে ঐরূপ সমীকরণ ও রাশিমালা বিষয়ক বিভিন্ন তত্ত্বের আলোচনা করা হইবে।

মনে রাখিতে হইবে সকল দ্বিঘাত সমীকরণকেই আবশ্যকমত সরলীকরণ ও পক্ষান্তরকরণ-প্রক্রিয়া দ্বারা $ax^2+bx+c=0$ আকারে প্রকাশ করা যায় বলিয়া $ax^2+bx+c=0$ কে দ্বিঘাত সমীকরণের সাধারণ রূপ বলা হইয়া থাকে।

1.2. কোন দ্বিঘাত সমীকরণের দুইএর অধিক বীজ থাকিতে পারে না (A quadratic equation cannot have more than two roots) ঃ

যদি সম্ভব হয়, মনে কর সমীকরণটির দুইএর অধিক, ধরা যাক, তিনটি পরস্পর বিভিন্ন বীজ আছে। বীজ তিনটি α, β ও γ হইলে, ইহাদের প্রত্যেকটির দ্বারাই সমীকরণটি সিদ্ধ হইবে। অতএব,

$$a\alpha^2+b\alpha+c=0 \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$
$$a\beta^2+b\beta+c=0 \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$
$$a\gamma^2+b\gamma+c=0 \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (3)$$

(1) হইতে (2) বিয়োগ করিয়া,

$$a(\alpha^2-\beta^2)+b(\alpha-\beta)=0,$$

বা, $(\alpha-\beta)\{a(\alpha+\beta)+b\}=0.$

এখন, α এবং β পরস্পর বিভিন্ন বলিয়া, $\alpha-\beta$ শূন্য হইতে পারে না ;

$$\therefore \quad a(\alpha+\beta)+b=0, \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (4)$$

এইরূপে, (1) এবং (3) হইতে,

$$a(\alpha+\gamma)+b=0. \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (5)$$

(4) হইতে (5) বিয়োগ করিয়া,

$$a(\beta-\gamma)=0\,; \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (6)$$

কিন্তু এস্থলে দ্বিঘাত সমীকরণের আলোচনা করা হইতেছে বলিয়া, x^2 এর সহগ a শূন্য হইতে পারে না ;

$\therefore \ \beta-\gamma=0$, বা, $\beta=\gamma$;

কিন্তু β ও γ পরস্পর বিভিন্ন বলিয়া কল্পনা করা হইয়াছে ; সুতরাং, ইহা কল্পনা-বিরুদ্ধ। আবার, সিদ্ধান্ত কল্পনা-বিরোধী বলিয়া যে কল্পনার উপর এই সিদ্ধান্তটি প্রতিষ্ঠিত তাহা ভ্রমাত্মক।

অতএব, দ্বিঘাত সমীকরণের দুইএর অধিক পরস্পর বিভিন্ন বীজ থাকিতে পারে না।

অনুসিদ্ধান্ত। অজ্ঞাত রাশিটির তিনটি বিভিন্ন মান দ্বারা কোন দ্বিঘাত সমীকরণ সিদ্ধ হইলে সমীকরণটি একটি অভেদ (identity) হইবে (অর্থাৎ সমীকরণটি উহার অজ্ঞাত রাশির সকল সসীম মান দ্বারাই সিদ্ধ হইবে)।

এস্থলে, উপরের (6) হইতে, $\beta-\gamma$ শূন্য নয় বলিয়া, $a=0$. আবার (4) অথবা (5) হইতে, $a=0$ বলিয়া, $b=0$, এবং (1), (2) বা (3) হইতে, $a=0$, $b=0$ বলিয়া, $c=0$. অতএব, এক্ষেত্রে সমীকরণটি

$$0.x^2+0.x+0=0$$

রূপ প্রাপ্ত হয়। স্পষ্টই, ইহা x এর যে-কোন সসীম মান দ্বারাই সিদ্ধ।

উদাহরণ 1. Is $2\{(x-a)(x-b)+(a-x)(a-b)+(b-x)(b-a)\}$ $=(a-b)^2+(x-a)^2+(x-b)^2$ an equation or an identity ?

সমান চিহ্নযুক্ত বাম ও দক্ষিণ পক্ষস্থিত দ্বিঘাত রাশিমালা দুইটিতে x এর পরিবর্তে তিনটি বিভিন্ন মান a, b ও 0 বসাইলে, বাম পক্ষ দক্ষিণ পক্ষের সমান হয় বলিয়া, উহা x এর সকল সসীম মান দ্বারাই সিদ্ধ হইবে। অতএব, উহা একটি অভেদ।

উদা. 2. If $(p-a)^3+(p-b)^3=2(p-c)^3$,

$(q-a)^3+(q-b)^3=2(q-c)^3$,

$(r-a)^3+(r-b)^3=2(r-c)^3$,

show that, $(s-a)^3+(s-b)^3=2(s-c)^3$.

$(x-a)^3+(x-b)^3=2(x-c)^3$ সমীকরণটি বিবেচনা করা যাক।

সরল করিলে দেখা যায় যে, সমীকরণটি একটি দ্বিঘাত সমীকরণ, এবং প্রদত্ত সর্ত্ত তিনটি হইতে বুঝা যাইতেছে যে, সমীকরণটি দ্বিঘাত হইলেও উহা p, q, r তিনটি মান দ্বারা সিদ্ধ ; অতএব, সমীকরণটি একটি অভেদ, অর্থাৎ উহা x এর যে-কোন মান দ্বারাই সিদ্ধ হইবে। অতএব, সমীকরণটিতে $x=s$ বসাইয়া,

$$(s-a)^3+(s-b)^3=2(s-c)^3.$$

1.3. দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয়ের প্রকৃতিঃ নিরূপক (Nature of the roots of a quadratic : Discriminant) :

বাস্তব এবং মূলদ সহগযুক্ত সাধারণ আকারের দ্বিঘাত সমীকরণ $ax^2+bx+c=0$ এর বীজ দুইটি হইতেছে

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ এবং } \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}.$$

অতএব,

(1) b^2-4ac ধনাত্মক হইলে, বীজ দুইটি বাস্তব এবং অসমান হইবে ;

(2) b^2-4ac পূর্ণ বর্গ হইলে, বীজ দুইটি মূলদ এবং অসমান হইবে ; আর ধনাত্মক কিন্তু পূর্ণ বর্গ না হইলে, বীজ দুইটি অমূলদ এবং অসমান হইবে ;

(3) b^2-4ac শূন্য হইলে, বীজ দুইটি বাস্তব এবং সমান হইবে ;

(4) b^2-4ac ঋণাত্মক হইলে, বীজ দুইটি কাল্পনিক এবং অসমান হইবে।

সমাধান না করিয়া কেবলমাত্র b^2-4ac রাশিটির মান নির্ণয় করিয়াই দ্বিঘাত সমীকরণের বীজের প্রকৃতি নির্ণয় করা যায় বলিয়া, b^2-4ac কে দ্বিঘাত সমীকরণটির **নিরূপক** (discriminant) বলা হয়।

উদা. 1. Examine the roots of the equation $2x^2+7x-4=0$.

এক্ষেত্রে নিরূপক $=7^2-4.2(-4)=49+32=81$.

81 একটি পূর্ণ বর্গ বলিয়া, বীজ দুইটি বাস্তব এবং অসমান।

উদা. 2. Examine the roots of the equation $2x^2-9x+8=0$.

এক্ষেত্রে নিরূপক $=(-9)^2-4.2.8=81-64=17$.

17 পূর্ণ বর্গ নহে বলিয়া, বীজ দুইটি বাস্তব, অমূলদ এবং অসমান।

উদা. 3. Examine the roots of the equation $3x^2+4x+2=0$.

এক্ষেত্রে নিরূপক $=4^2-4.3.2=16-24=-8$.

-4 এর বর্গমূল কাল্পনিক (imaginary) বলিয়া, বীজ দুইটি কাল্পনিক এবং অসমান।

উদা. 4. For what value of m, will the two roots of the equation $x^2-2(5+2m)x+3(7+10m)=0$ will be equal?

[Calcutta, 1936]

বীজ দুইটি সমান বলিয়া নিরূপকের মান শূন্য হইবে।

এখন, নিরূপক $=\{-2(5+2m)\}^2-4.3(7+10m)$

$$=4(5+2m)^2-4.3(7+10m)=4(4m^2-10m+4)$$
$$=8(2m^2-5m+2)=8(2m-1)(m-2).$$

$\therefore$ বীজ দুইটি সমান বলিয়া,

$$8(2m-1)(m-2)=0; \quad \therefore \quad m=2 \text{ বা } \tfrac{1}{2}.$$

প্রশ্নমালা 1

[অন্যরূপ উল্লেখ না থাকিলে নিম্নলিখিত প্রশ্নসমূহে a, b, c প্রভৃতি অক্ষরগুলির প্রত্যেকটিকে বাস্তব ধরিতে হইবে।]

1. Examine the roots of the following equations:

(1) $3x^2+20x-19=0$. (2) $3x^2-8x+9=0$.

(3) $x^2+5x+4=0$. (4) $4x^2-12x+9=0$.

(5) $-3x^2-2x+6=0$. (6) $-4x^2+5x-8=0$.

(7) $x^2-2\sqrt{7}x-2=0$. [G. U. 1948]

(8) $99x^2+100x=101$. [A. U. 1921]

2. Show that the equation $3x^2+7x+8=9$ cannot be satisfied by any real value of x.

3. If the equation $4x^2-px+9=0$ has equal roots, find p.

4. For what value of m will the equation $2x^2+8x+m=0$ have equal roots?

5. If the equation $(1+m)x^2-2(1+3m)x+(1+8m)=0$ has equal roots, find the value of m.

6. Prove that the roots of the equation $(a-b+c)x^2+4(a-b)x+(a-b-c)=0$ are real.

7. (*a*) If $ad=bc$, show that the roots of the equation $(a^2+c^2)x^2+2(ab+cd)x+(b^2+d^2)=0$ are equal.

(*b*) If the roots of the equation $(a^2+b^2)x^2+2(bc+ad)x+(c^2+d^2)=0$ are real, prove that they are equal. [Punjab, 1937]

8. Show that the roots of the equation $ax^2+bx+c=0$ will be rational, where a, b, c are rational quantities and $a+b+c=0$.

9. Prove that the roots of the equation

$$(a-b)x^2+2(a+b)x-(a-b)=0 \text{ are real.}$$

10. Show that the roots of the equation

$$(b-2c-a)x^2+(c+2a+b)x-(a+2b-c)=0$$

are rational, when a, b, c are rational quantities.

11. Show that the roots of the equation

$$(b+c-a)x^2+(c+a-b)x+(a+b-c)=0$$

are rational, when a, b, c are rational quantities and $a+b+c=0$.

12. Prove that if either $c=0$, or $a^3+b^3+c^3=3abc$, the roots of the equation $(b^2-ca)x^2-2(c^2-ab)x+(a^2-bc)=0$ are equal.

13. Show that the roots of one of the equations

$$ax^2+2bx+a=0 \text{ and } bx^2+4ax+b=0$$

are real, and those of the other are imaginary ; all the four roots of the equations cannot be either real or imaginary.

14. Show that the roots of the equation

$$cx^2-2(b-c)x+(4a-2b+c)=0$$

are real or imaginary according as the roots of $ax^2+bx+c=0$ are real or imaginary.

15. Show that the roots of the equation $x^2+px+q=0$ will be rational, if $p=k+\frac{q}{k}$, where p, q, k are rational quantities.

16. Prove that each of the following is an identity :

(1) $$\frac{a^2(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^2(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^2(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=x^2.$$

(2) $$\frac{(a+x)^2}{(a-b)(a-c)}+\frac{(b+x)^2}{(b-c)(b-a)}+\frac{(c+x)^2}{(c-a)(c-b)}=1.$$

(3) $$\frac{a(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}+\frac{b(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}+\frac{c(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}=x.$$

1.4. দ্বিঘাত সমীকরণের সহগ ও বীজদ্বয়ের সম্বন্ধ :

$f(x)=ax^2+bx+c=0$ হইলে, সমীকরণটির বীজদ্বয়ের সমষ্টি ও গুণফল কি হইবে, নির্ণয় কর।

[If $f(x)=ax^2+bx+c=0$, find the sum and product of the roots.] [C. U. 1951]

সাধারণ আকারের দ্বিঘাত সমীকরণ $ax^2+bx+c=0$ কে সমাধান করিলে,

$$\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \text{ এবং } \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

বীজদ্বয় পাওয়া যায়।

মনে করা যাক, $\alpha=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2c}$ এবং $\beta=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

$$\therefore \quad \alpha+\beta=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}+\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-2b}{2a}=-\frac{b}{a};$$

$$\text{এবং} \quad \alpha\beta=\frac{(-b+\sqrt{b^2-4ac})(-b-\sqrt{b^2-4ac})}{4a^2}$$

$$=\frac{(-b)^2-(b^2-4ac)}{4a^2}=\frac{4ac}{4a^2}=\frac{c}{a}.$$

অতএব, দেখা গেল যে,

(1) বীজদ্বয়ের সমষ্টি $=-\dfrac{b}{a}=-\dfrac{x \text{ এর সহগ}}{x^2 \text{ এর সহগ}}$;

এবং **(2) বীজদ্বয়ের গুণফল** $=\dfrac{c}{a}=\dfrac{\text{পরম রাশি}}{x^2 \text{ এর সহগ}}$ ।

অনুসিদ্ধান্ত। $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণটিকে $x^2+\dfrac{b}{a}x+\dfrac{c}{a}=0$ আকারেও লেখা যায় বলিয়া, উপরের সিদ্ধান্ত দুইটি হইতে অনায়াসেই এই সিদ্ধান্ত করা যায় যে, x^2 এর সহগ একক (unity) এবং একই পক্ষে লিখিত পদবিশিষ্ট **$x^2+px+q=0$ আকারের দ্বিঘাত সমীকরণে,**

(1) বীজদ্বয়ের সমষ্টি = পরিবর্তিত চিহ্ন x এর সহগ ;

এবং **(2) বীজদ্বয়ের গুণফল = সমীকরণটির পরম (অর্থাৎ x-মুক্ত) রাশি।**

1.5. প্রতিযোগী বীজ-বিষয়ক দুইটি প্রয়োজনীয় উপপাদ্য :

(1) মূলদ সহগ-বিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণের একটি বীজ অমূলদ হইলে, অপরটি উহার প্রতিযোগী অমূলদ রাশি হইবে।

মনে কর, দ্বিঘাত সমীকরণ $ax^2+bx+c=0$ এর a, b ও c বাস্তব, এবং একটি বীজ $=m+\sqrt{n}$, যাহার m একটি মূলদ রাশি এবং $\sqrt{n}$ অমূলদ, এবং অপর বীজটি $=\beta$.

সুতরাং, $\beta+m+\sqrt{n}=-\dfrac{b}{a}$, ... (1)

এবং $\beta(m+\sqrt{n})=\dfrac{c}{a}$. ... ... (2)

(1) হইতে, $\beta=-\dfrac{b}{a}-m-\sqrt{n}=k-\sqrt{n}$ ... (3)

$\left[\text{এখানে } k=-\dfrac{b}{a}-m=\text{একটি মূলদ রাশি}\right]$

$\therefore$ (2) তে β এর মান বসাইলে,

$(k-\sqrt{n})(m+\sqrt{n})=\dfrac{c}{a}$, অর্থাৎ, একটি মূলদ রাশি ;

অথবা, $km-n+(k-m)\sqrt{n}=$ একটি মূলদ রাশি ; ইহা অসম্ভব, যদি না অমূলদ অংশ $(k-m)\sqrt{n}=0$ হয়।

$\therefore$ $(k-m)\sqrt{n}=0$; অতএব, $k=m$.

$\therefore$ (3) হইতে, $\beta=m-\sqrt{n}$, অর্থাৎ $(m+\sqrt{n})$ এর প্রতিযোগী অমূলদ রাশি।

(2) বাস্তব সহগ-বিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণের একটি বীজ জটিল রাশি হইলে, অপরটি উহার প্রতিযোগী জটিল রাশি হইবে।

মনে কর, $ax^2+bx+c=0$ দ্বিঘাত সমীকরণটির a, b, c বাস্তব, এবং ইহার একটি বীজ $=m+in$, এস্থলে m এবং n বাস্তব এবং $i=\sqrt{-1}$; এবং অপর বীজটি $=\beta$.

অতএব, $\beta+(m+in)=-\dfrac{b}{a}$, ... (1)

এবং $\beta(m+in)=\dfrac{c}{a}$. ... ... (2)

(1) হইতে, $\beta = -\dfrac{b}{a} - m - in = k - in$ ... (3)

[এখানে $k = -\dfrac{b}{a} - m =$ একটি বাস্তব রাশি,
$\because$ a, b, m প্রত্যেকেই বাস্তব।]

সুতরাং, β এর এই মান (2) তে বসাইলে,

$(k - in)(m + in) = \dfrac{c}{a}$, অর্থাৎ একটি বাস্তব রাশি ;

অথবা, $km + n^2 + (k - m)in =$ একটি বাস্তব রাশি ; ইহা অসম্ভব, যদি না কাল্পনিক অংশ $= 0$ হয়।

$\therefore$ $(k - m)i = 0$; বা, $k = m$.

অতএব, (3) হইতে, $\boldsymbol{\beta = m - in}$, অর্থাৎ $(m + in)$ এর প্রতিযোগী জটিল রাশি।

1.6. দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয়-সম্বলিত প্রতিসম রাশিমালা (Symmetrical functions of the roots) :

কোন দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয়-সম্বলিত রাশিমালায় বীজদ্বয়ের স্থান পরস্পর পরিবর্ত্তন করিয়া লিখিলেও রাশিমালাটির মান অক্ষুণ্ণ অর্থাৎ পূর্ব্ববৎ থাকিলে, রাশিমালাটিকে বীজদ্বয়ের প্রতিসম (symmetrical) রাশিমালা বলা হয়।

এইরূপ প্রতিসম রাশিমালাকে বীজদ্বয়ের সমষ্টি ও গুণফল-সম্বলিত রাশিমালায় পরিবর্ত্তিত করা যায়। বীজদ্বয়ের সমষ্টি ও গুণফলকে সমীকরণটির সহগ দ্বারা প্রকাশ করা যায় বলিয়া, স্পষ্টই এইরূপ রাশিমালার মান সমীকরণটির দ্বারা প্রকাশিত হইবে।

নিম্নলিখিত উদাহরণসমূহ হইতে প্রক্রিয়া সুস্পষ্ট হইবে :

উদা. 1. If α and β be the roots of the equation $x^2 - px + q = 0$, find the values of :

(i) $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta}$; (ii) $\alpha^2 + \beta^2$; (iii) $\alpha^3 + \beta^3$; (iv) $\alpha - \beta$;
(v) $\alpha^2 - \beta^2$; (vi) $\alpha^3 - \beta^3$.

এস্থলে, $\alpha + \beta = p$ এবং $\alpha\beta = q$;

$\therefore$ (i) $\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} = \dfrac{\beta + \alpha}{\alpha\beta} = \dfrac{p}{q}$;

(ii) $\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=p^2-2q$;

(iii) $\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=p^3-3qp=p^3-3pq$;

(iv) $(\alpha-\beta)=\pm\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}=\pm\sqrt{p^2-4q}$;

$\alpha>\beta$ হইলে, $\alpha-\beta=\sqrt{p^2-4q}$, এবং

$\alpha<\beta$ হইলে, $\alpha-\beta=-\sqrt{p^2-4q}$;

(v) $\alpha^2-\beta^2=(\alpha+\beta)(\alpha-\beta)=p\sqrt{p^2-4q}$; ($\alpha>\beta$)

(vi) $\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)=(\alpha-\beta)\{(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta\}$

$$=\sqrt{p^2-4q}\,(p^2-q)=(p^2-q)\sqrt{p^2-4q}.$$

উদা. 2. If α and β be the roots of the equation $ax^2+bx+c=0$, find the values of each of the following :

(i) $\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\beta^2}$; (ii) $(m\alpha+n\beta)(n\alpha+m\beta)$; (iii) $\left(\dfrac{\alpha}{\beta}-\dfrac{\beta}{\alpha}\right)^2$;

(iv) $\dfrac{1}{(a\alpha+b)^3}+\dfrac{1}{(a\beta+b)^3}$. [C. U. 1943]

এস্থলে, $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}$, এবং $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}$;

$$\text{(i) } \frac{1}{\alpha^2}+\frac{1}{\beta^2}=\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2\beta^2}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{(\alpha\beta)^2}=\frac{\left(-\frac{b}{a}\right)^2-2\frac{c}{a}}{\left(\frac{c}{a}\right)^2}$$

$$=\frac{\frac{b^2}{a^2}-\frac{2c}{a}}{\frac{c^2}{a^2}}=\frac{\frac{b^2-2ac}{a^2}}{\frac{c^2}{a^2}}=\frac{b^2-2ac}{c^2};$$

$$\text{(ii) } (m\alpha+n\beta)(n\alpha+m\beta)=mn\alpha^2+(m^2+n^2)\alpha\beta+mn\beta^2$$
$$=mn(\alpha^2+\beta^2)+(m^2+n^2)\alpha\beta$$
$$=mn\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}+(m^2+n^2)\alpha\beta$$
$$=mn(\alpha+\beta)+(m-n)^2\alpha\beta$$
$$=mn\frac{b^2}{a^2}+(m-n)^2\frac{c}{a}$$
$$=\frac{mnb^2+(m-n)^2ac}{a^2};$$

(iii) $\left(\frac{\alpha}{\beta}-\frac{\beta}{\alpha}\right)^2=\frac{(\alpha^2-\beta^2)^2}{(\alpha\beta)^2}=\frac{(\alpha+\beta)^2(\alpha-\beta)^2}{(\alpha\beta)^2}$

$$=\frac{(\alpha+\beta)^2\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}}{(\alpha\beta)^2}=\frac{\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{b^2}{a^2}-\frac{4c}{a}\right)}{\frac{c^2}{a^2}}=\frac{b^2(b^2-4ac)}{a^2c^2}.$$

(iv) $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণটির α একটি বীজ ;

$\therefore\ a\alpha^2+b\alpha+c=0$, বা, $\alpha(a\alpha+b)=-c$, বা, $a\alpha+b=-\frac{c}{\alpha}$;

আবার β ও ঐ সমীকরণটির একটি বীজ ;

$\therefore\ a\beta^2+b\beta+c=0$, বা, $\beta(a\beta+b)=-c$, বা, $a\beta+b=-\frac{c}{\beta}$.

$$\therefore\ \frac{1}{(a\alpha+b)^3}+\frac{1}{(a\beta+b)^3}=\frac{1}{\left(-\frac{c}{\alpha}\right)^3}+\frac{1}{\left(-\frac{c}{\beta}\right)^3}$$

$$=\frac{-\alpha^3}{c^3}+\frac{-\beta^3}{c^3}=-\frac{(\alpha^3+\beta^3)}{c^3}=-\frac{(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)}{c^3}$$

$$=-\frac{\left(-\frac{b}{a}\right)^3-3\frac{c}{a}\left(-\frac{b}{a}\right)}{c^3}=-\frac{-\frac{b^3}{a^3}+\frac{3bc}{a^2}}{c^3}=\frac{b^3-3abc}{a^3c^3}.$$

উদা. 3. If r be the ratio of the roots of the equation $ax^2+bx+c=0$, show that $(r+1)^2/r=b^2/ac$.

মনে কর, সমীরকণটির বীজদ্বয় α ও $r\alpha$,

$$\therefore\quad \alpha+r\alpha=-\frac{b}{a}\ \text{এবং}\ \alpha.r\alpha=\frac{c}{a},$$

অর্থাৎ $(r+1)\alpha=-\frac{b}{a}$ এবং $r\alpha^2=\frac{c}{a}$.

$$\therefore\ \frac{(r+1)^2\alpha^2}{r\alpha^2}=\frac{\left(-\frac{b}{a}\right)^2}{\frac{c}{a}}\ \text{বা,}\ \frac{(r+1)^2}{r}=\frac{b^2}{a^2}\times\frac{a}{c}=\frac{b^2}{ac}.$$

উদা. 4. Find the condition that the roots of the equation $ax^2+bx+c=0$, should be (1) equal in magnitude and opposite in sign, (2) reciprocals.

(1) এক্ষেত্রে সমীকরণটির একটি বীজ α হইলে, অপরটি $-\alpha$ হইবে ;

$\therefore$ বীজ দুইটির সমষ্টি $= a + (-a) = 0$,

বা, $-\dfrac{b}{a} = 0$; $\therefore$ $b = 0$, নির্ণেয় সর্ত।

(2) এক্ষেত্রে একটি বীজ a হইলে, অন্যটি $\dfrac{1}{a}$ হইবে ;

$\therefore$ বীজদ্বয়ের গুণফল $= a \cdot \dfrac{1}{a} = 1$,

বা, $\dfrac{c}{a} = 1$; $\therefore$ $c = a$, নির্ণেয় সর্ত।

উদা. 5. Find the condition that the equation $ax^2 + bx + c = 0$, should have (1) one root zero, (2) both the roots zero.

(1) সমীকরণটির একটি বীজ শূন্য হইলে, বীজদ্বয়ের গুণফল $= 0$;

বা, $\dfrac{c}{a} = 0$; $\therefore$ $c = 0$, নির্ণেয় সর্ত।

(2) সমীকরণটির দুইটি বীজই শূন্য হইলে, বীজদ্বয়ের সমষ্টি এবং গুণফল উভয়ই শূন্য হইবে ;

$\therefore$ $-\dfrac{b}{a} = 0$, এবং $\dfrac{c}{a} = 0$,

বা, $b = 0$ এবং $c = 0$; $\therefore$ $b = c = 0$, নির্ণেয় সর্ত।

উদা. 6. Find the condition that the roots of the equation $ax^2 + bx + c = 0$, should be (1) both positive, (2) both negative, (3) one positive and the other negative.

(1) বীজ দুইটি উভয়ই ধনাত্মক ; অতএব, উহাদের সমষ্টি ও গুণফল উভয়ই ধনাত্মক, অর্থাৎ, $-b/a$ এবং c/a উভয়ই ধনাত্মক।

$-\dfrac{b}{a}$ ধনাত্মক হইলে, $\dfrac{b}{a}$ ঋণাত্মক হইবে ;

$\therefore$ b ও a বিপরীত চিহ্নযুক্ত হইবে। ... ... (i)

আবার, c/a ধনাত্মক হইলে, c ও a একই চিহ্নযুক্ত হইবে। ... (ii)

(i) এবং (ii) হইতে, a ও c এর চিহ্ন একই একই হইবে এবং ইহা b এর চিহ্নের বিপরীত হইবে। ইহাই নির্ণেয় সর্ত।

(2) বীজ দুইটি উভয়ই ঋণাত্মক হইলে, উহাদের সমষ্টি ঋণাত্মক, কিন্তু গুণফল ধনাত্মক হইবে।

$\therefore$ এক্ষেত্রে, $-\frac{b}{a}$ ঋণাত্মক এবং $\frac{c}{a}$ ধনাত্মক।

$-\frac{b}{a}$ ঋণাত্মক হইলে, $\frac{b}{a}$ ধনাত্মক হইবে ; a ও b একই চিহ্নযুক্ত হইবে। (i)

আবার, $\frac{c}{a}$ ধনাত্মক হইলে, a ও c একই চিহ্নযুক্ত হইবে। ... (ii)

(i) ও (ii) হইতে দেখা যাইতেছে যে, এক্ষেত্রে, a, b ও c একই চিহ্নযুক্ত হইবে। ইহাই নির্ণেয় সর্ত্ত।

(3) বীজ দুইটির একটি ধনাত্মক ও একটি ঋণাত্মক হইলে, উহাদের গুণফল ঋণাত্মক হইবে, অর্থাৎ c/a ঋণাত্মক হইবে। অতএব, a ও c বিপরীত চিহ্নযুক্ত হইবে। ইহাই নির্ণেয় সর্ত্ত।

অধিকন্তু, বৃহত্তর সাংখ্যমানবিশিষ্ট বীজটি ধনাত্মক হইলে, বীজ দুইটির সমষ্টি, অর্থাৎ $-b/a$ ধনাত্মক হইবে, অর্থাৎ b/a ঋণাত্মক হইবে, আর ইহা ধনাত্মক হইলে বৃহত্তর সাংখ্যমানবিশিষ্ট বীজটি ঋণাত্মক হইবে।

অতএব, বৃহত্তর সাংখ্যমানবিশিষ্ট বীজটি ধনাত্মক হইলে, b ও c একই চিহ্নযুক্ত হইবে এবং এই চিহ্ন a র চিহ্নের বিপরীত হইবে ; আর বৃহত্তর সাংখ্যমানবিশিষ্ট বীজটি ঋণাত্মক হইলে, a ও b একই চিহ্নযুক্ত হইবে এবং এই চিহ্ন c এর চিহ্নের বিপরীত হইবে।

উদা. 7. If one root of the equation $ax^2+bx+c=0$ be four times the other, show the $4b^2=25ac$. [Calcutta, 1940]

সমীকরণটির একটি বীজ α হইলে, অপরটি 4α হইবে ;

$$\therefore \quad \alpha+4\alpha=-\frac{b}{a}, \quad \text{বা,} \quad 5\alpha=-\frac{b}{a}; \quad \cdots \quad \cdots (1)$$

$$\text{এবং} \quad \alpha.4\alpha=\frac{c}{a}, \quad \text{বা,} \quad 4\alpha^2=\frac{c}{a}. \quad \cdots \quad \cdots (2)$$

(1) হইতে, $\alpha=-\frac{b}{5a}$; α র এই মান (2) এ বসাইয়া,

$$4\left(-\frac{b}{5a}\right)^2=\frac{c}{a}, \quad \text{বা,} \quad \frac{4b^2}{25a^2}=\frac{c}{a},$$

$$\text{বা,} \quad 4b^2=\frac{c}{a}\cdot 25a^2=25ac.$$

বিকল্প পদ্ধতি : (1) এর উভয় পক্ষ বর্গ করিয়া, $25\alpha^2=\frac{b^2}{a^2}$; ... (3)

$\therefore$ (2) এবং (3) হইতে, $\dfrac{4a^2}{25a^2}=\dfrac{\frac{c}{a}}{\frac{b^2}{a^2}}=\dfrac{c}{a}\times\dfrac{a^2}{b^2}=\dfrac{ac}{b^2}$;

বা, $\dfrac{4}{25}=\dfrac{ac}{b^2}$, বা, $4b^2=25ac$.

বিকল্প পদ্ধতি : (1) হইতে, $\alpha=-\dfrac{b}{5a}$;

এখন, $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণটির বীজ α বলিয়া,

$$a\alpha^2+b\alpha+c=0,\quad \text{বা,}\quad a\left(-\frac{b}{5a}\right)^2+b\left(-\frac{b}{5a}\right)+c=0,$$

বা, $a\cdot\dfrac{b^2}{25a^2}-\dfrac{b^2}{5a}+c=0$, বা, $\dfrac{b^2}{25a}-\dfrac{b^2}{5a}=-c$,

বা, $b^2-5b^2=-25ac$, [উভয় পক্ষ $25a$ দ্বারা গুণ করিয়া]

বা, $-4b^2=-25ac$, বা, $4b^2=25ac$.

প্রশ্নমালা 2

1. If α and β be the roots of the equation $ax^2+bx+c=0$, find, in terms of the coefficients of the equation, the value of :

(i) $\alpha^4+\beta^4$; (ii) $\alpha^4-\beta^4$; (iii) $\alpha^5+\beta^5$;
(iv) $\alpha^5-\beta^5$; (v) $\alpha^6+\beta^6$; (vi) $\alpha^6-\beta^6$;
(vii) $\alpha^2\beta+\beta^2\alpha$; (viii) $\alpha^3\beta+\beta^3\alpha$; (ix) $\alpha^4\beta+\beta^4\alpha$;
(x) $\alpha^5\beta+\beta^5\alpha$; (xi) $\alpha^4\beta^7+\beta^4\alpha^7$; (xii) $\dfrac{\alpha^3}{\beta}+\dfrac{\beta^3}{\alpha}$;
(xiii) $\alpha^4\beta^{-2}+\beta^4\alpha^{-2}$; (xiv) $\alpha^3\beta^{-3}+\beta^3\alpha^{-3}$;
(xv) $\dfrac{1}{a\alpha-b}+\dfrac{1}{a\beta-b}$; (xvi) $\dfrac{\alpha^2}{\beta^2}+\dfrac{\beta^2}{\alpha^2}$; (xvii) $\dfrac{\alpha^2}{\beta}+\dfrac{\beta^2}{\alpha}$;
(xviii) $\dfrac{\alpha}{\beta^3}-\dfrac{\beta}{\alpha^3}$; (xix) $\dfrac{\alpha^2}{\beta^4}-\dfrac{\beta^2}{\alpha^4}$;
(xx) $\alpha^{p+1}\beta^q+\alpha^q\beta^{p+1}$.

2. For what value of m will the equation $x^2-2(5+2m)x+3(7+10m)=0$ have reciprocal roots? [Calcutta, 1936]

3. If α and β be the roots of the equation $x^2+px+q=0$, find, in terms of p and q the values of :

(i) $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2$; (ii) $\alpha^3+\alpha\beta+\beta^3$; (iii) $\alpha^4+\alpha^2\beta^2+\beta^4$;
(iv) $\alpha^{-3}+\beta^{-3}$; (v) $(1+\alpha+\alpha^2)(1+\beta+\beta^2)$;

(vi) $\alpha^2(\alpha+p)^{-1}+\beta^2(\beta+p)^{-1}$;

(vii) $\alpha^2(\alpha^2\beta^{-1}-\beta)+\beta^2(\beta^2\alpha^{-1}-\alpha)$. [Calcutta, 1941]

4. (*a*) If α and β are the roots of the equation $x^2+px+q=0$, find the values of :

(i) $\alpha^{-3}+\beta^{-3}$ [Calcutta, 1946] ; (ii) $\alpha^2\beta^{-2}+\beta^2\alpha^{-2}$;

(iii) $(\alpha+p)^{-4}+(\beta+p)^{-4}$.

(*b*) If α and β are the roots of $3x^2-6x+4=0$, find the values of $\left(\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}\right)+2\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)+3\alpha\beta$. [Calcutta, 1943]

5. If α and β be the roots of $x^2-(1+k^2)x+\frac{1}{2}(1+k^2+k^4)=0$, show that $\alpha^2+\beta^2=k^2$. [Calcutta, 1909]

6. If α and β be the roots of the equation $ax^2-2bx+c=0$, find the value of

$$\frac{b}{a\alpha^2+c}+\frac{b}{a\beta^2+c}.$$

7. If x_1 and x_2 be the roots of the equation $x^2+mx+m^2+n^2=0$, prove that $x_1^4+x_1^2x_2^2+x_2^4=n^2(2m^2+3n^2)$.

8. If x_1, x_2 be the roots of the equation $ax^2+bx+c=0$, show that $\frac{x_1}{x_2}+\frac{x_2}{x_1}=\frac{b^2-2ac}{ac}$; and verify this formula by the equation $2x^2-7x+3=0$.

9. If α, β and α', β' be the roots of $x^2-px+q=0$ and $x^2-p'x+q'=0$ respectively, find the values of

(i) $(\alpha-\alpha')^2+(\beta-\alpha')^2+(\alpha-\beta')^2+(\beta-\beta')^2$; [Calcutta, 1913]

(ii) $(\alpha-\alpha')(\beta-\beta')+(\beta-\alpha')(\alpha-\beta')$.

10. (*a*) If one root of the equation $x^2-px+q=0$ be twice the other, show that $2p^2=9q$. [Calcutta, 1937]

(*b*) Find the condition that the sum of the roots of the equation $x^2+px+q=0$ may be three times their difference.

11. (*a*) If the roots of the equation $ax^2+bx+c=0$ bear to one another the ratio 2 : 3, show that $6b^2=25ac$.

[Calcutta, 1949]

(*b*) If the roots of the equation $ax^2+bx+c=0$ bear to one another the ratio 3 : 4, prove that $12b^2=49ac$. [Calcutta, 1945]

12. If one root of the equation $ax^2+bx+c=0$ be the square of the other, prove that $b^3+a^2c+ac^2=3abc$.

[ইঙ্গিত : বীজ দুইটির একটি a হইলে, অপরটি a^2 হইবে ;

$\therefore \quad a^2+a=-\dfrac{b}{a} \quad \cdots (1)$ এবং $a^2.a$ বা, $a^3=\dfrac{c}{a} \quad \cdots (2)$

এখন, (2) হইতে, $a=\left(\dfrac{c}{a}\right)^{\frac{1}{3}}$; a র এই মান (1) এ বসাইয়া,

$$\left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{2}{3}}+\left(\frac{c}{a}\right)^{\frac{1}{3}}=-\frac{b}{a};$$

এখন করণী নিরসন করিলেই নির্ণেয় ফল পাওয়া যাইবে।]

13. If one root of the equation $x^2+px+q=0$ is the square of the other, prove that $p^3-q(3p-1)+q^2=0$. [Calcutta, 1943]

14. (i) If the roots of $lx^2+nx+n=0$ be in the ratio $p:p$, prove that

$$\sqrt{\frac{p}{q}}+\sqrt{\frac{q}{p}}+\sqrt{\frac{n}{l}}=0. \qquad \text{[Calcutta, 1941]}$$

(ii) Find the relation which exists between a, b, c, when the two roots of the equation $ax^2-bx+c=0$ are in the ratio $p:q$.

15. If the ratio of the roots of the equation $x^2+px+q=0$, be equal to that of the roots of $x^2+p_1x+q_1=0$, show that $p^2q_1=p_1{}^2q$.

[ইঙ্গিত : $\dfrac{a}{\beta}=\dfrac{a_1}{\beta_1}$; $\therefore \dfrac{a}{a_1}=\dfrac{\beta}{\beta_1}=\dfrac{a+\beta}{a_1+\beta_1}=\sqrt{\dfrac{a\beta}{a_1\beta_1}}$ ইত্যাদি।]

16. Determine the values of k, for which the equation

$$\frac{a}{x+a+k}+\frac{b}{x+b+k}=1$$

has roots equal in magnitude but opposite in sign.

17. Show that the arithmetic mean of the roots of $x^2-2ax+b^2=0$ is the geometric mean of the roots of $x^2-2bx+a^2=0$ and *vice versa*.

18. If the roots of $x^2+Px+q=0$ be α, β and the roots of $x^2+px+Q=0$ be γ, δ, find the roots of $x^2+px+q=0$ in terms of $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. [Calcutta, 1914]

19. If the roots of $ax^2+2bx+c=0$ be α, β, and those of the equation $Ax^2+2Bx+C=0$ be $\alpha+\delta$ and $\beta+\delta$, show that

$$\frac{b^2-ac}{B^2-AC}=\left(\frac{a}{A}\right)^2. \qquad \text{[Calcutta, 1912]}$$

20. If the roots of $x^2+2px+q=0$ and $x^2+2qx+p=0$ differ by a constant, show that $p+q+1=0$, unless $p=q$.
[Calcutta, 1944]

21. If the difference of the roots of the equation $x^2-px+q=0$ be the same as that of the equation $x^2-qx+p=0$, show that $p+q+4=0$, unless $p=q$. [Calcutta, 1941]

22. If the difference of the roots of the equation $x^2-px+q=0$ be unity, show that $p^2+4q^2=(1+2q)^2$. [Allahabad, 1917]

1.7. প্রদত্ত বীজদ্বয় হইতে সমীকরণ গঠন :

কোন দ্বিঘাত সমীকরণের বীজ দুইটি দেওয়া আছে। মনে কর, ইহারা α ও β. সমীকরণটি গঠন করিতে হইবে।

মনে কর, নির্ণেয় দ্বিঘাত সমীকরণটি $x^2+px+q=0$.

∴ নির্ণেয় দ্বিঘাত সমীকরণটি হইল

$$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta=0 \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

বা, $$(x-\alpha)(x-\beta)=0. \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

(1) হইতে দেখা যায় যে, দুইটি বীজ দেওয়া থাকিলে, বীজ দুইটির সমষ্টি ও গুণফল নির্ণয় করিয়া দ্বিঘাত সমীকরণটিকে একবারেই নিম্নলিখিতরূপে লেখা যায় :

$$x^2-(\text{বীজদ্বয়ের সমষ্টি})\,x+\text{বীজদ্বয়ের গুণফল}=0.$$

অনু.। (2) হইতে দেখা যায় যে, কোন দ্বিঘাত সমীকরণ $ax^2+bx+c=0$ এর বীজদ্বয় α এবং β হইলে, রাশিমালা $=a(x-\alpha)(x-\beta)$.

সুতরাং, x^2+px+q এর আকারে কোন দ্বিঘাত রাশিমালাকে উৎপাদকে পরিবর্তিত করিতে হইলে, প্রথমে $x^2+px+q=0$ এর বীজদ্বয় নির্ণয় করিয়া রাশিমালাকে $x^2+px+q=(x-\text{একটি বীজ})\,(x-\text{অপর বীজটি})$ এরূপভাবে লেখা হয়।

1.8. কোন প্রদত্ত দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয়-সম্বলিত দুইটি রাশি যে সমীকরণের বীজ সেই সমীকরণ গঠন :

নিম্নলিখিত উদাহরণসমূহ হইতে গঠন-প্রণালী স্পষ্ট হইবে :

(i) *Form the equation whose roots are equal in magnitude but opposite in sign to those of the equation* $ax^2+bx+c=0$.

মনে কর, α ও β, $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণটির দুইটি বীজ ; তাহা হইলে,

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a} \text{ এবং } \alpha\beta=\frac{c}{a}.$$

এখন এরূপ একটি দ্বিঘাত সমীকরণ গঠন করিতে হইবে, যাহার বীজ $-\alpha$ এবং $-\beta$.

নির্ণেয় সমীকরণের বীজদ্বয়ের

সমষ্টি $=-(\alpha+\beta)=-\left(\frac{-b}{a}\right)=\frac{b}{a}$;

এবং গুণফল $=(-\alpha)(-\beta)=\alpha\beta=\frac{c}{a}$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণটি হইল

$$x^2-\left(\frac{b}{a}\right)x+\frac{c}{a}=0, \text{ বা, } ax^2-bx+c=0.$$

(ii) *Form the equation whose roots are reciprocals of the roots of the equation* $ax^2+bx+c=0$.

মনে কর, α ও β, $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণটির বীজ ; তাহা হইলে,

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a} \text{ এবং } \alpha\beta=\frac{c}{a}.$$

এখন এরূপ একটি দ্বিঘাত সমীকরণ গঠন করিতে হইবে, যাহার বীজ $\frac{1}{\alpha}$ এবং $\frac{1}{\beta}$.

নির্ণেয় সমীকরণের বীজদ্বয়ের

সমষ্টি $=\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}=\frac{\alpha+\beta}{\alpha\beta}=\frac{-\frac{b}{a}}{\frac{c}{a}}=\frac{-b}{c}$.

এবং গুণফল $=\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{1}{\beta}=\frac{1}{\alpha\beta}=\frac{1}{\frac{c}{a}}=\frac{a}{c}$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণটি হইল

$$x^2-\left(\frac{-b}{c}\right)x+\frac{a}{c}=0, \text{ বা, } cx^2+bx+a=0.$$

(iii) *To find the equation whose roots are symmetrical functions of the roots of a given equation.*

নির্ণেয় সমীকরণের বীজদ্বয় প্রদত্ত সমীকরণের বীজদ্বয় দ্বারা গঠিত দুইটি প্রতিসম রাশিমালা হওয়ায় নির্ণেয় সমীকরণের বীজদ্বয়ের সমষ্টি এবং গুণফল উভয়ই প্রদত্ত সমীকরণের বীজদ্বয় দ্বারা গঠিত দুইটি প্রতিসম রাশি হইবে এবং ইহাদের মানও পূর্ব্বালোচিত পদ্ধতিতে নির্ণয় করা যাইবে। নির্ণেয় সমীকরণের বীজদ্বয়ের সমষ্টি এবং গুণফল নির্ণীত হইলে সমীকরণটিকে অনায়াসেই লেখা যাইবে।

উদা. 1. Form the quadratic equation whose roots are (i) -12 and 3, (ii) $\frac{m+n}{m-n}$ and $\frac{m-n}{m+n}$.

(i) এস্থলে, বীজদ্বয়ের সমষ্টি $= -12+3 = -9$;

এবং বীজদ্বয়ের গুণফল $= -12 \times 3 = -36$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণটি হইল $x^2-(-9)x+(-36)=0$;

বা, $x^2+9x-36=0$.

(ii) এস্থলে বীজদ্বয়ের সমষ্টি $= \frac{m+n}{m-n} + \frac{m-n}{m+n} = \frac{2(m^2+n^2)}{m^2-n^2}$;

এবং বীজদ্বয়ের গুণফল $= \frac{m+n}{m-n} \times \frac{m-n}{m+n} = 1$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ হইল $x^2 - \frac{2(m^2+n^2)}{m^2-n^2}x + 1 = 0$,

বা, $(m^2-n^2)x^2 - 2(m^2+n^2)x + (m^2-n^2) = 0$.

উদা. 2. Form the quadratic equation with rational coefficients, one of whose roots is $4+2\sqrt{3}$.

একটি বীজ $4+2\sqrt{3}$; অতএব, অপর বীজটি অবশ্যই $4-2\sqrt{3}$ হইবে।

$\therefore$ বীজদ্বয়ের সমষ্টি $=(4+2\sqrt{3})+(4-2\sqrt{3})=8$,

এবং বীজদ্বয়ের গুণফল $=(4+2\sqrt{3})(4-2\sqrt{3})=16-12=4$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণটি হইল $x^2-8x+4=0$.

উদা. 3. If $x=2+7\sqrt{-1}$, find the value of

$x^3-2x^2+45x+114$.

$x = 2 + 7\sqrt{-1}$;

$\therefore \quad x - 2 = 7\sqrt{-1}$

বা, $(x-2)^2 = (7\sqrt{-1})^2 = 49 \times (-1)$

বা, $x^2 - 4x + 4 = -49$;

$\therefore \quad x^2 - 4x + 53 = 0$;

$$\therefore \quad x^3 - 2x^2 + 45x + 114 = x(x^2 - 4x + 53) + 2(x^2 - 4x + 53) + 8$$
$$= (2 + 7\sqrt{-1}) \times 0 + 2 \times 0 + 8$$
($x = 2 + 7\sqrt{-1}$ বসাইয়া)
$$= 8.$$

উদা. 4. If α and β be the roots of $ax^2 + bx + c = 0$, form the equation whose roots are $p\alpha + q\beta$ and $q\alpha + p\beta$.

এস্থলে, $\alpha + \beta = -\dfrac{b}{a}$ এবং $\alpha\beta = \dfrac{c}{a}$.

এখন নির্ণেয় সমীকরণের বীজদ্বয়ের

$$\text{সমষ্টি} = (p\alpha + q\beta) + (q\alpha + p\beta) = (p+q)(\alpha+\beta) = (p+q)\left(-\frac{b}{a}\right)$$
$$= -\frac{b(p+q)}{a};$$

$$\text{এবং গুণফল} = (p\alpha + q\beta)(q\alpha + p\beta) = pq(\alpha^2 + \beta^2) + (p^2 + q^2)\alpha\beta$$
$$= pq\{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta\} + (p^2 + q^2)\alpha\beta$$
$$= pq(\alpha+\beta)^2 + (p^2 + q^2 - 2pq)\alpha\beta$$
$$= pq(\alpha+\beta)^2 + (p-q)^2\alpha\beta$$
$$= \frac{pqb^2}{a^2} + \frac{(p-q)^2c}{a} = \frac{b^2pq + (p-q)^2ac}{a^2}.$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণটি হইল

$$x^2 + \frac{b(p+q)}{a}x + \frac{b^2pq + (p-q)^2ac}{a^2} = 0,$$

বা, $a^2x^2 + ab(p+q)x + b^2pq + (p-q)^2ac = 0$.

উদা. 5. Form the equation whose roots are $\dfrac{1}{a\alpha + b}$ and $\dfrac{1}{a\beta + b}$, where α and β are the roots of the equation $ax^2 + bx + c = 0$.

$ax^2 + bx + c = 0$ সমীকরণটির বীজ α ও β;

$\therefore\ a\alpha^2+b\alpha+c=0,$ বা, $\alpha(a\alpha+b)=-c$;

$\therefore\ \dfrac{1}{a\alpha+b}=-\dfrac{\alpha}{c}$;

এবং $a\beta^2+b\beta+c=0,$ বা, $\beta(a\beta+b)=-c$;

$\therefore\ \dfrac{1}{a\beta+b}=-\dfrac{\beta}{c}$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণটির বীজদ্বয়ের

$$\text{সমষ্টি}=-\frac{\alpha}{c}-\frac{\beta}{c}=-\frac{1}{c}(\alpha+\beta)=-\frac{1}{c}\left[-\frac{b}{a}\right]=\frac{b}{ac};$$

এবং $\text{গুণফল}=\left(-\dfrac{\alpha}{c}\right)\times\left(-\dfrac{\beta}{c}\right)=\dfrac{\alpha\beta}{c^2}=\dfrac{c}{ac^2}=\dfrac{1}{ac}$.

নির্ণেয় সমীকরণটি হইল

$$x^2-\frac{b}{ac}x+\frac{1}{ac}=0,\quad \text{বা,}\quad acx^2-bx+1=0.$$

উদা. 6. If α and β be roots of the equation $x^2+2ax+b=0$, form a quadratic equation with rational coefficients one of whose roots is $\alpha+\beta+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$.

$x^2+2ax+b=0$ সমীকরণটির দুইটি বীজ α ও β ;

$\therefore\ \alpha+\beta=-2a$ এবং $\alpha\beta=b$.

মূলদ সহগ-বিশিষ্ট দ্বিঘাত সমীকরণের একটি বীজ $\alpha+\beta+\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ বলিয়া অপর বীজটি অবশ্যই $\alpha+\beta-\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ হইবে।

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণের বীজদ্বয়ের সমষ্টি $=2(\alpha+\beta)=-4a$;

এবং গুণফল $=(\alpha+\beta)^2-(\alpha^2+\beta^2)$

$=2\alpha\beta=2b$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণটি হইল

$$x^2-(-4a)x+2b=0,\quad \text{বা,}\quad x^2+4ax+2b=0.$$

উদা. 7. If α and β be the roots of the equation $x^2+x+1=0$, form the equation whose roots are α^2 and β^2. Explain why you get the same equation as the given one. [Allahabad, 1924]

এস্থলে, $\alpha+\beta=-1$. এবং $\alpha\beta=1$.

∴ নির্ণেয় সমীকরণের বীজদ্বয়ের সমষ্টি $= \alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta$
$= 1 - 2 = -1$;

এবং গুণফল $= \alpha^2\beta^2 = (\alpha\beta)^2 = 1$.

∴ নির্ণেয় সমীকরণটি হইল $x^2 - (-1)x + 1 = 0$,
বা, $x^2 + x + 1 = 0$.

অতএব, দেখা যাইতেছে প্রদত্ত সমীকরণটিই নির্ণেয় সমীকরণ।

এখন, $\alpha + \beta = -1$; ∴ $\beta = -\alpha - 1$. ... ... (1)

আবার, প্রদত্ত সমীকরণ $x^2 + x + 1 = 0$ এর একটি বীজ α বলিয়া,

$\alpha^2 + \alpha + 1 = 0$; ∴ $\alpha^2 = -\alpha - 1 = \beta$, (1) হইতে।

আবার, $\alpha + \beta = -1$; ∴ $\alpha = -\beta - 1$. ... ... (2)

আর, প্রদত্ত সমীকরণ $x^2 + x + 1 = 0$ এর একটি বীজ β বলিয়া,

$\beta^2 + \beta + 1 = 0$; ∴ $\beta^2 = -\beta - 1 = \alpha$, (2) হইতে।

∴ $\alpha = \beta^2$ এবং $\beta = \alpha^2$; সুতরাং, দেখা গেল যে, নির্ণেয় সমীকরণের বীজদ্বয় এবং প্রদত্ত সমীকরণের বীজদ্বয় একই এবং সেইজন্যই নির্ণেয় সমীকরণ এবং প্রদত্ত সমীকরণ এক হইয়াছে।

উদা. 8. If a is not equal to b, but $a^2 = 5a - 3$ and $b^2 = 5b - 3$, find the equation whose roots are $\frac{a}{b}$ and $\frac{b}{a}$. [Calcutta, 1950]

$a^2 - 5a + 3 = 0$ এবং $b^2 - 5b + 3 = 0$;

∴ স্পষ্টই, a ও b, $x^2 - 5x + 3 = 0$, দ্বিঘাত সমীকরণটির দুইটি বীজ;

∴ $a + b = 5$ এবং $ab = 3$.

∴ নির্ণেয় সমীকরণের বীজদ্বয়ের

$$\text{সমষ্টি} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a} = \frac{a^2 + b^2}{ab} = \frac{(a+b)^2 - 2ab}{ab}$$

$$= \frac{5^2 - 2.3}{3} = \frac{25 - 6}{3} = \frac{19}{3};$$

এবং গুণফল $= \frac{a}{b} \times \frac{b}{a} = 1$.

∴ নির্ণেয় সমীকরণটি হইল

$x^2 - \frac{19}{3}x + 1 = 0$, বা, $3x^2 - 19x + 3 = 0$.

উদা. 9. Find the equation whose roots are each less by 2 than those of $x^2-16x+63=0$.

মনে কর, α ও β প্রদত্ত সমীকরণের দুইটি বীজ ;

$\therefore\ \alpha+\beta=16$, এবং $\alpha\beta=63$.

প্রদত্ত সমীকরণের বীজ দুইটি α ও β হওয়ায় নির্ণেয় সমীকরণের বীজ দুইটি হইবে $\alpha-2$ এবং $\beta-2$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণের বীজদ্বয়ের

সমষ্টি $=(\alpha-2)+(\beta-2)=\alpha+\beta-4=16-4=12$;

এবং গুণফল $=(\alpha-2)(\beta-2)=\alpha\beta-2(\alpha+\beta)+4$

$=63-2.16+4=67-32=35.$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণটি হইল $x^2-12x+35=0.$

উদা. 10. If α, β be the roots of the equation $ax^2+bx+c=0$ and α', β' be those of another equation $a'x^2+b'x+c'=0$, form the equation whose roots are $\alpha\alpha'+\beta\beta'$ and $\alpha\beta'+\beta\alpha'$.

এস্থলে, $\alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}, \alpha\beta=\dfrac{c}{a}, \alpha'+\beta'=-\dfrac{b'}{a'}$ এবং $\alpha'\beta'=\dfrac{c'}{a'}$.

$$\therefore\quad (\alpha\alpha'+\beta\beta')+(\alpha\beta'+\beta\alpha')$$

$$=(\alpha+\beta)(\alpha'+\beta')=\left(-\frac{b}{a}\right)\left(-\frac{b'}{a'}\right)=\frac{bb'}{aa'},$$

এবং $(\alpha\alpha'+\beta\beta')(\alpha\beta'+\beta\alpha')$

$$=\alpha^2\alpha'\beta'+\beta^2\alpha'\beta'+\alpha'^2\alpha\beta+\beta'^2\alpha\beta$$

$$=\alpha'\beta'(\alpha^2+\beta^2)+\alpha\beta(\alpha'^2+\beta'^2)$$

$$=\alpha'\beta'\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}+\alpha\beta\{(\alpha'+\beta')^2-2\alpha'\beta'\}$$

$$=\frac{c'}{a'}\left\{\left(-\frac{b}{a}\right)^2-\frac{2c}{a}\right\}+\frac{c}{a}\left\{\left(-\frac{b'}{a'}\right)^2-2\frac{c'}{a'}\right\}$$

$$=\frac{c'(b^2-2ac)}{a^2a'}+\frac{c(b'^2-2a'c')}{a'^2a}$$

$$=\frac{1}{a^2a'^2}\left(b^2a'c'+b'^2ac-4aa'cc'\right).$$

∴ নির্ণেয় সমীকরণটি হইল

$$x^2 - \frac{bb'}{aa'}x + \frac{b^2a'c' + b'^2ac - 4aa'cc'}{a^2a'^2} = 0,$$

বা, $$a^2a'^2x^2 - aa'bb'x + (b^2a'c' + b'^2ac - 4aa'cc') = 0.$$

উদা. 11. If a be a root of the equation $4x^2 + 2x - 1 = 0$, prove that the other root is $4a^3 - 3a$.

a প্রদত্ত সমীকরণটির একটি বীজ বলিয়া,

$$4a^2 + 2a - 1 = 0, \quad বা, \quad 4a^2 = 1 - 2a; \quad \therefore \quad 4a^3 = a - 2a^2.$$

$$\therefore \quad 4a^3 - 3a = a - 2a^2 - 3a = -2a - 2a^2$$
$$= -2a - \tfrac{1}{2}(1 - 2a) = -a - \tfrac{1}{2}. \quad \cdots \quad (1)$$

এখন, প্রদত্ত সমীকরণটির বীজদ্বয়ের সমষ্টি $= -\frac{2}{4}$ বা $-\frac{1}{2}$ এবং উহার একটি বীজ a;

∴ প্রদত্ত সমীকরণটির অপর বীজটি $= -\frac{1}{2} - a = 4a^3 - 3a$, (1) হইতে।

প্রশ্নমালা 3

1. Find the equation whose roots are :

(i) 5, 7 ; (ii) 9, −2 ; (iii) −5, −3 ; (iv) 11, −7.

2. From the relations given below, obtain the quadratic equation whose roots are p and q, and hence find the values of the quantities :

(i) $p + q = 7, pq = 12$; (ii) $p + q = 2, pq = -15$;
(iii) $p + q = -6, pq = 8$; (iv) $p + q = 6, pq = 2$;
(v) $p + q = 5, pq = 6$.

3. If a, β denote the roots of the equation $2x^2 - 5x + 2 = 0$, find the equation whose roots are :

(i) $\frac{a}{\beta^2}, \frac{\beta}{a^2}$; (ii) $a^2 + \beta^2, a^2 - \beta^2$;

(iii) $\frac{1}{2a-5}, \frac{1}{2\beta-5}$; (iv) $\frac{\beta}{2a-5}, \frac{a}{2\beta-5}$;

(v) $a + \beta, \frac{1}{2}a\beta$.

4. If a, β be the roots of $x^2 + px + q = 0$, find the equation whose roots are

(i) $\frac{a}{\beta}$ and $\frac{\beta}{a}$; [C. U. 1936] (ii) $(a + \beta)^2, (a - \beta)^2$;

(iii) $a^2 + a\beta, \beta^2 + a\beta$.

5. If p, q denote the roots of $x^2+7x+12=0$, find the equation whose roots are $(p+q)^2$ and $(p-q)^2$.

[Calcutta, 1920, '40]

6. If α, β be the roots of $x^2-px+q=0$, find the equation whose roots are :

(i) $2\alpha-\beta,\ 2\beta-\alpha$; (ii) $\alpha^{-1}+\beta^{-1},\ \alpha\beta$;

(iii) $m\alpha+n\beta,\ n\alpha+m\beta$; (iv) $\alpha^2+\alpha\beta^{-1},\ \beta^2+\beta\alpha^{-1}$;

(v) $\dfrac{q}{p-\alpha},\ \dfrac{q}{p-\beta}$.

7. If α, β be the roots of the equation $x^2-px+q=0$, find the equation whose roots are $\dfrac{2}{\alpha}$, $\dfrac{2}{\beta}$; hence show that

$$\frac{1}{\alpha^3}+\frac{1}{\beta^3}=\frac{p^3}{q^3}-\frac{3p}{q^2}.$$

8. If α, β denote the roots of the equation $ax^2+bx+c=0$, form the equation whose roots are :

(i) $\alpha^2,\ \beta^2$; (ii) $\alpha(1-\beta),\ \beta(1-\alpha)$; (iii) $\dfrac{a\alpha+b}{\beta},\ \dfrac{a\beta+b}{\alpha}$;

(iv) $\alpha+m\beta,\ \beta+m\alpha$; (v) $\alpha+\dfrac{1}{\beta},\ \beta+\dfrac{1}{\alpha}$.

9. If p and q be the roots of the equation $3x^2+6x+2=0$, show that the equation whose roots are $\dfrac{-p^2}{q}$ and $\dfrac{-q^2}{p}$ will be $3x^2-18x+2=0$.

[Calcutta, 1955]

10. If α and β be the roots of the equation $ax^2+bx+c=0$, show that the equation whose roots are $\dfrac{1}{\alpha+\beta}$ and $\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}\right)$ is $bcx^2+(b^2+ca)x+ab=0$.

11. Form the equation whose roots are the reciprocals of the roots of $x^2-5x+6=0$.

12. Form the equation whose roots are the reciprocals of the roots of $x^2-x+1=0$.

[Allahabad, 1925]

13. If α, β be the roots of the equation $x^2+x+1=0$, find the equation whose roots are $\dfrac{\alpha}{\beta}$ and $\dfrac{\beta}{\alpha}$. Account for the identity of the equation thus obtained with the original equation.

[Calcutta, 1922]

14. If α, β be the roots of the equation $ax^2 - bx + c = 0$, form the equation whose roots are $\frac{c}{b - a\alpha}$ and $\frac{c}{b - a\beta}$. Account for the identity of the equation thus obtained with the original one.

15. If α and β be the roots of $x^2 - px + q = 0$, show that $\frac{\alpha}{\beta}$ is a root of the equation $qx^2 - (p^2 - 2q)x + q = 0$. [Calcutta, 1931]

16. Express the roots of the equation $q^2x^2 - (p^2 - 2q)x + 1 = 0$ in terms of those of $x^2 + px + q = 0$. [Calcutta, 1932]

17. If $\alpha \pm \sqrt{\beta}$ be the roots of the equation $x^2 + px + q = 0$, prove that $\frac{1}{\alpha} \pm \frac{1}{\sqrt{\beta}}$ will be the roots of $(p^2 - 4q)(p^2x^2 + 4px) = 16q$.

18. If $\alpha^{\frac{1}{2}} \pm \beta^{-\frac{1}{2}}$ denote the roots of $x^2 - px + q = 0$, show that the equation whose roots are $\alpha \pm \beta$ is $(p^2 - 4q)^2(4x - p^2)^2 = 256$.

19. Find the quadratic equation with rational coefficients, one of whose roots is $3 - \sqrt{5}$.

20. Find the value of :

(i) $x^3 - 7x^2 + 13x - 2$, when $x = 2 + \sqrt{3}$;

(ii) $x^3 - 4x^2 - 9x + 97$, when $x = 4 + \sqrt{-7}$;

(iii) $x^4 + 4x^3 + 6x^2 + 4x + 9$, when $x = \sqrt{-2} - 1$;

(iv) $16x^3 - 16x^2 - 11x + 173$, when $x = \frac{1}{4}(6 + 7\sqrt{-1})$.

21. Find the equation whose roots are each less by $\frac{1}{2}$ than those of $x^2 + 7x + 12 = 0$.

22. Find the equation whose roots are reciprocals of the roots of $ax^2 - 2bx + c = 0$; hence show that one of the roots of the given equation increases indefinitely, when a diminishes without limit.

1.9. সাধারণ বীজ থাকিবার সর্ত :

যে সর্ত সিদ্ধ হইলে $ax^2 + bx + c = 0$ এবং $a'x^2 + b'x + c' = 0$ সমীকরণ দুইটির একটি সাধারণ বীজ থাকে তাহা নির্ণয় কর। (To find the condition that the equations $ax^2 + bx + c = 0$ and $a'x^2 + b'x + c = 0$ may have a common root.)

মনে কর, α সমীকরণ দুইটির সাধারণ বীজ।

α উভয় সমীকরণের বীজ বলিয়া α দ্বারা উভয় সমীকরণই সিদ্ধ হয়।

$$\left.\begin{array}{ll}\therefore & a\alpha^2+b\alpha+c=0 \\ \text{এবং} & a'\alpha^2+b'\alpha+c'=0\end{array}\right\}$$

বজ্রগুণন দ্বারা,

$$\frac{\alpha^2}{bc'-b'c}=\frac{\alpha}{ca'-c'a}=\frac{1}{ab'-a'b}; \qquad \cdots \quad (\text{ক})$$

$$\therefore \frac{\alpha^2}{(ca'-c'a)^2}=\frac{\alpha^2}{bc'-b'c}\cdot\frac{1}{ab'-a'b}.$$

$$\therefore (ca'-c'a)^2=(bc'-b'c)(ab'-a'b);$$

ইহাই নির্ণেয় সর্ত্ত।

অনুসি. 1. (ক) হইতে সুস্পষ্ট যে, সাধারণ বীজ α

$$=\frac{ca'-c'a}{ab'-a'b}, \text{ অথবা, } \frac{bc'-b'c}{ca'-c'a}.$$

অনুসি. 2. প্রথম সমীকরণটির অপর বীজটি

$$=\left(\frac{c}{a}\div\frac{ca'-c'a}{ab'-a'b}\right), \text{ অথবা, } \left(\frac{c}{a}\div\frac{bc'-b'c}{ca'-c'a}\right),$$

অর্থাৎ, $\dfrac{c(ab'-a'b)}{a(ca'-c'a)}$, অথবা, $\dfrac{c(ca'-c'a)}{a(bc'-b'c)}$.

দ্বিতীয় সমীকরণটির অপর বীজটি

$$=\left(\frac{c'}{a'}\div\frac{ca'-c'a}{ab'-a'b}\right), \text{ অথবা, } \left(\frac{c'}{a'}\div\frac{bc'-b'c}{ca'-c'a}\right),$$

অর্থাৎ, $\dfrac{c'(ab'-a'b)}{a'(ca'-c'a)}$, অথবা, $\dfrac{c'(ca'-c'a)}{a'(bc'-b'c)}$.

উদা. 1. Prove that if the equations $x^2+bx+ca=0$ and $x^2+cx+ab=0$ have a common root, their other roots will satisfy the equation $x^2+ax+bc=0$.

সাধারণ বীজটি α হইলে,

$$\alpha^2+b\alpha+ca=0,$$

এবং $\quad \alpha^2+c\alpha+ab=0.$

∴ বজ্রগুণন দ্বারা,

$$\frac{\alpha^2}{a(b^2-c^2)}=\frac{\alpha}{-a(b-c)}=\frac{1}{-(b-c)},$$

বা, $$\frac{\alpha^2}{a(b+c)}=\frac{\alpha}{-a}=\frac{1}{-1};\quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

এখন, (1) হইতে সাধারণ বীজ $\alpha=\frac{-a}{-1}=a$;

∴ $a(b+c)\times(-1)=(-a)^2$, বা, $-a(b+c)=a^2$,

বা, $-(b+c)=a$, বা, $a+b+c=0$. ... ... (2)

∴ প্রথম সমীকরণের বীজদ্বয়ের গুণফল ca বলিয়া, ইহার অপর বীজটি $ca\div a=c$ এবং দ্বিতীয় সমীকরণের বীজদ্বয়ের গুণফল ab বলিয়া, ইহার অপর বীজটি $ab\div a=b$.

এখন, c ও b বীজদ্বয়ের দ্বারা গঠিত সমীকরণটি হইল

$$x^2-(b+c)x+bc=0,$$

বা $x^2+ax+bc=0$, (2) হইতে, যেহেতু $-(b+c)=a$.

সুতরাং, সমীকরণ দুইটির অপর বীজদ্বয় c ও b দ্বারা $x^2+ax+bc=0$ সমীকরণটি সিদ্ধ হয়।

উদা. 2. If the equations $ax^3+3bx^2+3cx+d=0$ and $ax^2+2bx+c=0$ have a common root, prove that $(bc-ad)^2=4(ac-b^2)(bd-c^2)$.

মনে কর, সাধারণ বীজটি α;

তাহা হইলে, $a\alpha^3+3b\alpha^2+3c\alpha+d=0$, ... (1)

এবং $a\alpha^2+2b\alpha+c=0$. ... ... (2)

∴ (1) এবং (2) হইতে,

$$(a\alpha^3+3b\alpha^2+3c\alpha+d)-\alpha(a\alpha^2+2b\alpha+c)=0,$$

বা, $b\alpha^2+2c\alpha+d=0$. ... ... (3)

(2) এবং (3) হইতে বজ্রগুণন দ্বারা,

$$\frac{\alpha^2}{2(bd-c^2)}=\frac{\alpha}{bc-ad}=\frac{1}{2(ac-b^2)};$$

$$\therefore \quad \frac{a^2}{(bc-ad)^2} = \frac{a^2}{2(bd-c^2)} \cdot \frac{1}{2(ac-b^2)};$$

$$\therefore \quad (bc-ad)^2 = 4(ac-b^2)(bd-c);$$

ইহাই নির্ণেয় সর্ত।

1.10. $ax^2+bx+c=0$ দ্বিঘাত সমীকরণটির দুইটি বীজ α ও β হইলে, প্রমাণ করিতে হইবে যে, $ax^2+bx+c \equiv a(x-\alpha)(x-\beta)$:

$ax^2+bx+c=0$ দ্বিঘাত সমীকরণটির দুইটি বীজ α ও β.

$$\therefore \quad \alpha+\beta = -\frac{b}{a} \text{ এবং } \alpha\beta = \frac{c}{a}.$$

$$\therefore \quad ax^2+bx+c \equiv a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$$

$$\equiv a\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\} \equiv a(x-\alpha)(x-\beta).$$

দ্রষ্টব্য 1. এই অনুচ্ছেদ-সাহায্যে যে-কোন দ্বিঘাত রাশিমালাকে দুইটি একঘাত (linear) গুণনীয়কে বিশ্লেষণ করা যায়।

দ্রষ্টব্য 2. (ক) α ও β বাস্তব ও অসমান হইলে, ax^2+bx+c এর গুণনীয়ক দুইটি বাস্তব ও অসমান হইবে, অর্থাৎ, $b^2 > 4ac$ হইলে, গুণনীয়ক দুইটিও বাস্তব ও অসমান হইবে;

(খ) α ও β বাস্তব ও সমান হইলে, ax^2+bx+c এর গুণনীয়ক দুইটিও বাস্তব ও সমান হইবে, অর্থাৎ, $b^2=4ac$ হইলে, ax^2+bx+c এর গুণনীয়ক দুইটি বাস্তব ও সমান হইবে, অর্থাৎ, ax^2+bx+c একটি পূর্ণ বর্গ হইবে;

(গ) α ও β অবাস্তব হইলে, ax^2+bx+c এর কোন বাস্তব গুণনীয়ক থাকিবে না, অর্থাৎ $b^2 < 4ac$ হইলে, ax^2+bx+c এর কোন বাস্তব গুণনীয়ক থাকে না।

উদা. Resolve the expression $3x^2 - 7x + 3$ into linear factors.

$3x^2-7x+3=0$ সমীকরণটির বীজদ্বয় $\frac{7 \pm \sqrt{49-36}}{6} = \frac{7 \pm \sqrt{13}}{6}$.

$$\therefore \quad 3x^2-7x+3 \equiv 3\left(x-\frac{7+\sqrt{13}}{6}\right)\left(x-\frac{7-\sqrt{13}}{6}\right).$$

1.11. যে সর্ত্ত সিদ্ধ হইলে ax^2+bx+c এবং $a'x^2+b'x+c'$ দ্বিঘাত রাশিমালা দুইটির একটি সাধারণ একঘাত গুণনীয়ক থাকে, তাহা নির্ণয় কর (To find the condition that the two quadratic expressions ax^2+bx+c and $a'x^2+b'x+c'$ may have a common factor.)

$x-\alpha$ রাশিমালা দুইটির একটি সাধারণ গুণনীয়ক হইলে, $x-\alpha$ দ্বারা রাশিমালা দুইটি সম্পূর্ণরূপে বিভাজ্য ;

$\therefore\ a\alpha^2+b\alpha+c=0,$ এবং $a'\alpha^2+b'\alpha+c'=0.$

[1.9 অনুচ্ছেদে সমাধান দ্রষ্টব্য]

উদা. 1. Find the condition that the expressions $lx^2+mxy+ny^2$ and $l'x^2+m'xy+n'y^2$ may have a common linear factor.

মনে কর, $lx^2+mxy+ny^2 \equiv l\,(x-ay)\times(x-by)$ ... (1)

এবং $l'x^2+m'xy+n'y^2 \equiv l'\,(x-ay)\times(x-b'y)$ ... (2)

তাহা হইলে, $x-ay$ রাশিমালাদ্বয়ের সাধারণ একঘাত গুণনীয়ক।

এখন, $x=ay$ ধরিলে, (1) এবং (2) উভয়েরই দক্ষিণ পক্ষের মান $=0$ হয় ; অতএব, $x=ay$ ধরিলে (1) এবং (2) উভয়ের বাম পক্ষের মানও $=0$ হইবে।

$\therefore\ x=ay$ বসাইলে (1) হইতে পাই

$$l(ay)^2+m(ay)y+ny^2=0\ ;$$

বা, $la^2+ma+n=0.$ ... ... (3)

অনুরূপ, $l'a^2+m'a+n'=0.$ ... ... (4)

$\therefore$ (3) এবং (4) হইতে বজ্রগুণন দ্বারা,

$$\frac{a^2}{mn'-m'n}=\frac{a}{nl'-n'l}=\frac{1}{lm'-l'm}\ ;$$

$$\therefore\ \frac{a^2}{(nl'-n'l)^2}=\frac{a^2}{mn'-m'n}\cdot\frac{1}{lm'-l'm}\ ;$$

$$\therefore\ (nl'-n'l)^2=(mn'-m'n)(lm'-l'm)\ ;$$

ইহাই নির্ণেয় সর্ত্ত।

উদা. 2. Find the condition that the expressions $ax^2+2hxy+by^2$ and $a'x^2+2h'xy+b'y^2$ may be respectively divisible by factors of the form $y-mx$ and $my+x$.

মনে কর, $ax^2+2hxy+by^2 \equiv b(y-mx)(y-nx)$ ... (1)

এবং $a'x^2+2h'xy+b'y^2 \equiv a'(x+my)(x-ny)$. ... (2)

এখন, $y=mx$ ধরিলে, (1) এর দক্ষিণ পক্ষটি শূন্য হয়, অতএব, উহার বাম পক্ষটিও শূন্য হইবে ;

$\therefore \quad ax^2+2hx.mx+b(mx)^2=0,$

বা, $a+2hm+bm^2=0.$ ... ... (3)

আবার, $x=-my$ ধরিলে, (2) এর দক্ষিণ পক্ষটি শূন্য হয় বলিয়া, উহার বাম পক্ষটিও শূন্য হইবে ;

$\therefore \quad a'(-my)^2+2h'(-my)y+b'y^2=0,$

বা, $a'm^2-2h'm+b'=0.$ ... ... (4)

(3) এবং (4) হইতে দেখা যায়,

$$bm^2+2hm+a=0,$$

এবং $a'm^2-2h'm+b'=0.$

$\therefore$ বজ্রগুণন দ্বারা,

$$\frac{m^2}{2(hb'+h'a)}=\frac{m}{aa'-bb'}=\frac{1}{-2(bh'+a'h)};$$

$\therefore \quad (aa'-bb')^2=-4(hb'+h'a)(bh'+a'h),$

বা, $(aa'-bb')^2+4(hb'+h'a)(bh'+a'h)=0$;

ইহাই নির্ণেয় সর্ত্ত।

1.12. যে সর্ত্ত সিদ্ধ হইলে, x এবং y সম্বলিত সাধারণ দ্বিঘাত রাশিমালা $ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0$ কে দুইটি একঘাত গুণনীয়কে বিশ্লেষণ করা যাইতে পারে, তাহা নির্ণয় কর :

$$ax^2+2hxy+by^2+2gx+2fy+c=0,$$

বা, $ax^2+2x(hy+g)+(by^2+2fy+c)=0.$

[x এর শক্তির অধঃক্রম অনুসারে সাজাইয়া]

ইহাকে x এর দ্বিঘাত সমীকরণরূপে গণ্য করিলে,

$$x = \frac{-2(hy+g) \pm \sqrt{4(hy+g)^2 - 4a(by^2+2fy+c)}}{2a}$$

$$= \frac{-(hy+g) \pm \sqrt{(hy+g)^2 - a(by^2+2fy+c)}}{a}.$$

$$\therefore \quad ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c$$

$$= a\left\{x + \frac{hy+g-\sqrt{(hy+g)^2 - a(by^2+2fy+c)}}{a}\right\}$$

$$\times \left\{x + \frac{hy+g+\sqrt{(hy+g)^2 - a(by^2+2fy+c)}}{a}\right\}.$$

স্পষ্টই, গুণনীয়ক দুইটিকে একঘাত-বিশিষ্ট হইতে হইলে,

$(hy+g)^2 - a(by^2+2fy+c)$ কে একটি পূর্ণ বর্গ হইতে হইবে,

অর্থাৎ, $y^2(h^2-ab) + 2y(gh-af) + (g^2-ac)$ কে একটি পূর্ণ বর্গ হইতে হইবে,

$$\therefore \quad 4(gh-af)^2 = 4(h^2-ab)(g^2-ac),$$

বা, $g^2h^2 - 2afgh + a^2f^2 = h^2g^2 - h^2ac - abg^2 + a^2bc$,

বা, উভয় পক্ষ হইতে h^2g^2 বাদ দিয়া এবং উভয় পক্ষকে a দ্বারা ভাগ করিয়া, $\mathbf{abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0}$;

ইহাই নির্ণেয় সর্ত্ত, এবং বাম পক্ষস্থ রাশিমালাটিকে x, y সম্বলিত সাধারণ দ্বিঘাত রাশিমালাটির নিরূপক বলা হয়।

উদা. 1. Show that the expression $2x^2 + xy - x - 3y^2 + 16y - 21$ is resolvable into two linear factors.

$ax^2 + 2hxy + by^2 + 2gx + 2fy + c$ রাশিমালাটিকে দুইটি একঘাত গুণনীয়কে বিশ্লেষণ করা যাইতে পারে, যদি

$abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2 = 0$ হয়।

এক্ষেত্রে, $a=2,\ h=\frac{1}{2},\ b=-3,\ g=-\frac{1}{2},\ f=8,\ c=-21.$

এখন, $abc + 2fgh - af^2 - bg^2 - ch^2$

$$= 2.(-3).(-21) + 2.8.(-\tfrac{1}{2}).\tfrac{1}{2} - 2.8^2 - (-3)(-\tfrac{1}{2})^2 - (-21)(\tfrac{1}{2})^2$$

$$= 126 - 4 - 128 + \tfrac{3}{4} + \tfrac{21}{4} = -6 + \tfrac{24}{4} = -6 + 6 = 0.$$

অতএব, প্রদত্ত রাশিমালাটিকে দুইটি একঘাত গুণনীয়কে বিশ্লেষণ করা যাইতে পারে।

উদা. 2. For what values of m will $2x^2-xy-y^2+5x+my+2=0$ be equivalent to the product of two linear factors ?

এস্থলে, $a=2,\ b=-1,\ c=2,\ f=\frac{m}{2},\ g=\frac{5}{2},\ h=-\frac{1}{2}$.

$$\therefore\quad abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2$$
$$=2.(-1).2+2.\frac{m}{2}.\frac{5}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)-2.\left(\frac{m}{2}\right)^2-(-1)(\tfrac{5}{2})^2-2(-\tfrac{1}{2})^2$$
$$=-4-\frac{5}{4}m-\frac{m^2}{2}+\frac{25}{4}-\frac{1}{2}=-\frac{m^2}{2}-\frac{5}{4}m+\frac{7}{4}.$$

এখন, প্রদত্ত রাশিটিকে দুইটি একঘাত গুণনীয়কে বিশ্লেষণ করা সম্ভব হইলে, $abc+2fgh-af^2-bg^2-ch^2=0$ হইবে,

অর্থাৎ, $-\frac{m^2}{2}-\frac{5}{4}m+\frac{7}{4}=0$ হইবে ;

$\therefore\quad -\frac{m^2}{2}-\frac{5}{4}m+\frac{7}{4}=0$, বা, $2m^2+5m-7=0$;

$\therefore\quad m=\frac{-5\pm\sqrt{25+56}}{4}=1,\ -\frac{7}{2}$.

উদা. 3. Find the two linear factors of the expression
$$2x^2+xy-6y^2-5x+11y-3.$$

$2x^2+xy-6y^2-5x+11y-3=0$ সমীকরণটি বিবেচনা করা যাক।

সমীকরণটিকে $2x^2+(y-5)x-(6y^2-11y+3)=0$ রূপে লিখিয়া এবং ইহাকে x এর একটি দ্বিঘাত সমীকরণরূপে গণ্য করিয়া সমাধান করিলে, দেখা যায়,

$$x=\frac{-(y-5)\pm\sqrt{(y-5)^2+8(6y^2-11y+3)}}{4}$$
$$=\frac{-(y-5)\pm\sqrt{49y^2-98y+49}}{4}$$
$$=\frac{-(y-5)\pm(7y-7)}{4}=\frac{6y-2}{4},\ \text{বা},\ \frac{-8y+12}{4}$$
$$=\frac{3y-1}{2},\ \text{বা},\ (-2y+3).$$

$$\therefore\ 2x^2 + xy - 6y^2 - 5x + 11y - 3$$
$$= 2\left(x - \frac{3y-1}{2}\right)\left\{x - (-2y+3)\right\}$$
$$= (2x - 3y + 1)(x + 2y - 3).$$

বিকল্প পদ্ধতি ঃ রাশিমালাটির সমমাত্রিক অংশ $2x^2 + xy - 6y^2$ কে গুণনীয়কে বিশ্লেষণ করিয়া,

$$2x^2 + xy - 6y^2 = 2x^2 + 4xy - 3xy - 6y^2$$
$$= 2x(x+2y) - 3y(x+2y) = (x+2y)(2x-3y).$$

এখন মনে কর, $2x^2 + xy - 6y^2 - 5x + 11y - 3$
$$\equiv (x + 2y + k)(2x - 3y + l) \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad (1)$$
$$\equiv 2x^2 + xy - 6y^2 + (2k + l)x + (2l - 3k)y + lk\,;$$

ইহা একটি অভেদ ; অতএব, ইহার উভয় পক্ষের সমশক্তিবিশিষ্ট পদগুলির সহগ অবশ্যই একই হইবে ;

$$\therefore\ 2k + l = -5,\ 2l - 3k = 11,\ lk = -3.$$

সমীকরণ তিনটির যে-কোন দুইটি হইতে প্রাপ্ত k ও l এর মান দ্বারা অবশিষ্টটি সিদ্ধ হইতে হইবে ; না হইলে প্রদত্ত রাশিমালার কোন সাধারণ গুণনীয়ক থাকিবে না।

এখন, প্রথম ও দ্বিতীয় সমীকরণ সমাধান করিয়া, $k = -3$ এবং $l = 1$ পাওয়া যায় ; এবং k ও l এর এই মান দ্বারা তৃতীয়টিও সিদ্ধ হয়।

$\therefore$ (1)-এ k ও l এর মান বসাইয়া প্রদত্ত রাশিমালা
$$= (x + 2y - 3)(2x - 3y + 1).$$

প্রশ্নমালা 4

1. (*a*) Determine the values of m for which $3x^2 + 4mx + 2 = 0$ and $2x^2 + 3x - 2 = 0$ may have a common root. [Calcutta, 1934]

(*b*) If $x^2 + px + q = 0$ and $x^2 + qx + p = 0$ have a common root, show that either, $p = q$, or, $p + q + 1 = 0$. [Calcutta, 1939]

2. If the equations $x^2 + px + q = 0$ and $x^2 + p'x + q' = 0$ have a common root, show that it must be either $\dfrac{pq' - p'q}{q - q'}$, or, $\dfrac{q - q'}{p' - p}$.

3. If the equations $ax^2 + bx + c = 0$ and $cx^2 + bx + a = 0$ have a common root, show that either, $a + b + c = 0$, or, $a - b + c = 0$.

4. Find the condition that one root of $ax^2+bx+c=0$ may be equal to one root of $a'x^2+b'x+c'=0$, with the sign changed.

5. Find the condition that one root of $ax^2+bx+c=0$ may be the reciprocal of one root of $a'x^2+b'x+c'=0$.

6. Find the condition that x^2+px+q and $x^2+p'x+q'$ may have a common linear factor.

7. Determine a, such that the expression $x^2-11x+a$ and $x^2-14x+2a$ may have a common factor.

8. If one root of the equation $x^2+ax+b=0$ be a root of the equation $x^2+cx+d=0$, show that the other root of the first equation is a root of the equation $x^2+(2a-c)x+a^2-ac+d=0$.

9. If the expressions ax^2+bx+c and bx^2+cx+a have a common linear factor, show that either, $a=0$, or, $a^3+b^3+c^3=3abc$.

10. Find the condition that the expression $ax^2+2hxy+by^2$ may have two linear factors of the forms $y-mx$ and $my+x$.

11. If the roots of $ax^2+bx+c=0$ be the square roots of the roots of $a'x^2+b'x+c'=0$, show that $a'b^2+a^2b'=2aa'c$ and $a'c^2=c'a^2$.

12. If the roots of $ax^2+bx+c=0$ be n-times those of $a'x^2+b'x+c'=0$, show that $an^2/a'=bn/b'=c/c'$.

13. Show that if $ax^2+by^2+cz^2+2ayz+2bzx+2cxy$ is resolvable into two linear factors, $a^3+b^3+c^3=3abc$.

14. For what values of m will $x^2+8xy-4y^2+2my-5$ be equivalent to the product of two linear factors ?

15. Show that the expression $8x^2-8xy-6y^2+18x+21y-18$ can be resolved into two linear factors, and find them.

1.13. দ্বিঘাত রাশিমালার মানের চিহ্ন :

প্রমাণ কর যে, x এর সকল বাস্তব মানের জন্যই ax^2+bx+c রাশিমালাটির মান a র চিহ্নবিশিষ্ট হইবে, কেবলমাত্র $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণটির বীজদ্বয় বাস্তব এবং ভিন্ন হইলে এবং x এর মান ঐ বীজদ্বয়ের অন্তর্ব্বর্ত্তী হইলে ঐরূপ হইবে না। (To show that for all real values of x the expression ax^2+bx+c has the same sign as a, except when the roots of the corresponding equation $ax^2+bx+c=0$, are real and different, and x lies between them.)

মনে কর, $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণটির বীজ α ও β.

তাহা হইলে, $ax^2+bx+c \equiv a(x-\alpha)(x-\beta)$.

এখন এই বীজ দুইটি তিনপ্রকার হইতে পারে : (ক) বাস্তব এবং সমান, (খ) অবাস্তব, (গ) বাস্তব এবং অসমান।

(ক) বীজ দুইটি বাস্তব এবং সমান হইলে, $\alpha=\beta$;

$\therefore \quad ax^2+bx+c \equiv a(x-\alpha)^2 = a \times$ একটি ধনাত্মক রাশি ;

$\therefore \quad x$ এর সকল বাস্তব মানের জন্যই ax^2+bx+c রাশিমালাটির মান a র চিহ্নবিশিষ্ট হইবে।

(খ) বীজ দুইটি অবাস্তব হইলে, মনে কর, $\alpha=m+in$ এবং $\beta=m-in$;

$$\therefore \quad ax^2+bx+c = a\{x-(m+in)\}\{x-(m-in)\}$$
$$= a\{(x-m)-in\}\{(x-m)+in\}$$
$$= a\{(x-m)^2+n^2\} = a \times \text{একটি ধনাত্মক রাশি ;}$$

$\therefore \quad x$ এর সকল অবাস্তব মানের জন্যই ax^2+bx+c রাশিমালাটির মান a র চিহ্নবিশিষ্ট হইবে।

(গ) বীজ দুইটি বাস্তব কিন্তু অসমান হইলে, মনে কর, $\alpha > \beta$.

এখন, x এর মান α ও β র অন্তর্ব্বর্ত্তী হইলে, অর্থাৎ, $\beta < x < \alpha$ হইলে, $x-\alpha$ ঋণাত্মক হইবে এবং $x-\beta$ ধনাত্মক হইবে ; অতএব, $(x-\alpha)(x-\beta)$ একটি ঋণাত্মক রাশি হইবে ;

$$\therefore \quad \text{এক্ষেত্রে, } ax^2+bx+c \equiv a(x-\alpha)(x-\beta)$$
$$= a \times \text{একটি ঋণাত্মক রাশি ;}$$

স্পষ্টই, a ধনাত্মক হইলে, দক্ষিণ পক্ষ একটি ঋণাত্মক রাশি হইবে,

এবং a ঋণাত্মক রাশি হইলে, দক্ষিণ পক্ষ একটি ধনাত্মক রাশি হইবে।

$\therefore$ এক্ষেত্রে, ax^2+bx+c এর মান a র বিপরীত চিহ্নবিশিষ্ট হইবে।

এইবার মনে কর, x এর মান α ও β র অন্তর্ব্বর্ত্তী নহে।

এক্ষেত্রে যদি x এর মান α ও β অপেক্ষা বৃহত্তর হয়, তাহা হইলে, $x-\alpha$ ও $x-\beta$ উভয়ই ধনাত্মক হইবে ; আর যদি x এর মান α ও β অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হয়, তাহা হইলে, $x-\alpha$ ও $x-\beta$ উভয়ই ঋণাত্মক হইবে।

সুতরাং, উভয় ক্ষেত্রেই, $(x-\alpha)(x-\beta)$ ধনাত্মক হইবে।

$\therefore \quad ax^2+bx+c \equiv a(x-\alpha)(x-\beta) = a \times$ একটি ধনাত্মক রাশি ;

$\therefore$ x এর মান α ও β র অন্তর্ব্বর্ত্তী না হইলে, ax^2+bx+c রাশি-মালাটির মান a র চিহ্নবিশিষ্ট হইবে।

অতএব, দেখা গেল যে, x এর সকল বাস্তব মানের জন্যই ax^2+bx+c রাশিমালাটির মান a র চিহ্নবিশিষ্ট হইবে, কেবলমাত্র $ax^2+bx+c=0$ সমীকরণটির বীজদ্বয় বাস্তব এবং ভিন্ন হইলে এবং x এর মান ঐ বীজদ্বয়ের অন্তর্ব্বর্ত্তী হইলে, ঐরূপ হইবে না।

1.14. দ্বিঘাত রাশিমালার চরম ও অবম মান ঃ

ax^2+bx+c রাশিমালাটি ধরা যাক।

মনে কর, x এর বাস্তব মানের জন্য $ax^2+bx+c=y$.

তাহা হইলে, $ax^2+bx+(c-y)=0$ দ্বিঘাত সমীকরণটির বীজদ্বয় বাস্তব।

এখন, সমীকরণটি সমাধান করিয়া,

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4a(c-y)}}{2a}$$

$$=-\frac{b}{2a}\pm\frac{\sqrt{4a\left(y-\dfrac{4ac-b^2}{4a}\right)}}{2a}$$

$$=-\frac{b}{2a}\pm\frac{1}{a}\sqrt{a\left(y-\frac{4ac-b^2}{4a}\right)}.$$

এখন, x বাস্তব বলিয়া, মূলচিহ্ন-অন্তর্গত রাশিটি $=0$ বা একটি ধনাত্মক রাশি হইবে।

$\therefore$ (i) $y=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$, এস্থলে $x=-\dfrac{b}{2a}$;

অথবা, (ii) $y-\dfrac{4ac-b^2}{4a}$, এবং a উভয়ই অবশ্য ধনাত্মক বা ঋণাত্মক হইবে।

I. অতএব, x এর বাস্তব মানের জন্য যদি a ধনাত্মক হয়, তাহা হইলে

(i) $y=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$, অথবা, (ii) $y>\dfrac{4ac-b^2}{4a}$.

সুতরাং, y (অর্থাৎ ax^2+bx+c) এর অবম মান $=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$ এবং $x=-\dfrac{b}{2a}$ হইলেই এই অবম মান হইবে।

ইহা স্পষ্টই প্রতীয়মান হয় যে, এক্ষেত্রে ইহার চরম মানের কোন নির্দ্দিষ্ট সীমা নাই।

II. যদি a ঋণাত্মক হয়, তাহা হইলে,

(i) $y=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$, অথবা, (ii) $y < \dfrac{4ac-b^2}{4a}$.

সুতরাং, y (অর্থাৎ ax^2+bx+c) এর চরম মান $=\dfrac{4ac-b^2}{4a}$, এবং $x=-\dfrac{b}{2a}$ হইলেই এরূপ চরম মান পাওয়া যায়।

ইহা স্পষ্টই প্রতীয়মান হয় যে, এক্ষেত্রে অবম মানের কোন নির্দ্দিষ্ট সীমা নাই।

উদা. 1. Find the sign of $3x^2-2x+5$ for real values of x.

$3x^2-2x+5=3(x^2-\frac{2}{3}x+\frac{5}{3})=3\{(x-\frac{1}{3})^2+\frac{14}{9}\}$.

এখন, x বাস্তব বলিয়া $(x-\frac{1}{3})^2$ সর্ব্বদাই ধনাত্মক হইবে ;

$\therefore$ $(x-\frac{1}{3})^2+\frac{14}{9}$ সর্ব্বদাই ধনাত্মক হইবে।

$\therefore$ x এর সকল বাস্তব মানের জন্যই প্রদত্ত রাশিমালাটি ধনাত্মক হইবে।

উদা. 2. Find the minimum values of $x^2-6x+10$, for real values of x.

প্রদত্ত রাশিমালা $=(x^2-6x+9)+1=(x-3)^2+1$.

এখন, x এর সকল বাস্তব মানের জন্য $(x-3)^2$ ধনাত্মক। অতএব, রাশিমালাটি সর্ব্বদাই > 1, এবং যখন $x=3$ হইবে, রাশিমালাটি $=1$ হইবে।

$\therefore$ রাশিমালাটির অবম মান $=1$.

উদা. 3. For what values of x is $2x^2+5x-3$ negative? What is its least value? [Calcutta, 1950]

প্রথম অংশ : $2x^2+5x-3=2x^2+6x-x-3$
$=(x+3)(2x-1)=2(x+3)(x-\frac{1}{2})$.

[লক্ষণীয় যে, প্রথমে $2x^2+5x-3=0$ এর বীজ $\frac{1}{2}$ এবং -3 নির্ণয় করিয়া একেবারেই $2x^2+5x-3=2(x+3)(x-\frac{1}{2})$ লেখা যায়।]

এখন, x এর মান $> \frac{1}{2}$ হইলে, $x+3$ এবং $x-\frac{1}{2}$ উভয়ই ঋণাত্মক হইবে ;

$\therefore$ রাশিমালাটির মানও ধনাত্মক হইবে।

x এর মান < -3 হইলে, $x+3$ এবং $x-\frac{1}{2}$ উভয়ই ঋণাত্মক হইবে ;

$\therefore$ রাশিমালাটির মান ধনাত্মক হইবে।

$-3 < x < \frac{1}{2}$ হইলে, $x+3$ ধনাত্মক এবং $x-\frac{1}{3}$ ঋণাত্মক হইবে;

$\therefore$ রাশিমালাটির মান ঋণাত্মক হইবে।

দ্বিতীয় অংশ ঃ মনে কর, $2x^2+5x-3=y$.

$\therefore$ x বাস্তব বলিয়া, $2x^2+5x-(3+y)=0$ সমীকরণটির বীজদ্বয় বাস্তব;

$\therefore$ নিরূপক, $25+8(3+y) \nless 0$ বা, $8y+49 \nless 0$ বা, $y \nless -\frac{49}{8}$.

$\therefore$ y অর্থাৎ প্রদত্ত রাশিমালাটির অবম মান $-\frac{49}{8}$.

উদা. 4. Find the maximum and minimum values of

$$\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$$

for real values of x.

মনে কর, $\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}=y$.

তাহা হইলে, $y(x^2+x+1)=x^2-x+1$,

বা, $(y-1)x^2+(y+1)x+y-1=0$.

এখন, x বাস্তব বলিয়া, x এর এই দ্বিঘাত সমীকরণটির বীজদ্বয় বাস্তব;

$\therefore$ নিরূপক, $(y+1)^2-4(y-1)^2 \geqslant 0$,

বা, $\{(y+1)+2(y-1)\}\{(y+1)-2(y-1)\} \geqslant 0$,

বা, $(3y-1)(3-y) \geqslant 0$,

বা, $-3(y-\frac{1}{3})(y-3) \geqslant 0$,

বা, $(y-\frac{1}{3})(y-3) \leqslant 0$.

$(y-\frac{1}{3})(y-3)=0$ হইলে, $y=3$ বা, $\frac{1}{3}$. ... ... (1)

$(y-\frac{1}{3})(y-3) < 0$ হইলে, $y-\frac{1}{3} > 0$ এবং $y-3 < 0$ হইবে; (2)

বা, $y-\frac{1}{3} < 0$ এবং $y-3 > 0$ হইবে। ... (3)

(2) হইতে, $y > \frac{1}{3}$ এবং < 3, অর্থাৎ $\frac{1}{3} < y < 3$. ... (4)

(3) হইতে, $y < \frac{1}{3}$ এবং > 3, ইহা অসম্ভব।

$\therefore$ (1) এবং (4) হইতে, $\frac{1}{3} \leqslant y \leqslant 3$.

$\therefore$ y অর্থাৎ প্রদত্ত রাশিটির অবম মান $\frac{1}{3}$ এবং চরম মান 3.

উদা. 5. If x be real, prove that $\dfrac{2x^2-2x+4}{x^2-4x+3}$ cannot lie between 1 and -7. [Calcutta, 1944]

মনে কর, $y=\dfrac{2x^2-2x+4}{x^2-4x+3}$;

$\therefore\ y(x^2-4x+3)=2x^2-2x+4,$

বা, $(y-2)x^2-2(2y-1)x+(3y-4)=0.$

এখন, x বাস্তব বলিয়া, x এর এই দ্বিঘাত সমীকরণটির বীজদ্বয় বাস্তব ;

$\therefore$ নিরূপক, $4(2y-1)^2-4(y-2)(3y-4) \nless 0,$

বা, $(2y-1)^2-(y-2)(3y-4) \nless 0,$

বা, $y^2+6y-7 \nless 0,$

বা, $(y-1)(y+7) \nless 0.$

এখন, $y+7$ কে $y-(-7)$ রূপে লিখিলে দেখা যায় যে, y এর মান >-7 কিন্তু <1 হইলে, $y+7$ ধনাত্মক, কিন্তু $y-1$ ঋণাত্মক হয় ; সুতরাং,

$$(y-1)(y+7)<0 \text{ হয় };$$

$\therefore\ y>-7$, কিন্তু <1 হইতে পারে না ; অর্থাৎ, x এর বাস্তব মানের জন্য, y অর্থাৎ প্রদত্ত রাশিটির মান -7 এবং 1 এর অন্তর্ব্বর্তী হইতে পারে না।

উদা. 6. Show that the expression $\dfrac{m^2}{1+x}-\dfrac{n^2}{1-x}$ may have any real value, for real values of x.

মনে কর, $y=\dfrac{m^2}{1+x}-\dfrac{n^2}{1-x}$,

বা, $y=\dfrac{(m^2-n^2)-(m^2+n^2)x}{1-x^2}$;

$\therefore\ yx^2-(m^2+n^2)x+m^2-n^2-y=0.$ [পক্ষান্তর-প্রক্রিয়া দ্বারা]

x এর সমাধান করিয়া,

$$x=\frac{(m^2+n^2)\pm\sqrt{(m^2+n^2)^2-4y(m^2-n^2-y)}}{2y}.$$

এখন, x বাস্তব বলিয়া, করণী-চিহ্নের অন্তর্গত রাশিমালা অবশ্যই ধনাত্মক হইবে।

করণী-চিহ্নের অন্তর্গত রাশিমালা

$$=4y^2-4y(m^2-n^2)+(m^2+n^2)^2$$
$$=4y^2-4y(m^2-n^2)+(m^2-n^2)^2+4m^2n^2$$
$$=\{2y-(m^2-n^2)\}^2+(2mn)^2$$

= একটি ধনাত্মক রাশি + একটি ধনাত্মক রাশি,

(y এর যে-কোন বাস্তব মানের জন্য)।

সুতরাং, x এর সকল বাস্তব মানের জন্যই প্রদত্ত রাশিমালার মান বাস্তব হইবে।

দ্রষ্টব্য ঃ প্রদত্ত রাশিমালাটি যে-কোন বাস্তব মানবিশিষ্ট হইতে পারে বলিয়া উহার কোন চরম বা অবম মান থাকিবে না।

উদা. 7. Prove that if x is real, the expression $\frac{(x-a)(x-c)}{x-b}$ is capable of assuming all real values, if a, b, c are in ascending order of magnitudes.

মনে কর, $\frac{(x-a)(x-c)}{x-b}=y$;

$\therefore\ x^2-(a+c+y)x+(ac+by)=0.$

[সরলীকরণ ও পক্ষান্তর প্রক্রিয়া দ্বারা]

$$\therefore\ x=\frac{(a+c+y)\pm\sqrt{(a+c+y)^2-4(ac+by)}}{2}.$$

x এর মান বাস্তব বলিয়া, x এর দ্বিঘাত সমীকরণটির বীজদ্বয়ও বাস্তব ;

$\therefore$ নিরূপক $(a+c+y)^2-4(ac+by)\nless 0,$

বা, $y^2+(a+c)^2+2y(a+c)-4ac-4by\nless 0,$

বা, $y^2+2(a+c-2b)y+(a-c)^2\nless 0,$

বা, $\{y+(a+c-2b)\}^2+\{(a-c)^2-(a+c-2b)^2\}\nless 0,$

বা, $\{y+(a+c-2b)\}^2+\{(a-c)+(a+c-2b)\}\{(a-c)-(a+c-2b)\}\nless 0,$

বা, $\{y+(a+c-2b)\}^2+4(a-b)(b-c)\nless 0.$ ··· (1)

এখন, y এর যে-কোন বাস্তব মানের জন্য $\{y+(a+c-2b)\}^2$, বাস্তব রাশির বর্গ বলিয়া ধনাত্মক হইবে, আর $a<b<c$ বলিয়া, $a-b$ একটি ঋণাত্মক

রাশি এবং $b-c$ও একটি ঋণাত্মক রাশি ; অতএব, $4(a-b)(b-c)$ একটি ধনাত্মক রাশি। অতএব, দেখা গেল, $a < b < c$ হইলে, y এর সকল বাস্তব মানের জন্যই (1) সিদ্ধ হইতেছে।

$\therefore$ $a < b < c$ হইলে, x এর বাস্তব মানের জন্য প্রদত্ত রাশিটি যে-কোন বাস্তব মানবিশিষ্ট হইতে পারে।

দ্রষ্টব্য : $a > b > c$ হইলেও একই ফল পাওয়া যায়।

প্রশ্নমালা 5

1. If x be real, find the sign of :

(a) $3x^2+5x+7$; (b) $3x-4x^2-7$; (c) $4x^2-28x+49$;

(d) $(a^2+b^2)x^2-2abx+\dfrac{a^2+b^2}{4}$;

(e) $(a^2+b^2)x^2+2(a+b)x+2$.

2. Prove that the expression $6x^2-13x+6$ is positive for all real values of x except for those lying between $\frac{2}{3}$ and $\frac{3}{2}$.

3. For what values of x will the expression $7x^2-9x+3$ be negative ?

4. (a) Show that the expression $5x^2-30x+47$ is always positive, whatever real values x may have.

(b) If x is real and the expression $x^2-2ax+a^2-b^2$ is positive, show that x can never lie between $a-b$ and $a+b$.

5. Show that the expression $8x-15-x^2$ can be positive only for values of x which lie between certain limits ; and find these limits. [Allahabad, 1930]

6. Show that $(x-1)(x-3)(x-5)(x-7)+20$ is positive for real values of x.

7. Find the values of a for which $x^2-ax+1-2a^2$ will be always positive for real values of x.

8. If x be real, prove that

(a) $4x^2-12x+17$ cannot be less than 8 ;

(b) $x^2-9x+21$ " " " " $\frac{3}{4}$;

(c) $5x^2-7x+4$ " " " " $1\frac{11}{20}$.

9. Find the minimum values of the following expressions for real values of x :

(a) $4x^2 - 9x + 5$; (b) $3x^2 - 5x + 4$; (c) $2x^2 - 13x + 22$.

Find in each case the values of x corresponding to the minimum value.

10. If x be real, show that the least value of $4x^2 - 4x + 1$ is zero and the corresponding value of x is $\frac{1}{2}$. [Calcutta, 1937]

11. Find the greatest (or *maximum*) values of the following expressions for real values of x :

(a) $6x - x^2 - 1$; (b) $5 + 8x - 8x^2$; (c) $5 + 4x - 4x^2$.

Find in each case the value of x corresponding to the maximum value.

12. Find the maximum value of $(1 - x)(2 + 3x)$ for real values of x. [Calcutta, 1946]

13. Show that $\frac{x^2 - 3x + 4}{x^2 + 3x + 4}$ lies between 7 and $\frac{1}{7}$, if x be real. [Calcutta, 1940]

14. If x be real, prove that the expression $\frac{x^2 + 2x - 11}{2(x - 3)}$ can have all numerical values except such as lie between 2 and 6.

15. Find the limits between which the expression $\frac{x^2 - 4x + 9}{x^2 + 4x + 9}$ must lie for real values of x. [Calcutta, 1948]

16. If x be real, show that $\frac{x}{x^2 - 5x + 9}$ must lie between 1 and $-\frac{1}{11}$. [Calcutta, 1953]

17. Find, for real values of x, the greatest and the least values of $\frac{x^2 + 14x + 9}{x^2 + 2x + 3}$.

18. If x is real, show that the value of $\frac{(x - 1)(x + 3)}{(x - 2)(x + 4)}$ does not lie between $\frac{4}{9}$ and 1.

19. If x be real, prove that (a) $\frac{x^2 - 2x + 21}{6x - 14}$ cannot lie between 2 and $-\frac{10}{9}$ and (b) $\frac{x^2 + 8x + 80}{2x + 8}$ cannot lie between -8 and 8.

20. If x be real, prove that $\frac{x^2+34x-71}{x^2+2x-7}$ can have all numerical values, except such as lie between 5 and 9.
[Calcutta, 1954]

21. Prove that the expression $\frac{1}{x+1}+\frac{1}{3x+1}-\frac{1}{(x+1)(3x+1)}$ cannot lie between the values of 1 and 4, for any real values of x.

22. Find the greatest and the least values of $\frac{6x^2-22x+21}{5x^2-18x+17}$, for all real values of x. [Calcutta, 1942]

23. If x is real, prove that $\frac{3x^2+38x-85}{x^2+2x-7}$ can have no value between 7 and 11. [Gauhati, 1949]

24. Show that for real values of x, $\frac{2x^2+4x+1}{x^2+4x+2}$ is capable of having all real values. [Calcutta, 1947]

25. If x be real, show that the expression $\frac{16}{1+x}-\frac{9}{1-x}$ can have any real value.

26. In the equation $x^2-px+q^2=0$, if x be real, prove that p cannot lie between $+2q$ and $-2q$.

27. Show that, if p be greater than unity, then for all real values of x, the expression

$$\frac{x^2-2x+p^2}{x^2+2x+p^2} \text{ lie between } \frac{p-1}{p+1} \text{ and } \frac{p+1}{p-1}.$$

28. Prove that if equation $x^2+4y^2-8x+12=0$ is to be satisfied by real values of x and y, x must lie between 2 and 6 and y must lie between -1 and 1.

29. Show that the expression

$$\frac{(x^2-4)(x^2+3x+2)(x^2-x-2)+10}{x^2+5x+7}$$

is positive for all real values of x.

দ্বিতীয় অধ্যায়

বিন্যাস ও সমবায়

(Permutations and Combinations)

2.1. বিন্যাস (Permutation) : কতিপয় বস্তু হইতে উহাদের নির্দ্দিষ্টসংখ্যক কয়েকটিকে অথবা প্রদত্ত বস্তুসমূহের সবগুলিকে লইয়া সম্ভাব্য সকল প্রকার বিভিন্ন ক্রমে সাজাইলে যে সকল বিভিন্ন ক্রম (order) পাওয়া যায়, তাহাদের প্রত্যেকটিকে একটি **বিন্যাস** বলে।

মনে কর, a, b, c তিনটি বিভিন্ন বস্তু ; ইহাদের নির্দ্দিষ্টসংখ্যক কয়েকটিকে, মনে কর, দুইটিকে, সম্ভাব্য সকল প্রকারে লইলে, (a, b), (a, c), (b, c) হইল। ইহাদিগের আবার সম্ভাব্য সকল বিভিন্ন ক্রমে সাজাইলে,

ab, ba ; ac, ca ; bc, cb, এই ছয়টি বিভিন্ন ক্রম পাওয়া গেল ; ইহাদের প্রত্যেকটি তিনটি বিভিন্ন বস্তু a, b ও c এর দুইটি দুইটি করিয়া লওয়ার একটি বিন্যাস। স্পষ্টই তিনটি বিভিন্ন বস্তুর দুইটি দুইটি করিয়া লওয়ার মোট বিন্যাস-সংখ্যা ছয়।

আবার, a, b ও c তিনটি বস্তুর সবগুলিকে একসঙ্গে লইয়া বিভিন্ন ক্রমে সাজাইলে,

abc, acb, bac, bca, cab, cba, এই যে ছয়টি বিভিন্ন ক্রম পাওয়া যায়, ইহাদের প্রত্যেকটি তিনটি বিভিন্ন বস্তু a, b ও c এর সবগুলি একসঙ্গে লওয়ার একটি বিন্যাস, এবং স্পষ্টই তিনটি বিভিন্ন বস্তুর সবগুলি একসঙ্গে লওয়ার মোট বিন্যাস-সংখ্যা ছয়।

এস্থলে লক্ষণীয়, তিনটি বিভিন্ন বস্তু a, b ও c দ্বারা সম্ভাব্য সকল বিভিন্ন প্রকারে দুইটি স্থান পূর্ণ করিলে তিনটি বিভিন্ন বস্তুর দুইটি দুইটি করিয়া লওয়ার বিন্যাসগুলি পাওয়া যায় ; এবং সম্ভাব্য সকল বিভিন্ন প্রকারে তিনটি স্থান পূর্ণ করিলে তিনটি বিভিন্ন বস্তুর সবগুলি একসঙ্গে লওয়ার বিন্যাসগুলি পাওয়া যায়।

2.2. সমবায় (Combination) : কতিপয় বস্তু হইতে উহাদের নির্দ্দিষ্টসংখ্যক কয়েকটিকে অথবা উহাদের সবগুলিকে সম্ভাব্য সকল বিভিন্ন প্রকারে ক্রম-নিরপেক্ষভাবে নির্ব্বাচন (selection) করিলে, অথবা উহাদের লইয়া সম্ভাব্য

সকল প্রকারে ক্রম-নিরপেক্ষভাবে দল (group) গঠন করিলে, ঐ সকল নির্ব্বাচন বা দলের প্রত্যেকটিকে একটি **সমবায়** বলে।

মনে কর, a, b ও c তিনটি বিভিন্ন বস্তু ; ইহাদের মধ্য হইতে নির্দ্দিষ্টসংখ্যক কয়েকটি, মনে কর, দুইটি করিয়া সম্ভাব্য সকল প্রকারে ক্রম-নিরপেক্ষভাবে নির্ব্বাচন করিলে, অথবা দুইটি দুইটি লইয়া ক্রম-নিরপেক্ষভাবে দল গঠন করিলে, ab, ac ও bc এই যে তিনটি বিভিন্ন নির্ব্বাচন বা দল পাওয়া গেল, ইহাদের প্রত্যেকটি তিনটি বিভিন্ন বস্তু a, b ও c এর দুইটি দুইটি করিয়া লওয়ার একটি সমবায়। বিশেষভাবে মনে রাখিতে হইবে যে, সমবায়ে ক্রম-নিরপেক্ষভাবে বস্তুগুলি নির্ব্বাচন করা হয়, অথবা বস্তুগুলির দ্বারা দল গঠন করা হয় বলিয়া, সমবায়ে বস্তুসমূহের অবস্থান বা ক্রম-বিবেচ্য নহে, ইহা একেবারেই অবান্তর ; তাই সমবায়ে,

ab ও ba একই, বিভিন্ন নহে,
ac ও ca একই, বিভিন্ন নহে,
bc ও cb একই, বিভিন্ন নহে।

আবার, a, b ও c বিভিন্ন বস্তু তিনটিকে একসঙ্গে লইয়া সমবায় গঠন করিলে, একটিমাত্র সমবায় abc পাওয়া যাইবে। এক্ষেত্রে, abc, acb, bac, bca, cab, cba বিভিন্ন সমবায় নহে, একই।

বিশেষ দ্রষ্টব্য ঃ পূর্ব্বের অনুচ্ছেদ দুইটি হইতে **বিন্যাস ও সমবায়ের পার্থক্য** স্পষ্টই উপলব্ধি হইবে।

(1) বিন্যাসে বস্তুসমূহের ক্রম-বিবেচ্য, কিন্তু সমবায়ে বস্তুসমূহের ক্রম-বিবেচ্য নহে, ক্রম-অবান্তর।

ক্রম-বিবেচ্য বলিয়া, ab ও ba দুইটি বিন্যাস ;

কিন্তু ক্রম-বিবেচ্য নহে বলিয়া, ab ও ba দুইটি সমবায় নহে, একই সমবায়।

a, b ও c তিনটি বিভিন্ন বস্তুর দুইটি দুইটি করিয়া লইলে,

ক্রম-বিবেচ্য বলিয়া, বিন্যাস পাওয়া যায় ab, ba, ac, ca, bc, cb এই ছয়টি ;

কিন্তু ক্রম-বিবেচ্য নহে বলিয়া, সমবায় পাওয়া যায় ab, ac ও bc এই তিনটি। আবার ঐ তিনটি বিভিন্ন বস্তুর সবগুলিকে একসঙ্গে লইলে,

ক্রম-বিবেচ্য বলিয়া, সমবায় পাওয়া যাইবে abc, acb, bca, bac, cab, cba এই ছয়টি ;

কিন্তু ক্রম-বিবেচ্য নহে বলিয়া, সমবায় পাওয়া যাইবে abc, এই মাত্র একটি।

(2) বস্তুসমূহের নির্দ্দিষ্টসংখ্যক কয়েকটিকে সম্ভাব্য সকল প্রকারে লইলে সমবায় গঠিত হয়;

আর এই সমবায়গুলির প্রত্যেকটিকে সম্ভাব্য সকল প্রকার ক্রমে সাজাইলে বিন্যাস পাওয়া যায়।

তাই, বিন্যাস-সংখ্যা সাধারণতঃ (প্রায় সর্ব্বক্ষেত্রেই) সমবায়-সংখ্যা অপেক্ষা বৃহত্তর।

2.3. একটি প্রয়োজনীয় প্রতিজ্ঞা (Lemma): যদি একটি কার্য্য **m-সংখ্যক** বিভিন্ন উপায়ে বা প্রক্রিয়ায় নিষ্পন্ন করা যায়, এবং ঐ m-সংখ্যক উপায়ের যে-কোন এক উপায়ে কার্য্যটি নিষ্পন্ন করা হইলে, যদি দ্বিতীয় একটি কার্য্য **n-সংখ্যক** বিভিন্ন উপায়ে বা প্রক্রিয়ায় নিষ্পন্ন করা যায়, তাহা হইলে কার্য্য দুইটি, প্রথমটির পরে দ্বিতীয়টি $\mathbf{m \times n}$ বিভিন্ন উপায়ে বা প্রক্রিয়ায় নিষ্পন্ন করা যায়। আবার, এই $m \times n$ বিভিন্ন উপায়ের যে-কোন এক উপায়ে প্রথম কার্য্য দুইটি নিষ্পন্ন হইলে, যদি তৃতীয় একটি কার্য্য **p-সংখ্যক** বিভিন্ন উপায়ে বা প্রক্রিয়ায় নিষ্পন্ন করা যায়, তাহা হইলে, কার্য্য তিনটি পর পর, $\mathbf{m \times n \times p}$ বিভিন্ন উপায়ে বা প্রক্রিয়ায় নিষ্পন্ন করা যায় এবং এইরূপে অগ্রসর হইলে যে-কোন সংখ্যক কার্য্য পর পর,

$$\mathbf{m \times n \times p \times \cdots}$$

বিভিন্ন উপায়ে বা প্রক্রিয়ায় নিষ্পন্ন করা যায়।

(If there are **m** different ways of doing a thing, and when it is done in any of the m ways if there are **n** different ways of doing a second, then the two may be done one after another in $\mathbf{m \times n}$ different ways; again when the first two have been done in any of the $m \times n$ different ways, if there are **p** ways of doing a third, and so on, then the total number of ways in which all of them may be done, one after another, is $\mathbf{m \times n \times p \times \cdots\cdots}$).

নিম্নে প্রদত্ত উদাহরণ দুইটি দ্বারা উপরিউক্ত প্রতিজ্ঞাটির ব্যাখ্যা করা হইতেছে:

উদা. 1. Suppose there are five routes for going from a place A to another place B and six routes for going from B to a third place C. Find in how many different ways can a person go from A to C via B.

A হইতে B তে যাইবার পাঁচটি বিভিন্ন পথ আছে; সুতরাং A হইতে B তে

পাঁচটি বিভিন্ন উপায়ে যাওয়া যাইতে পারে, অর্থাৎ, A হইতে B তে যাইবার কার্য্যটি পাঁচটি বিভিন্ন উপায়ে নিষ্পন্ন করা যাইতে পারে। এই পাঁচ উপায়ের যে-কোন এক উপায়ে A হইতে B তে যাইবার কার্য্যটি নিষ্পন্ন হইবার পর, B হইতে C তে যাইবার ছয়টি বিভিন্ন পথ আছে বলিয়া ছয়টি বিভিন্ন উপায়ে B হইতে C তে যাইবার কার্য্যটি নিষ্পন্ন হইতে পারে। তাহা হইলে, দেখা যাইতেছে,

A হইতে B তে যাইবার প্রতিটি উপায়ের জন্য B হইতে C তে যাইবার ছয়টি উপায় আছে ; এখন, A হইতে B তে যাইবার পাঁচটি উপায় আছে ;

$\therefore$ A হইতে B হইয়া C তে যাইবার $6+6+6+6+6=30$টি উপায়

$=$ (প্রথম অংশের পথের সংখ্যা) $\times$ (দ্বিতীয় অংশের পথের সংখ্যা) উপায়।

সাধারণভাবে, যদি একটি কার্য্য m-সংখ্যক বিভিন্ন উপায়ে নিষ্পন্ন করা যায়, এবং ঐ m-সংখ্যক উপায়ের যে-কোন এক উপায়ে কার্য্যটি নিষ্পন্ন হইলে, দ্বিতীয় একটি কার্য্য n-সংখ্যক বিভিন্ন উপায়ে নিষ্পন্ন করা যায়, তাহা হইলে, অনুরূপ যুক্তি দ্বারা প্রমাণ করা যায় যে, কার্য্য দুইটি $m \times n$ বিভিন্ন উপায়ে নিষ্পন্ন করা যাইতে পারে।

সাধারণভাবে, অনুরূপ যুক্তি দ্বারা প্রমাণ করা যায় যে, যদি একটি কার্য্য m-সংখ্যক বিভিন্ন উপায়ে নিষ্পন্ন করা যায় এবং ঐ m-সংখ্যক বিভিন্ন উপায়ের যে-কোন এক উপায়ে কার্য্যটি নিষ্পন্ন হইলে, যদি দ্বিতীয় একটি কার্য্য n-সংখ্যক বিভিন্ন উপায়ে নিষ্পন্ন করা যায়, তাহা হইলে, কার্য্য দুইটি প্রথমটির পরে দ্বিতীয়টি $\mathbf{m \times n}$-সংখ্যক বিভিন্ন উপায়ে নিষ্পন্ন করা যায় ; আবার এই $m \times n$-সংখ্যক উপায়ের যে-কোন এক উপায়ে প্রথম কার্য্য দুইটি নিষ্পন্ন হইলে, যদি তৃতীয় একটি কার্য্য $\mathbf{p}$ বিভিন্ন উপায়ে নিষ্পন্ন করা যায় ; তাহা হইলে কার্য্য তিনটি পর পর, $\mathbf{m \times n \times p}$ বিভিন্ন উপায়ে নিষ্পন্ন করা যায়।

উদা. 2. Find the number of different ways in which four persons can be accommodated in three different chairs.

চারিজন লোকের যে-কোন একজন তিনখানা চেয়ারের প্রথম খানাতে বসিতে পারে ; এক এক জন বসিলে এক একটি ভিন্ন উপায়ে প্রথম চেয়ারখানি পূর্ণ করা হইবে ; সুতরাং প্রথম চেয়ারখানি চারিটি বিভিন্ন উপায়ে পূর্ণ করা যায়। এখন, প্রথম চেয়ারখানি এই চারিটি বিভিন্ন উপায়ের যে-কোন এক উপায়ে পূর্ণ করা হইলে, অর্থাৎ চারিটি লোকের যে-কোন একজন প্রথম

চেয়ারখানিতে বসিলে, আর তিনজন লোক অবশিষ্ট থাকে। এই তিনজন লোকের যে-কোন একজন দ্বিতীয় চেয়ারখানিতে বসিতে পারে বলিয়া, প্রথম চেয়ারখানি চারিটি বিভিন্ন উপায়ের যে-কোন এক উপায়ে পূর্ণ করা হইলে, দ্বিতীয় চেয়ারখানি তিনটি বিভিন্ন উপায়ে পূর্ণ হইতে পারে ; এবং প্রথম চেয়ারখানিকে পূর্ণ করিবার চারিটি বিভিন্ন উপায়ের সহিত দ্বিতীয় চেয়ারখানিকে পূর্ণ করিবার তিনটি বিভিন্ন উপায় সংযুক্ত করা যায় বলিয়া, প্রথম চেয়ার দুইখানিকে 4×3টি বিভিন্ন উপায়ে পূর্ণ করা যায়।

আবার, প্রথম চেয়ার দুইখানিকে 4×3টি বিভিন্ন উপায়ের যে-কোন এক উপায়ে পূর্ণ করিবার পরে আর দুইজন লোক অবশিষ্ট থাকে ; সুতরাং, প্রথম চেয়ার দুইখানিকে 4×3 উপায়ের যে-কোন এক উপায়ে পূর্ণ করিলে, তৃতীয় চেয়ারখানিকে দুই উপায়ে পূর্ণ করা যাইতে পারে। এখন, প্রথম চেয়ার দুইখানিকে 4×3 উপায়ে পূর্ণ করিবার প্রত্যেক উপায়ের সহিত তৃতীয় চেয়ারখানিকে দুই উপায়ে পূর্ণ করিবার প্রত্যেক উপায় সংযুক্ত করা যায় বলিয়া, চারিটি লোক তিনখানা চেয়ারে মোট $4\times3\times2$ বা 24টি বিভিন্ন উপায়ে বসিতে পারে।

বিশেষ দ্রষ্টব্য : লোক চারিটিকে a, b, c, d নাম দিলে যে 24টি বিভিন্ন উপায়ে শূন্য চেয়ার তিনখানি পূর্ণ করা যায় তাহারা হইতেছে :

abc, abd, acb, acd, adb, adc,
bac, bad, bca, bcd, bda, bdc,
cab, cad, cba, cbd, cda, cdb,
dab, dac, dba, dbc, dca, dcb.

আবার, চারিটি বিভিন্ন বস্তু $a, b, c; d$ হইতে তিনটি তিনটি করিয়া লইয়া বিন্যাস গঠন করিলে, অর্থাৎ, চারিটি বিভিন্ন বস্তু a, b, c, d হইতে তিনটি তিনটি করিয়া বস্তু সম্ভাব্য সকল প্রকারে লইয়া সম্ভাব্য সকল প্রকার বিভিন্ন ক্রমে সাজাইলে, উপরের 24টি বিভিন্ন ক্রমই পাওয়া যায়। সুতরাং, চারিটি বিভিন্ন বস্তু হইতে তিনটি তিনটি করিয়া লইবার বিন্যাস-সংখ্যা ও যত বিভিন্ন উপায়ে চারিটি বিভিন্ন বস্তু দ্বারা তিনটি শূন্য স্থান পূর্ণ করা যাইতে পারে, তাহাদের সংখ্যা একই। সাধারণভাবে, বলা যাইতে পারে :

n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে r-সংখ্যকটি করিয়া লইয়া বিন্যাস-সংখ্যা ও যত বিভিন্ন উপায়ে n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু দ্বারা r-সংখ্যক শূন্যস্থান পূর্ণ করা যাইতে পারে, তাহাদের সংখ্যা একই।

2·4. r-সংখ্যকটি করিয়া লইয়া, n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুর বিন্যাস-সংখ্যা নির্ণয় [*To find the number of permutations of n dissimilar things taken r at a time.*]

পূর্ব্বেই বলা হইয়াছে যে, r-সংখ্যকটি করিয়া লইয়া, n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুর বিন্যাস-সংখ্যা এবং n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু দ্বারা r-সংখ্যক স্থান যে সকল বিভিন্ন উপায়ে পূর্ণ করা যায় তাহাদের সংখ্যা একই।

n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুর যে-কোন একটিকেই প্রথম স্থানে রাখা যায় বলিয়া, প্রথম স্থানটি **n-সংখ্যক** বিভিন্ন উপায়ে পূর্ণ করা যায়।

প্রথম স্থানটিকে n-সংখ্যক বিভিন্ন উপায়ের যে-কোন এক উপায়ে পূর্ণ করা হইলে, অর্থাৎ, n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুর যে-কোন একটিকে প্রথম স্থানে রাখিলে, $(n-1)$-সংখ্যক বস্তু অবশিষ্ট থাকে, এবং এই $(n-1)$-সংখ্যক বস্তুর যে-কোন একটিকেই দ্বিতীয় স্থানে রাখা যায় বলিয়া, দ্বিতীয়টি **(n − 1)-সংখ্যক** বিভিন্ন উপায়ে পূর্ণ করা যায়।

এখন, প্রথম স্থানটিকে পূর্ণ করিবার n-সংখ্যক বিভিন্ন উপায়ের প্রত্যেক উপায়ের সহিত দ্বিতীয় স্থানটিকে পূর্ণ করিবার $(n-1)$-সংখ্যক বিভিন্ন উপায় সংযুক্ত করা যায় বলিয়া, প্রথম দুইটি স্থানকে **n(n − 1)**-সংখ্যক বিভিন্ন উপায়ে পূর্ণ করা যায়।

প্রথম স্থান দুইটিকে এই $n(n-1)$ বিভিন্ন উপায়ের যে-কোন এক উপায়ে পূর্ণ করা হইলে, $(n-2)$-সংখ্যক বস্তু অবশিষ্ট থাকে, এবং এই $(n-2)$-সংখ্যক বস্তুর যে-কোন একটিকেই তৃতীয় স্থানে রাখা যায় বলিয়া, তৃতীয় স্থানটি **(n − 2)-সংখ্যক** বিভিন্ন উপায়ে পূর্ণ করা যায়। এই $(n-2)$-সংখ্যক বিভিন্ন উপায়ের প্রত্যেক উপায়ের সহিত প্রথম দুইটি স্থান পূর্ণ করিবার $n(n-1)$ বিভিন্ন উপায়ের প্রত্যেকটি উপায় সংযুক্ত করা যায় বলিয়া, প্রথম তিনটি স্থান **n(n − 1)(n − 2)** বিভিন্ন উপায়ে পূর্ণ করা যায়।

অনুরূপ যুক্তি দ্বারা প্রমাণ করা যায় যে, প্রথম তিনটি স্থান পূর্ণ করিবার $n(n-1)(n-2)$-সংখ্যক বিভিন্ন উপায়ের প্রত্যেকটির সহিত চতুর্থ স্থান পূর্ণ করিবার **(n − 3)-সংখ্যক** বিভিন্ন উপায়ের প্রত্যেকটিকে সংযুক্ত করা যায়। অতএব, প্রথম চারিটি স্থান যে সকল বিভিন্ন উপায়ে পূর্ণ করা যায় তাহাদের সংখ্যা হইতেছে **n(n − 1)(n − 2)(n − 3).**

স্পষ্টই দেখা যাইতেছে,

(1) স্থানগুলি পূর্ণ করিবার বিভিন্ন উপায়ের মোট সংখ্যা হইতেছে **যতগুলি** স্থান পূর্ণ করা হয় **ততগুলি** গুণকের গুণফলের সমান ;

(2) গুণকগুলি এরূপ একটি সমান্তর-শ্রেণী যাহার প্রথম পদ n, এবং সাধারণ অন্তর -1.

এই নিয়ম অনুসারে, r-সংখ্যক স্থান পূর্ণ করিবার বিভিন্ন উপায়সমূহের মোট সংখ্যা

$= n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots\cdots r$-তম উৎপাদক পর্যন্ত

$= n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots\cdots\{n-(r-1)\}$

$= n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots\cdots(n-r+1).$

অতএব, r-সংখ্যকটি করিয়া লইয়া, n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুর বিন্যাস-সংখ্যা

$$= \mathbf{n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots(n-r+1).}$$

দ্রষ্টব্য ঃ ইহা সুস্পষ্ট যে, n ও r উভয়ই **ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা,** এবং $r \leqslant n$. (r, n অপেক্ষা বৃহত্তর নহে, হয় n এর সমান, বা n অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর।)

অনুসি. 1. n-সংখ্যক বস্তুর সবগুলি লইয়া গঠিত বিন্যাসের মোট সংখ্যা

$= n(n-1)(n-2)\cdots\cdots n$-সংখ্যক উৎপাদক পর্যন্ত

$= n(n-1)(n-2)\cdots\cdots 3.2.1$

$=1$ হইতে আরম্ভ করিয়া n পর্যন্ত সবগুলি পূর্ণ সংখ্যার ক্রমিক গুণফল, বা n হইতে আরম্ভ করিয়া 1 পর্যন্ত সবগুলি পূর্ণ সংখ্যার গুণফল।

এই গুণফলটিকে $\lfloor\mathbf{n}$ বা $\mathbf{n\,!}$ প্রতীক দ্বারা সূচিত করা হয় এবং প্রতীকটিকে ফ্যাক্টরিয়াল n (factorial n) রূপে পড়া হয়।

অতএব, $\lfloor n = 1.2.3\ldots\ldots n$, বা $n(n-1)(n-2)\ldots\ldots 3.2.1.$

এইরূপ, $\lfloor 5 = 5.4.3.2.1$;

$\lfloor 7 = 7.6.5.4.3.2.1.$

আবার, $\lfloor n = n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\cdots\cdots 3.2.1$

$= n\lfloor n-1 = n(n-1)\lfloor n-2$, ইত্যাদি।

অনুসি. 2. r-সংখ্যকটি করিয়া লইয়া, n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুর মোট বিন্যাস-সংখ্যাকে $\mathbf{{}^nP_r}$ প্রতীকটি দ্বারা সূচিত করা হয়।

$\therefore\ \mathbf{{}^nP_r = n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots\cdots(n-r+1)}$;

এবং $\mathbf{{}^nP_n = n(n-1)(n-2)(n-3)\cdots\cdots 3.2.1. = \lfloor n.}$

আবার, $^nP_r = n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)$

$$= n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1) \times \frac{(n-r)(n-r-1)\cdots 3.2.1}{(n-r)(n-r-1)\cdots 3.2.1}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)(n-r)(n-r-1)\cdots\cdots 3.2.1}{(n-r)(n-r-1)\cdots\cdots 3.2.1.}$$

$$= \frac{1 \text{ হইতে } n \text{ পর্য্যন্ত পূর্ণ সংখ্যাগুলির ক্রমিক গুণফল}}{1 \text{ হইতে } (n-r) \text{ পর্য্যন্ত পূর্ণ সংখ্যাগুলির ক্রমিক গুণফল}}$$

$$= \frac{\lfloor n}{\lfloor n-r}.$$

দ্রষ্টব্য : $^nP_n = n(n-1)\cdots\cdots 3.2.1$

আর, $^nP_{n-1} = n(n-1)\cdots\cdots 3.2. \quad \therefore \ ^nP_n = {}^nP_{n-1}.$

স্পষ্টই, $r = n$, অথবা, $n-1$ হইলে, ^nP_r এর মান চরম হইবে।

অনুসি. 3. $\lfloor 0$ প্রতীকটির অর্থ।

অনুসি. 2 হইতে,

$$^nP_n = \frac{\lfloor n}{\lfloor n-n} = \frac{\lfloor n}{\lfloor 0}\text{; কিন্তু } ^nP_n = \lfloor n\text{;}$$

$$\therefore \quad \lfloor n = \frac{\lfloor n}{\lfloor 0}, \text{ বা, } \lfloor 0 - \frac{\lfloor n}{\lfloor n} = 1.$$

দ্রষ্টব্য : $\lfloor n$ এর সংজ্ঞা হইতে স্পষ্টই বুঝা যায় যে, $\lfloor 0$ অর্থহীন ; অতএব, $\lfloor 0$ কে 1 মানবিশিষ্ট একটি প্রতীকরূপে গণ্য করিতে হইবে।

2·5. r-সংখ্যকটি করিয়া লইয়া n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুর বিন্যাস গঠন করিলে, এই সকল বিন্যাসের যেগুলিতে একটি নির্দ্দিষ্ট বস্তু থাকে সেইগুলির সংখ্যা নির্ণয় [To find the total number of permutations of n dissimilar things taken r at a time, in which a particular thing always occurs.]

n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুকে $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots\ldots a_n$ দ্বারা সূচিত কর। ইহাদের r-সংখ্যকটি করিয়া লইয়া বিভিন্ন বিন্যাস গঠন করা হইলে, সেই সকল বিন্যাসের যতগুলিতে একটি নির্দ্দিষ্ট বস্তু, মনে কর, a_1, থাকে তাহাদের সংখ্যা নির্ণয় করিতে হইবে।

a_1 বস্তুটিকে পৃথক্ করিয়া রাখিয়া অবশিষ্ট $(n-1)$-সংখ্যক বস্তু হইতে $(r-1)$-সংখ্যকটি লইয়া বিন্যাস গঠন করিলে $^{n-1}P_{r-1}$-সংখ্যক বিন্যাস পাওয়া

যাইবে। এখন এই সকল বিন্যাসের প্রত্যেকটিরই প্রথমে আলাদা করিয়া রাখা a_1 বস্তুটি স্থাপন করা যায় বলিয়া, স্পষ্টই

(1) ${}^{n-1}P_{r-1}$-সংখ্যক বিন্যাসগুলির প্রত্যেকটিই r-সংখ্যক বস্তুবিশিষ্ট হইবে ;

এবং (2) এই সকল বিন্যাসগুলির প্রথমে a_1 থাকিবে ;

অতএব, n-সংখ্যক বস্তু হইতে r-সংখ্যক লইয়া বিন্যাস গঠন করিলে, যাহাদের **প্রথমে** a_1 থাকে তাহাদের সংখ্যা ${}^{n-1}P_{r-1}$.

অনুরূপ যুক্তি সাহায্যে প্রমাণ করা যায় যে, n-সংখ্যক বস্তু হইতে r-সংখ্যকটি লইয়া বিন্যাস গঠন করিলে, যে বিন্যাসগুলির **দ্বিতীয়** স্থানে a_1 থাকে তাহাদের সংখ্যাও ${}^{n-1}P_{r-1}$, যে বিন্যাসগুলির **তৃতীয়** স্থানে a_1 থাকে তাহাদের সংখ্যাও ${}^{n-1}P_{r-1}$.

এইরূপে ঐ বিন্যাসগুলির চতুর্থ, পঞ্চম প্রভৃতি যেস্থানেই a_1 থাকুক না কেন, প্রতিবারেই বিন্যাস-সংখ্যা হইবে ${}^{n-1}P_{r-1}$. এখন, এইরূপ r-সংখ্যক স্থানে a_1 কে বসানো যায় বলিয়া, নির্ণেয় বিন্যাস-সংখ্যা $= r.{}^{n-1}P_{r-1}$.

অনুসি.। স্পষ্টই ঐ সকল বিন্যাসের যেগুলিতে একটি নির্দ্দিষ্ট বস্তু কখনই থাকে না সেগুলির সংখ্যা $= {}^{n-1}P_r$.

অতএব, $\mathbf{{}^nP_r = {}^{n-1}P_r + r.{}^{n-1}P_{r-1}}$.

2·6. অনু. 2.4 এ প্রতিপন্ন উপপাদ্যের **বিকল্প প্রমাণ:** r-সংখ্যকটি করিয়া লইয়া n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুর বিন্যাস-সংখ্যা নির্ণয়।

বিভিন্ন বস্তুসমূহকে $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots a_n$ দ্বারা সূচিত করা হইল।

বিন্যাসগুলি পর্য্যালোচনা করিলে দেখা যায়, উহাদিগকে প্রথম স্থানে a_1 বস্তুবিশিষ্ট বিন্যাসগুলির দলে, প্রথম স্থানে a_2 বস্তুবিশিষ্ট বিন্যাসগুলির দলে, ইত্যাদিরূপে বিভিন্ন দলে বিভক্ত করিয়া রাখা যায় ; অতএব,

নির্ণেয় বিন্যাসগুলির সংখ্যা, অর্থাৎ

${}^nP_r$ = প্রথম স্থানে a_1 বস্তুবিশিষ্ট বিন্যাসগুলির সংখ্যা
+ " " a_2 " " " "
+ " " a_3 " " " "
... ...
+ " " a_n " " " "

এখন, প্রথম স্থানে a_1 বস্তুবিশিষ্ট বিন্যাসগুলির সংখ্যা $= {}^{n-1}P_{r-1}$

= " " a_2 " " " " "

= " " a_3 " " " " "

... ...

= " " a_n " " " " "

অতএব, বস্তুগুলির সংখ্যা n বলিয়া,

$${}^nP_r = n \times {}^{n-1}P_{r-1} ;$$

অনুরূপ যুক্তি-সাহায্যে প্রমাণ করা যায়,

$${}^{n-1}P_{r-1} = (n-1) \times {}^{n-2}P_{r-2} ;$$

$${}^{n-2}P_{r-2} = (n-2) \times {}^{n-3}P_{r-3} ;$$

... ...

$${}^{n-r+2}P_2 = (n-r+2) \times {}^{n-r+1}P_1$$

এবং $${}^{n-r+1}P_1 = (n-r+1).$$

$\therefore$ স্তম্ভক্রমে গুণ করিয়া এবং উভয় পক্ষ হইতে সাধারণ গুণনীয়কগুলি অপসারণ করিয়া,

$${}^nP_r = n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+2)(n-r+1).$$

উদা. 1. Find the value of ${}^6P_4$.

${}^6P_4$ = 4টি করিয়া লইয়া 6টি বস্তুর বিন্যাস-সংখ্যা

$= 6.5.4.3 = \mathbf{360}.$

উদা. 2. How many numbers can be formed taking only 3 out of the 5 digits 1, 2, 3, 4, 5 ?

প্রদত্ত 5টি অঙ্ক হইতে 3টি করিয়া লইয়া বিভিন্নক্রমে সাজাইলে প্রত্যেক-বারই একটি নূতন সংখ্যা পাওয়া যায় বলিয়া, নির্ণেয় সংখ্যাগুলির সংখ্যা

= 3টি করিয়া লইয়া 5টি বস্তুর বিন্যাস-সংখ্যা

$= {}^5P_3 = 5.4.3 = \mathbf{60}.$

উদা. 3. If ${}^nP_4 : {}^nP_6 = 1 : 2$, find n.

$\frac{{}^nP_4}{{}^nP_6} = \frac{1}{2}$, বা, $2.{}^nP_4 = {}^nP_6$;

$$\therefore \; 2n(n-1)(n-2)(n-3) = n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5).$$

n-ঘটিত এই সমীকরণটির $n = 0, 1, 2, 3$ কোন সমাধান হইতে পারে না, কারণ 1, 2 অথবা 3টি বস্তু হইতে 4টি অথবা 6টি করিয়া লইয়া বিন্যাস-গঠন

অর্থহীন; অতএব, উভয় পক্ষ হইতে $n(n-1)(n-2)(n-3)$ সাধারণ গুণনীয়ক-গুলি অপসারণ করিয়া, $(n-4)(n-5)=2.$

বা, $n^2-9n+18=0$, বা $(n-3)(n-6)=0$;

$\therefore\ n=3$, বা, 6.

কিন্তু n এর 3 মানটি অগ্রহণীয় বলিয়া (কারণ উপরে বিবৃত হইয়াছে) বর্জ্জন করিয়া, $\mathbf{n=6}$.

উদা. 4. Prove that $\lfloor 2n = 2^n.1.3.5\ldots\ldots(2n-1)\lfloor n$.

$$\begin{aligned}\lfloor 2n &= 1.2.3.4.5\ldots\ldots(2n-1).2n\\ &= \{1.3.5\ldots\ldots(2n-1)\}\times(2.4.6\ldots\ldots2n)\\ &= 1.3.5\ldots\ldots(2n-1)\times\{(2.1)(2.2).(2.3)\ldots\ldots(2.n)\}\\ &= 1.3.5\ldots\ldots(2n-1).2^n.(1.2.3\ldots\ldots n)\\ &= 2^n.1.3.5\ldots\ldots(2n-1)\lfloor n.\end{aligned}$$

উদা. 5. Of the different words that can be formed from the letters of the word *courtesy*, how many will begin with c and end with y?

8টি বিভিন্ন অক্ষর c, o, u, r, t, e, s, y আছে। শব্দসমূহের আদিতে এবং অন্তে সর্ব্বদাই c এবং y থাকিবে বলিয়া, অন্তর্ব্বর্ত্তী 6টি অক্ষরকে উহাদের সবগুলিকে লইয়া যত বিভিন্ন উপায়ে সাজানো যায় ততগুলিই শব্দ হইবে।

$\therefore$ নির্ণেয় শব্দ-সংখ্যা $= {}^6P_6 = 6.5.4.3.2.1 = \mathbf{720}$.

উদা. 6. In how many ways can the 7 letters A, B, C, D, E, F, G be arranged so that B and C may always occupy contiguous positions?

B এবং C সর্ব্বদাই একসঙ্গে থাকিবে বলিয়া, উহাদিগকে B এর পরে C কে একটি বন্ধন-ভুক্ত করিয়া রাখ এবং এই বন্ধনী-ভুক্ত (BC) কে একটি বস্তু মনে করিয়া, $A, (BC), D, E, F, G$

এই 6টি বিভিন্ন বস্তুকে সবগুলি একসঙ্গে লইয়া নিজেদের মধ্যে কত বিভিন্ন উপায়ে সাজানো যাইতে পারে তাহা নির্ণয় করিতে হইবে।

স্পষ্টই এইরূপ বিন্যাস-সংখ্যা $= {}^6P_6 = \lfloor 6 = 6.5.4.3.2.1 = 720$.

এই 720টি বিন্যাসের প্রত্যেকটিতে B এবং C একসঙ্গে আছে, কিন্তু B এর পরে C আছে। C এর পরে B থাকিয়াও উহারা একসঙ্গে থাকিতে পারে। অনুরূপ উপায়ে প্রমাণ করা যায় যে, এইরূপ বিন্যাস-সংখ্যাও 720.

$\therefore$ প্রদত্ত 7টি অক্ষর দ্বারা বিভিন্ন বিন্যাস গঠন করিলে, তাহাদের মধ্যে যতগুলিতে B এবং C পাশাপাশি থাকিবে তাহাদের সংখ্যা $= 2 \times 720 = \mathbf{1440}$.

উদা. 7. In how many ways can the letters of the word *valedictory* be arranged so that the vowels may never be separated ?

স্বরবর্ণগুলি সর্ব্বদা একসঙ্গে থাকিবে বলিয়া, উহাদিগকে যে-কোন ক্রমে, ধরা যাক a, তারপরে e, তারপরে i এবং তারপরে o এই ক্রমে সাজাইয়া একটি বন্ধনী-ভুক্ত করিয়া রাখিলে, 8টি বিভিন্ন বস্তু $v, l, d, c, t, r, y, (aeio)$ পাওয়া যায়। ইহাদের সবগুলি লইয়া সম্ভাব্য সকল প্রকারে নিজেদের মধ্যে সাজাইলে, যে সকল বিন্যাস পাওয়া যায় তাহাদের সংখ্যা

$$= {}^8P_8 = \underline{|8} = 8.7.6.5.4.3.2.1 = 40320.$$

এই বিন্যাসগুলিতে স্বরবর্ণগুলি একসঙ্গে এবং a, e, i, o এই ক্রমে আছে। কিন্তু উহারা যে-কোন ক্রমে থাকিয়াও একসঙ্গে থাকিতে পারে, এবং অনুরূপ যুক্তি-সাহায্যে প্রমাণ করা যায় যে, স্বরবর্ণসমূহের যে-কোন ক্রমের জন্যই মোট বিন্যাস-সংখ্যা হইবে 40320. এখন স্বরবর্ণগুলির সংখ্যা 4 বলিয়া, উহাদিগকে $\underline{|4}$ বা 24টি বিভিন্ন উপায়ে বা ক্রমে নিজেদের মধ্যে সাজানো যাইতে পারে। অতএব, প্রতি ক্রমের জন্য মোট বিন্যাস-সংখ্যা 40320 হয় বলিয়া,

$$\text{নির্ণেয় বিন্যাস-সংখ্যা} = 40320 \times 24 = \mathbf{967680}.$$

দ্রষ্টব্য : যদি বলা হইত যে স্বরবর্ণগুলি কেবলমাত্র পাশাপাশি থাকিবে না, অধিকন্তু তাহারা পরস্পরের সম্পর্কে কোন নির্দ্দিষ্ট অবস্থানে থাকিবে, তাহা হইলে নির্ণেয় বিন্যাস-সংখ্যা হইত 40320.

উদা. 8. Find the number of ways in which the letters of the word *machine* can be arranged such that the vowels may occupy only odd positions.

এস্থলে, 7টি বর্ণের মধ্যে 4টি ব্যঞ্জনবর্ণ এবং 3টি স্বরবর্ণ ; 7টি স্থানের মধ্যে স্বরবর্ণ তিনটিকে প্রথম, তৃতীয়, পঞ্চম ও সপ্তম এই চারিটি অযুগ্ম-সংখ্যক স্থানের যে-কোন তিনটিতে বসাইতে হইবে। স্পষ্টই, স্বরবর্ণ তিনটিকে ${}^4p_3$ বা $4 \times 3 \times 2$, বা 24টি বিভিন্ন উপায়ে অযুগ্ম-সংখ্যক স্থানগুলিতে বসানো যাইতে পারে। এখন স্বরবর্ণ তিনটিকে যে-কোন এক উপায়ে সাজাইলে, যে চারিটি স্থান অবশিষ্ট থাকে সেই চারিটি স্থানে ব্যঞ্জনবর্ণ চারিটিকে ${}^4P_4$ বা $\underline{|4}$ বা

24টি বিভিন্ন উপায়ে বসানো যাইতে পারে। অতএব, স্বরবর্ণ তিনটিকে 24টি উপায়ে অযুগ্ম-সংখ্যক স্থানগুলিতে বসানো যায় বলিয়া,

নির্ণেয় বিন্যাস-সংখ্যা $= 24 \times 24 = \mathbf{576}$.

উদা. 9. You are given 8 balls of different colours (black, white, red, yellow, green, blue, indigo, violet); in how many ways can you arrange them in a row so that the black and white balls may never come together?

আটটি বলকে একসঙ্গে লইয়া বিন্যাস গঠন করিলে মোট বিন্যাস-সংখ্যা হইবে $^8P_8$ বা $\underline{|8}$. উদা. 6 এর অনুরূপ যুক্তি-সাহায্যে প্রমাণ করা যায় যে, এই সকল বিন্যাসের যেগুলিতে কালো এবং সাদা বল দুইটি একসঙ্গে থাকিবে তাহাদের সংখ্যা হইতেছে $2 \times {}^7P_7$ বা $2 \times \underline{|7}$.

অতএব, যে সকল বিন্যাসে উহারা একসঙ্গে থাকিবে না তাহাদের সংখ্যা,

$$= \underline{|8} - 2 \times \underline{|7} = 8 \times \underline{|7} - 2 \times \underline{|7}$$

$$= (8-2)\underline{|7} = 6 \times 7.6.5.4.3.2.1 = \mathbf{30240}.$$

উদা. 10. In how many of the permutations of 7 things taken 3 at a time will one particular thing (i) never occur, (ii) always occur.

(i) নির্দ্দিষ্ট বস্তুটি পৃথক্ করিয়া রাখিয়া এবং ইহার জন্য কোন স্থান না রাখিয়াই, অবশিষ্ট $(7-1)$ বা ছয়টি বস্তু হইতে তিনটি করিয়া লইয়া বিন্যাস গঠন করিলে যে বিন্যাসগুলি পাওয়া যাইবে তাহাদের একটিতেও নির্দ্দিষ্ট বস্তুটি থাকিবে না।

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা $= {}^6p_3 = 6 \times 5 \times 4 = \mathbf{120}$.

(ii) সাতটি বস্তু হইতে 3টি করিয়া লইয়া বিন্যাস রচনা করিলে মোট বিন্যাস-সংখ্যা হইবে $^7p_3$ বা $7 \times 6 \times 5$ বা 210টি। এখন 120টি বিন্যাসে নির্দ্দিষ্ট বস্তুটি থাকিবে না; অতএব, যে সকল বিন্যাসে নির্দ্দিষ্ট বস্তুটি থাকিবে তাহাদের সংখ্যা $= 210 - 120 = \mathbf{90}$.

উদা. 11. How many even numbers can be formed by taking only 3 out of the 5 digits 1, 2, 3, 4, 5?

সংখ্যাগুলি যুগ্ম বলিয়া, উহাদের শেষে অর্থাৎ এককের স্থানে 2 অথবা 4 থাকিবে।

2 কে এককের স্থানে রাখিয়া দিয়া অবশিষ্ট $(5-1)$ বা 4টি অঙ্ক দ্বারা অবশিষ্ট $(3-1)$ বা 2টি স্থান পূর্ণ করিয়া বিভিন্ন বিন্যাস রচনা করিলে, যে সকল

সংখ্যা পাওয়া যাইবে তাহাদের শেষে 2 থাকিবে। অতএব, যে সকল সংখ্যার শেষে 2 থাকিবে তাহাদের সংখ্যা $= {}^4P_2 = 4 \times 3 = 12$.

এইরূপে, 4 কে এককের স্থানে রাখিলেও মোট 12টি সংখ্যা পাওয়া যাইবে।

$\therefore$ মোট যুগ্ম-সংখ্যা 12×2 বা 24টি।

প্রশ্নমালা 6

1. Find the values of :

$${}^{10}p_6,\ {}^{12}p_8,\ \lfloor 6,\ 8\,!,\ \frac{\lfloor 10}{\lfloor 7}.$$

2. Two persons go into a railway carriage where there are six vacant seats. In how many different ways can they set themselves ? [Calcutta, 1910]

3. Find the number of permutations of the letters of the word *Naresh* taken all together. [Calcutta, 1918]

4. In how many other ways can the letters of the word *dogmatic* be re-arranged ?

5. Eight buses run between Calcutta and Dum Dum Airport. In how many different ways can a man go from Calcutta to Dum Dum Airport by a bus and return, always selecting a different bus for his return journey ?

6. A man chooses 7 different professions for his 4 sons. In how many different ways can the sons take up the professions, if no two of them enter the same profession ?

7. There are 22 stations on the Calcutta-Ranaghat line of the Sealdah division of Eastern Railway. How many different kinds of single third class tickets will be necessary so that it may be possible to book from any one station to another ?

[ইঙ্গিত : প্রত্যেক station এ 21 রকম টিকেট থাকিবে।]

8. (*a*) If ${}^nP_4 = 12 \times {}^nP_2$, find n.

(*b*) If ${}^{20}P_r = 13 \times {}^{20}P_{r-1}$, find r.

(*c*) If ${}^{n-1}P_4 : {}^{n+1}P_4 = 1 : 3$, find n.

(*d*) If ${}^{2n+1}P_{n-1} : {}^{2n-1}P_n = 3 : 5$, find n.

(*e*) If ${}^{m-2n}P_2 = 12$ and ${}^{m+2n}P_2 = 132$, find m and n.

9. How many different signals may be formed by means of 12 different flags which can be hoisted 4 at a time above each other ?

10. In how many of the permutations of 10 things taken 4 at a time will one particular thing (i) always, (ii) never occur.

[Calcutta, 1936]

11. In how many ways can the letters of the word *Bengal* be arranged ? How many of these arrangements begin with B ? How many of these arrangements begin with B and end with l ? How many of these arrangements do not begin with B ? How many of these arrangements begin with B but do not end with l ?

12. There are m men and n monkeys, n being greater than m ; find the number of ways in which each man may become the owner of one monkey.

13. The first year class in a certain college consists of 10 students of whom one is a Mahomedan, one a Christian and the rest are Hindus ; in how many ways can the students be arranged in a row if the Mahomedan and the Christian students have always to occupy extreme positions ?

14. In how many of the permutations of n different things taken all at a time 2 particular things will always be together ?

15. Find how many words can be formed of the letters of the word *Failure*, the four vowels always coming together.

[Calcutta, 1940]

16. Find how many words can be formed of the letters of the word *Daughter*, the vowels not being separated. [Calcutta, 1946]

17. You are given a gold mohar, a rupee, an eight-anna piece, a four-anna piece, a two-anna piece, a pice and a half-pice ; in how many ways can you arrange them in a line so that the copper coins may always stand in odd positions.

18. Find how many different words can be formed with five given letters, of which three are consonants and two are vowels, no two consonants being juxtaposed in any word.

[Calcutta, 1929]

19. Find the number of words beginning with a consonant and ending with a vowel which can be formed out of the letters in the name of our great philosopher *Brojen Sil*.

20. You are given a copy of each of the following books :

Todhunter's Algebra, Hamblin Smiths' Trigonometry, Tagore's Gitanjali, Bibhutibhusan's Patherpanchali, K. P. Basu's Geometry, Shakespeare's Hamlet, Fowler's Logic, Raghuvansam. In how many ways can you arrange these books on a shelf so that the mathematical books may always be put together.

21. In the preceding example, in how many ways can the books be arranged so that the books on literature also may be put together.

22. There are three works each of 2 volumes and two works each of 3 volumes ; in how many ways can the 12 books be arranged on a shelf so that volumes of the same work are not separated.

23. How many words can be formed taking together 2 consonants out of 7 and one vowel out of 3 so that the vowel is always in between the two consonants ? [Calcutta, 1922]

24. (*a*) In how many ways can 10 examination papers be arranged so that the best and worst papers never come together. [Calcutta, 1953]

(*b*) Prove that in $(n-2)\underline{|n-1}$ of the permutations of n different things taken all at a time, two particular things will not be together.

25. On the Calcutta-Bongaon line of the Eastern Railway, there are 12 stations from Hridaypur to Bongaon ; if a booking clerk is to be appointed in each of these stations out of 12 candidates of whom one is Oriya, one a Mahratta and the rest are Bengalees, find the number of ways of appointing the men so that the Oriya and the Mahratta may never be appointed in two consecutive stations.

26. Find the number of arrangements that can be made of the letters of the word *youngster* so that the vowels may not *all* be in consecutive positions in any of them.

27. In how many ways can 15 I. Sc. and 12 B. Sc. candidates be arranged in a line so that no two B. Sc. candidates may occupy consecutive positions ? [Patna, 1942]

28. The number of permutations of n things, taken 3 at a time, in which one particular thing does not occur is equal to the number in which it always occurs. Find n.

29. (*a*) How many numbers each lying between 100 and 1000 can be formed with the digits 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 ?

(*b*) How many numbers each lying between 3000 and 4000 can be formed with the digits 1, 2, 3, 4, 5, 7 ?

30. How many numbers each greater than 1000 can be formed with the digits 5, 6, 7, 8, 9 ?

31. How many numbers each lying between 10 and 1000 can be formed with the digits 2, 3, 4, 0, 8, 9 ?

32. How many odd numbers of 5 significant digits can be formed with the digits 5, 2, 0, 4, 7 ?

33. Find the number of numbers less than 1000 and divisible by 5 which can be formed with the digits 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, each digit not occurring more than once in each number. [Calcutta, 1942]

34. Prove that

(i) ${}^nP_r = (n-r+1)\,{}^nP_{r-1}$.

(ii) ${}^nP_n = 1 + 1.{}^1P_1 + 2.{}^2P_2 + 3.{}^3P_3 + \cdots + (n-1).{}^{n-1}P_{n-1}$.

(iii) $2.6.10.14\cdots$ to n factors

$= (n+1)(n+2)(n+3) \cdots$ to n factors.

35. If ${}^nP_{r-1}/a = {}^nP_r/b = {}^nP_{r+1}/c$, prove that $b^2 = a(b+c)$.

সমবায়

2·7. n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে r-সংখ্যকটি করিয়া লইয়া গঠিত সমবায়সমূহের সংখ্যা নির্ণয়।

[*To find the number of combinations of n different things taken r at a time* ($r \leqslant n$).]

মনে কর, নির্ণেয় সমবায়-সংখ্যা x. এই সকল সমবায়ের প্রত্যেকটির r-সংখ্যক বস্তুর সবগুলিকে লইয়া বিন্যাস রচনা করিলে, প্রত্যেকটি সমবায় হইতে $\lfloor r$-সংখ্যক বিন্যাস পাওয়া যাইবে ; সুতরাং, x-সংখ্যক সমবায় হইতে মোট $x \times \lfloor r$-সংখ্যক বিন্যাস পাওয়া যাইবে। কিন্তু প্রত্যেক সমবায়ের সবগুলি বস্তু লইয়া সম্ভাব্য সকল প্রকার উপায়ে বিন্যাস রচনা করিলে, n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে r-সংখ্যকটি করিয়া লইয়া গঠিত সবগুলি বিন্যাস পাওয়া যায়।

$\therefore\ x \times \lfloor r = {}^nP_r = n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)$; [অনু. 2·4]

$\therefore\ x = \dfrac{{}^nP_r}{\lfloor r} = \dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{\lfloor r}$.

এখন, n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে r-সংখ্যকটি করিয়া লইয়া গঠিত সমবায়-সমূহের সংখ্যাকে ${}^nC_r$ দ্বারা সূচিত করিলে,

$$ {}^nC_r = \frac{{}^nP_r}{\lfloor r} = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{\lfloor r}. \quad \cdots \quad (1) $$

আবার, (1)-এর দক্ষিণ পক্ষের লব এবং হর উভয়কে $\lfloor n-r$ দ্বারা গুণ করিলে, দেখা যায়,

$$ {}^nC_r = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)\times\lfloor n-r}{\lfloor r\times\lfloor n-r} $$

$$ = \frac{\lfloor n}{\lfloor r\,\lfloor n-r}. \quad \cdots \quad \cdots \quad (2) $$

সমবায়-সংখ্যা পাটীগণিতীয় সংখ্যায় প্রকাশ করিতে হইলে, সূত্র (1) প্রয়োগ করিতে হয়; আর বীজগণিতীয় রাশিমালায় প্রকাশ করিতে হইলে, সূত্র (2) প্রয়োগ করাই সুবিধাজনক।

দ্রষ্টব্য: ইহা স্পষ্ট যে, সূত্র (1) এবং (2)-এ r এবং n উভয়ই ধনাত্মক সংখ্যা এবং r হয় n অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর অথবা n এর সমান।

বিকল্প প্রমাণ (বিন্যাস-সংখ্যা নির্ণয়ের সূত্রের সাহায্য-ব্যতিরেকে): n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে উহাদের r-সংখ্যকটি করিয়া লইয়া গঠিত সমবায়-সংখ্যাটিকে ${}^nC_r$ দ্বারা এবং n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুকে $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots, a_n$ দ্বারা সূচিত কর। যে সকল সমবায়ে কোন একটি বিশেষ অক্ষর, মনে কর, a_1 থাকে, তাহাদিগকে, অবশিষ্ট $(n-1)$-সংখ্যক অক্ষর হইতে উহাদের $(r-1)$-সংখ্যকটি করিয়া লইয়া সমবায় গঠন করিলে যে সকল সমবায় পাওয়া যায় তাহাদের সহিত a_1 কে সংযুক্ত করিলে পাওয়া যায়। অতএব, যে সকল সমবায়ে a_1 অক্ষরটি বর্ত্তমান থাকে, তাহাদের সংখ্যা হইতেছে ${}^{n-1}C_{r-1}$.

এইরূপে, যে সকল সমবায়ে a_2 অক্ষরটি বর্ত্তমান থাকে, তাহাদের সংখ্যাও ${}^{n-1}C_{r-1}$, a_3 বর্ত্তমান থাকে, তাহাদের সংখ্যাও ${}^{n-1}C_{r-1}$, ইত্যাদি; প্রত্যেক অক্ষরই ${}^{n-1}C_{r-1}$-সংখ্যক সমবায়ে বর্ত্তমান থাকিবে এবং এই সকল সমবায়ের প্রত্যেকটিতে মাত্র একবার করিয়া। অতএব, n-সংখ্যক বিভিন্ন অক্ষর হইতে উহাদের r-সংখ্যকটি করিয়া লইয়া গঠিত ${}^nC_r$-সংখ্যক সমবায়ের সবগুলি লিখিয়া ফেলিলে, দেখা যাইবে এই সকল সমবায়ে $a_1, a_2,$ প্রভৃতি n-সংখ্যক অক্ষরের প্রত্যেকটি ${}^{n-1}C_{r-1}$ বার করিয়া আছে; সুতরাং, ঐ সকল সমবায়ে অক্ষরগুলির মোট সংখ্যা হইবে $n\times{}^{n-1}C_{r-1}$.

আবার, ^nC_r-সংখ্যক সমবায়ের প্রত্যেকটি r-সংখ্যক অক্ষর লইয়া গঠিত বলিয়া, মোট অক্ষর-সংখ্যা হইবে $r \times {}^nC_r$.

$$\therefore \quad r \times {}^nC_r = n \times {}^{n-1}C_{r-1},$$

বা, $$^nC_r = \frac{n}{r} \times {}^{n-1}C_{r-1} \,;$$

এই সূত্রে n ও r কে প্রথমে যথাক্রমে $n-1$ ও $r-1$ এ, তারপর যথাক্রমে $n-2$ ও $r-2$ এ ইত্যাদিতে পরিবর্ত্তন করিলে দেখা যায় যে,

$$^{n-1}C_{r-1} = \frac{n-1}{r-1} \times {}^{n-2}C_{r-2},$$

$$^{n-2}C_{r-2} = \frac{n-2}{r-2} \times {}^{n-3}C_{r-3},$$

$$\cdots \qquad \cdots \qquad \cdots$$

$$^{n-r+2}C_2 = \frac{n-r+2}{2} \times {}^{n-r+1}C_1$$

এবং স্পষ্টই $^{n-r+1}C_1 = \dfrac{n-r+1}{1}$.

এখন, স্তম্ভক্রমে গুণ করিয়া এবং সমতা-চিহ্নযুক্ত গুণফল দুইটি হইতে উহাদের সাধারণ গুণনীয়কগুলি অপসারণ করিলে,

$$^nC_r = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)\cdots 2.1}$$

$$= \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{\underline{|r}}.$$

অনুসিদ্ধান্ত। $^nC_1 = n$; $^nC_n = 1$; $^nP_r = \underline{|r} \times {}^nC_r$.

2·8. n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে উহাদের r-সংখ্যকটি করিয়া লইয়া গঠিত সমবায়সমূহের যেগুলিতে (ক) p-সংখ্যক নির্দ্দিষ্ট বস্তু সর্ব্বদা বর্ত্তমান থাকে তাহাদের সংখ্যা নির্ণয় ; এবং (খ) যেগুলিতে p-সংখ্যক নির্দ্দিষ্ট বস্তু কখনই থাকে না তাহাদের সংখ্যা নির্ণয়।

[*To find the number of combinations of n things, taken r at a time, in which (i) p particular things will always occur, (ii) p particular things will never occur.*]

(ক) n-সংখ্যক বস্তু হইতে নির্দ্দিষ্ট p-সংখ্যক বস্তু পৃথক্ করিয়া রাখিয়া অবশিষ্ট $(n-p)$-সংখ্যক বস্তু হইতে উহাদের $(r-p)$-সংখ্যকটি করিয়া লইয়া সম্ভাব্য সকল প্রকার সমবায় গঠন করিয়া, এই সকল সমবায়ের সহিত ঐ পৃথক্

করিয়া রাখা p-সংখ্যক বস্তু সংযুক্ত করিলে, যে সকল সমবায়ে ঐ p-সংখ্যক বস্তু সর্ব্বদা বর্ত্তমান থাকে তাহাদিগকে পাওয়া যাইবে।

$\therefore$ নির্ণেয় সমবায়-সংখ্যা $= {}^{n-p}C_{r-p}$.

(খ) নির্দ্দিষ্ট p-সংখ্যক বস্তু কোন সমবায়েই থাকিবে না বলিয়া, n-সংখ্যক বস্তু হইতে ঐ নির্দ্দিষ্ট p-সংখ্যক বস্তু পৃথক্ করিয়া রাখিয়া অবশিষ্ট $(n-p)$-সংখ্যক বস্তু হইতে r-সংখ্যকটি করিয়া লইয়া সমবায় গঠন করিলে, এই সকল সমবায়ের কোনটিতেই নির্দ্দিষ্ট p-সংখ্যক বস্তু কখনই থাকিবে না।

$\therefore$ নির্ণেয় সমবায়-সংখ্যা $= {}^{n-p}C_r$.

2·9. পূরক সমবায় (Complementary Combinations) :

n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে উহাদের r-সংখ্যকটি করিয়া লইয়া গঠিত সমবায়-সংখ্যা, n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে (n − r)-সংখ্যকটি করিয়া লইয়া গঠিত সমবায়-সংখ্যার সমান।

[*The number of combinations of n things taken r at a time is equal to the number of combinations of n things taken n − r at a time.*]

আমরা জানি, $${}^nC_r = \frac{\lfloor n}{\lfloor r \lfloor n-r} \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

এই সূত্রে r-এর স্থানে $n-r$ বসাইলে,

$${}^nC_{n-r} = \frac{\lfloor n}{\lfloor n-r \lfloor n-(n-r)} = \frac{\lfloor n}{\lfloor n-r \lfloor r} \quad \cdots \quad (2)$$

$\therefore$ (1) এবং (2) হইতে, ${}^nC_r = {}^nC_{n-r}$.

বিকল্প পদ্ধতি : n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে যতবারই r-সংখ্যক বস্তু নির্ব্বাচন করা যাক না কেন ততবারই $(n-r)$-সংখ্যক বস্তু পড়িয়া থাকে। অতএব, n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে যত বিভিন্ন উপায়ে r-সংখ্যক বস্তু নির্ব্বাচন করা যায়, ঠিক তত বিভিন্ন উপায়েই $(n-r)$-সংখ্যক বস্তুকে নির্ব্বাচন করা যায় ;

অর্থাৎ ${}^nC_r = {}^nC_{n-r}$.

এইরূপ সমবায়কে **পূরক সমবায়** বলে।

অনুসিদ্ধান্ত। ${}^nC_x = {}^nC_y$ হইলে, স্পষ্টই $x = y$; আবার $x + y = n$ও হইতে পারে ; কারণ, ${}^nC_x = {}^nC_{n-x}$; সুতরাং, $y = n - x$, বা, $x + y = n$.

$\therefore$ ${}^nC_x = {}^nC_y$ হইলে, $x = y$, অথবা, $x + y = n$.

দ্রষ্টব্য : ${}^nC_0 = {}^nC_{n-0} = {}^nC_n = 1$.

2·10. প্রমাণ কর যে,

$$^nC_r + {}^nC_{r-1} = {}^{n+1}C_r.$$

$$^nC_r + {}^nC_{r-1} = \frac{\underline{|n}}{\underline{|r}\,\underline{|n-r}} + \frac{\underline{|n}}{\underline{|r-1}\,\underline{|n-r+1}}$$

$$= \frac{\underline{|n}}{r\,\underline{|r-1}\,\underline{|n-r}} + \frac{\underline{|n}}{\underline{|r-1}\,(n-r+1)\,\underline{|n-r}}$$

$$= \frac{\underline{|n}}{\underline{|r-1}\,\underline{|n-r}}\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{n-r+1}\right)$$

$$= \frac{\underline{|n}}{\underline{|r-1}\,\underline{|n-r}} \times \frac{n-r+1+r}{r(n-r+1)}$$

$$= \frac{(n+1)\,\underline{|n}}{r\,\underline{|r-1}(n-r+1)\,\underline{|n-r}} = \frac{\underline{|n+1}}{\underline{|r}\,\underline{|n-r+1}} = {}^{n+1}C_r.$$

বিকল্প পদ্ধতি ঃ $(n+1)$-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে r-সংখ্যকটি লইয়া গঠিত মোট $^{n+1}C_r$-সংখ্যক সমবায়কে নিম্নে বর্ণিত দুইভাগে ভাগ করিয়া রাখা যায় ঃ

(ক) উক্ত $(n+1)$-সংখ্যক বস্তুর কোন একটি নির্দ্দিষ্ট বস্তু-সম্বলিত সমবায়সমূহ ;

এবং (খ) ঐ নির্দ্দিষ্ট বস্তু-বর্জ্জিত সমবায়সমূহ।

এখন, নির্দ্দিষ্ট বস্তুটি-সংবলিত সমবায়মূহের সংখ্যা, নির্দ্দিষ্ট বস্তুটিকে পৃথক্ করিয়া রাখিলে যে n-সংখ্যক বস্তু অবশিষ্ট থাকে সেই সকল বস্তু হইতে $(r-1)$-সংখ্যকটি করিয়া লইয়া গঠিত সমবায়সমূহের সংখ্যার সমান ; অতএব, (ক)-এ বর্ণিত

নির্দ্দিষ্ট বস্তুটি-সংবলিত সমবায়-সংখ্যা $= {}^nC_{r-1}$.

আবার, নির্দ্দিষ্ট বস্তু-বর্জ্জিত সমবায়সমূহের সংখ্যা, নির্দ্দিষ্ট বস্তুটিকে পৃথক্ করিয়া রাখিলে যে n-সংখ্যক বস্তু অবশিষ্ট থাকে সেই সকল বস্তু হইতে r-সংখ্যকটি করিয়া লইয়া গঠিত সমবায়সমূহের সংখ্যার সমান ; অতএব, (খ)-এ বর্ণিত

নির্দ্দিষ্ট বস্তুটি-বর্জ্জিত সমবায়-সংখ্যা $= {}^nC_r$.

$\therefore \quad {}^nC_r + {}^nC_{r-1} = {}^{n+1}C_r.$

উদা. 1. $^{12}C_8$, $^{15}C_9$ এবং $^{25}C_{22}$ এর মান নির্ণয় কর।

$$^{12}C_8 = {}^{12}C_{12-8} = {}^{12}C_4 = \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = 11 \times 5 \times 9 = \mathbf{495}.$$

$$^{15}C_9 = {}^{15}C_{15-9} = {}^{15}C_6 = \frac{15 \times 14 \times 13 \times 12 \times 11 \times 10}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6}$$

$$= 7 \times 13 \times 11 \times 5 = \mathbf{5005}.$$

$$^{25}C_{22} = {}^{25}C_{25-22} = {}^{25}C_3 = \frac{25 \times 24 \times 23}{1 \times 2 \times 3} = \mathbf{2300}.$$

উদা. 2. $^nC_{14} = {}^nC_{16}$ হইলে, $^nC_{28}$ এবং $^{32}C_n$ এর মান কত হইবে?

এখন, $^nC_{14} = {}^nC_{16}$; $\therefore\ n = 14 + 16 = 30.$

$$\therefore\quad {}^nC_{28} = {}^{30}C_{28} = {}^{30}C_2 = \frac{30 \times 29}{1 \times 2} = \mathbf{435};$$

এবং $$^{32}C_n = {}^{32}C_{30} = {}^{32}C_2 = \frac{32 \times 31}{1 \times 2} = \mathbf{496}.$$

উদা. 3. প্রমাণ কর যে,

$$^{4n}C_{2n} : {}^{2n}C_n = \{1.3.5....(4n-1)\} : \{1.3.5....(2n-1)\}^2.$$

আমরা জানি, $^{4n}C_{2n} = \dfrac{\lfloor 4n}{\lfloor 2n \lfloor 2n}$, এবং $^{2n}C_n = \dfrac{\lfloor 2n}{\lfloor n \lfloor n}$;

$$\therefore\quad {}^{4n}C_{2n} : {}^{2n}C_n = \frac{\lfloor 4n}{\lfloor 2n \lfloor 2n} \times \frac{\lfloor n \lfloor n}{\lfloor 2n} = \frac{\lfloor 4n}{\lfloor 2n} \times \left\{\frac{\lfloor n}{\lfloor 2n}\right\}^2.$$

এখন, $$\lfloor 4n = 1.2.3.4.5\ldots 4n = \{1.3.5\ldots\ldots(4n-1)\} \times \{2.4.6\ldots 4n\}$$
$$= \{1.3.5\ldots(4n-1)\} \times 2^{2n}\{1.2.3\ldots 2n\}.$$

$$\therefore\quad \frac{\lfloor 4n}{\lfloor 2n} = \{1.3.5\ldots.(4n-1)\} \times 2^{2n}. \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

আবার, $$\lfloor 2n = \{1.3.5\ldots(2n-1)\} \times \{2.4.6\ldots 2n\}$$
$$= \{1.3.5\ldots(2n-1)\}.2^n\{1.2.3\ldots n\},$$

$$\therefore\quad \frac{\lfloor 2n}{\lfloor n} = \{1.3.5\ldots(2n-1)\} \times 2^n;$$

$$\therefore\quad \left(\frac{\lfloor n}{\lfloor 2n}\right)^2 = \frac{1}{\{1.3.5\ldots(2n-1)\}^2 \times 2^{2n}}. \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

(1) এবং (2) হইতে, $$^{4n}C_{2n} : {}^{2n}C_n = \frac{1.3.5\ldots.(4n-1)}{\{1.3.5\ldots(2n-1)\}^2}.$$

উদা. 4. Sixteen clerkships are vacant in a merchant's office; how many different batches of men can be chosen out of twenty candidates? How often may any particular candidate be selected?

এস্থলে 20 জন প্রার্থী হইতে 16 জন করিয়া নির্ব্বাচন করিয়া বিভিন্ন দল গঠন করিতে হইবে। অতএব, নির্ণেয় দল-সংখ্যা

$$= {}^{20}C_{16} = {}^{20}C_4 = \frac{20 \times 19 \times 18 \times 17}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$$

$$= 5 \times 19 \times 3 \times 17 = \mathbf{4845.}$$

এখন, নির্ণয় করিতে হইবে একজন নির্দ্দিষ্ট প্রার্থীকে কতবার নির্ব্বাচন করা যাইতে পারে। নির্দ্দিষ্ট প্রার্থীটিকে যেবারই নির্ব্বাচন করা হইবে, সেইবারই বাকী 15 জনকে অবশিষ্ট 19 জন প্রার্থী হইতে নির্ব্বাচন করিতে হইবে।

অতএব, যত বিভিন্ন উপায়ে 19 জন ব্যক্তি হইতে 15 জন ব্যক্তিকে নির্ব্বাচন করা যায়, ঠিক ততবারই নির্দ্দিষ্ট ব্যক্তিটিকেও নির্ব্বাচন করা যায়।

∴ কোন নির্দ্দিষ্ট প্রার্থী যতবার নির্ব্বাচিত হয় তাহার সংখ্যা

$$= {}^{19}C_{15} = {}^{19}C_4 = \frac{19 \times 18 \times 17 \times 16}{4 \times 3 \times 2 \times 1}$$

$$= 19 \times 3 \times 17 \times 4 = \mathbf{3876.}$$

উদা. 5. A father with eight children takes three at a time to the zoological gardens, as often as he can without taking the same three children together more than once. How often will he go, and how often will each child go ?

3 জন করিয়া গঠিত পুত্র-কন্যার প্রত্যেকটি দলের সহিত পিতার চিড়িয়াখানায় যাইতে হয় বলিয়া, 8 জন পুত্র-কন্যার মধ্যে 3 জন করিয়া লইয়া যত বিভিন্ন দল গঠন করা যায়, পিতার ততবার চিড়িয়াখানায় যাইতে হইবে। অতএব, পিতার যতবার চিড়িয়াখানায় যাইতে হয় তাহার সংখ্যা

$$= {}^{8}C_3 = \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} = \mathbf{56.}$$

দেখা গেল, পুত্র-কন্যার মধ্যে 56টি বিভিন্ন দল গঠন করা যায়। এই 56টি দলের মধ্যে পুত্র-কন্যার কোন নির্দ্দিষ্ট একজন যত দলে থাকিবে পুত্র-কন্যার প্রত্যেকে ততবার করিয়া চিড়িয়াখানায় যাইবে। অতএব, প্রত্যেকে 3 জনের বাকী 2 জন করিয়া লইয়া অবশিষ্ট 7 জনের মধ্যে যতগুলি দল গঠন করা যায় ততবার যাইবে।

∴ পুত্র-কন্যার প্রত্যেকের চিড়িয়াখানায় যতবার যাইতে হয় তাহার সংখ্যা

$$= {}^{7}C_2 = \frac{7 \times 6}{2 \times 1} = \mathbf{21.}$$

উদা. 6. Find the number of different triangles which can be formed by joining the angular points of a polygon of 12 sides (dodecagon). Find also the number of diagonals of the polygon.

দ্বাদশ ভুজবিশিষ্ট বহুভুজটির 12টি কৌণিক বিন্দু আছে। এই 12টি বিন্দুর 3টি 3টি করিয়া সংযুক্ত করিলে প্রতিবারেই একটি ত্রিভুজ পাওয়া যাইবে। অতএব, 12টি বিন্দু হইতে 3টি বিন্দু যত বিভিন্ন উপায়ে নির্ব্বাচন করা যায়, মোট ত্রিভুজ-সংখ্যাও হইবে ততগুলি।

∴ নির্ণেয় ত্রিভুজ-সংখ্যা

$$= {}^{12}C_3 = \frac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2 \times 1} = 2 \times 11 \times 10 = \mathbf{220.}$$

আবার, 12টি কৌণিক বিন্দুর 2টি করিয়া সংযুক্ত করিলে, প্রতিবারেই একটি সরলরেখা পাওয়া যাইবে।

∴ মোট সরলরেখার সংখ্যা $= {}^{12}C_2 = \dfrac{12 \times 11}{2 \times 1} = 6 \times 11 = 66.$

এখন, পর পর দুইটি কৌণিক বিন্দু সংযুক্ত করিলে, বহুভুজটির বাহুগুলি পাওয়া যায় বলিয়া, উপরিপ্রাপ্ত 66টি সরলরেখার মধ্যে বহুভুজের বাহু 12টিও আছে। স্পষ্টই এই বাহুগুলি বাদে ঐ 66টি সরলরেখার বাকী সরলরেখাগুলি কর্ণ।

অতএব, নির্ণেয় কর্ণ-সংখ্যা $= 66 - 12 = \mathbf{54.}$

উদা. 7. (i) Find the number of different straight lines that can be obtained by joining 12 different points on a plane, no three of which are collinear, with the exception of 5 points which are collinear. (ii) Find also the number of triangles that can be formed by them.

(i) কোন তিনটি বিন্দুই এক সরলরেখায় অবস্থিত না হইলে, 12টি বিন্দু হইতে 2টি করিয়া লইয়া মোট ${}^{12}C_2$, অর্থাৎ, $\dfrac{12 \times 11}{2 \times 1}$, অর্থাৎ, 66টি বিভিন্ন সরলরেখা পাওয়া যাইত। কিন্তু 5টি বিন্দু এক সরলরেখায় অবস্থিত বলিয়া, উহাদের দ্বারা ${}^{5}C_2$ বা $\dfrac{5 \times 4}{2 \times 1}$ বা 10টি সরলরেখা গঠিত হইবে না, হইবে মাত্র 1টি। কিন্তু উপরিউক্ত 66টি সরলরেখার মধ্যে এই 10টিকে বিভিন্ন সরলরেখা ধরা হইয়াছে ; কিন্তু ধরিতে হইবে 10টির স্থলে মাত্র 1টি।

∴ নির্ণেয় সরলরেখার সংখ্যা $= 66 - 10 + 1 = \mathbf{57.}$

(ii) এক সরলরেখায় অবস্থিত নহে এরূপ যে-কোন 3টি বিন্দুর সংযোগে ত্রিভুজ উৎপন্ন হয়। এস্থলে, 12টি বিন্দুর কোন 3টি বিন্দুই এক সরলরেখায় অবস্থিত না হইলে, মোট ত্রিভুজ-সংখ্যা হইত $^{12}C_3$; কিন্তু 5টি বিন্দু এক সরলরেখায় অবস্থিত হওয়ায়, উহাদের 3টি 3টি দ্বারা কোন ত্রিভুজই গঠিত হয় না। উক্ত $^{12}C_3$-সংখ্যক ত্রিভুজের মধ্যে এই 5টি বিন্দুর 3টি 3টি দ্বারা গঠিত $^5C_3$-সংখ্যক ত্রিভুজ-সংখ্যাও ধরা হইয়াছে ;

∴ নির্ণেয় ত্রিভুজ-সংখ্যা

$$= {}^{12}C_3 - {}^5C_3 = \frac{12 \times 11 \times 10}{3 \times 2 \times 1} - \frac{5 \times 4 \times 3}{3 \times 2 \times 1} = 220 - 10 = \mathbf{210}.$$

উদা. 8. Out of 10 consonants and 4 vowels all different, how many words can be formed, each containing 3 consonants and 2 vowels.

10টি ব্যঞ্জনবর্ণ হইতে 3টি 3টি করিয়া লইয়া মোট $^{10}C_3$-সংখ্যক সমবায় গঠন করা যায়।

4টি স্বরবর্ণ হইতে 2টি 2টি করিয়া লইয়া মোট $^4C_2$-সংখ্যক সমবায় গঠন করা যায়।

এখন, ব্যঞ্জনবর্ণসমূহ দ্বারা গঠিত সমবায়সমূহের প্রত্যেকটির সহিত স্বরবর্ণসমূহ দ্বারা গঠিত সমবায়সমূহের প্রত্যেকটি সংযুক্ত করিয়া, 3টি করিয়া ব্যঞ্জনবর্ণ এবং 2টি করিয়া স্বরবর্ণ-সংবলিত $^{10}C_3 \times {}^4C_2$-সংখ্যক সমবায় পাওয়া যাইবে।

আবার, এই সকল সমবায়ের প্রত্যেকটিতে যে 5টি করিয়া অক্ষর আছে, তাহাদের সবগুলিকে লইয়া বিন্যাস রচনা করিলে, প্রত্যেক সমবায় হইতে $\lfloor 5$-সংখ্যক শব্দ পাওয়া যায়।

∴ নির্ণেয় শব্দ-সংখ্যা $= {}^{10}C_3 \times {}^4C_2 \times \lfloor 5$

$$= \frac{10 \times 9 \times 8}{3 \times 2 \times 1} \times \frac{4 \times 3}{2 \times 1} \times \lfloor 5$$

$$= 120 \times 6 \times \lfloor 5 = 720 \times 220 = \mathbf{86400}.$$

উদা. 9. A candidate is required to answer 6 out of 10 questions which are divided into 2 groups each containing 5 questions, and he is not permitted to attempt more than 4 from any group. In how many different ways can he make up his choice? [C. U. 1932]

প্রদত্ত শর্ত হইতে, স্পষ্টই পরীক্ষার্থী নিম্নলিখিত বিভিন্ন উপায়ে প্রশ্নগুলি নির্ব্বাচন করিতে পারে :

(i) প্রথম বিভাগের 5টি প্রশ্ন হইতে যে-কোন 4টি, দ্বিতীয় বিভাগের 5টি প্রশ্ন হইতে যে-কোন 2টি ;

(ii) প্রথম বিভাগের 5টি প্রশ্ন হইতে যে-কোন 3টি, দ্বিতীয় বিভাগের 5টি প্রশ্ন হইতে যে-কোন 3টি ;

(iii) প্রথম বিভাগের 5টি প্রশ্ন হইতে যে-কোন 2টি, দ্বিতীয় বিভাগের 5টি প্রশ্ন হইতে যে-কোন 4টি।

(i) প্রথম বিভাগের 5টি হইতে 4টি, $^5C_4$-সংখ্যক বিভিন্ন উপায়ে এবং দ্বিতীয় বিভাগের 5টি হইতে 2টি, $^5C_2$-সংখ্যক বিভিন্ন উপায়ে নির্ব্বাচন করা যায়। এখন প্রথম বিভাগের প্রশ্ন-নির্ব্বাচনের প্রত্যেক উপায়ের সহিত দ্বিতীয় বিভাগের প্রশ্ন-নির্ব্বাচনের প্রত্যেকটি উপায় সংশ্লিষ্ট করা যায় বলিয়া, দুই বিভাগ হইতে (i)-এ বর্ণিত উপায়ে প্রশ্ন-নির্ব্বাচন-সংখ্যা $= {}^5C_4 \times {}^5C_2$,

এইরূপে (ii)-এ বর্ণিত উপায়ে প্রশ্ন-নির্ব্বাচন-সংখ্যা $= {}^5C_3 \times {}^5C_3$;

এবং (iii)-এ বর্ণিত উপায়ে প্রশ্ন-নির্ব্বাচন-সংখ্যা $= {}^5C_2 \times {}^5C_4$.

$\therefore$ যে সকল বিভিন্ন উপায়ে প্রশ্নগুলি দুইটি বিভাগ হইতে নির্ব্বাচিত হইতে পারে তাহাদের সংখ্যা

$$= {}^5C_4 \times {}^5C_2 + {}^5C_3 \times {}^5C_3 + {}^5C_2 \times {}^5C_4$$
$$= {}^5C_1 \times {}^5C_2 + {}^5C_2 \times {}^5C_2 + {}^5C_2 \times {}^5C_1$$
$$= 5 \times \frac{5 \times 4}{2 \times 1} + \frac{5 \times 4}{2 \times 1} \times \frac{5 \times 4}{2 \times 1} + \frac{5 \times 4}{2 \times 1} \times 5$$
$$= 5 \times 10 + 10 \times 10 + 10 \times 5 = 50 + 100 + 50 = \mathbf{200}.$$

উদা. 10. If words be formed by taking only 5 at a time out of the letters of the word *metaphysics*, in how many of them will the letter t occur ?

এখানে 11টি অক্ষরের 5টি 5টি লইয়া শব্দ গঠন করিলে, কতকগুলির মধ্যে t সর্ব্বদা থাকিবে, তাহাই নির্ণয় করিতে হইবে।

't' সর্ব্বদা থাকিবে ; অতএব, t বাদ দিয়া যে 10টি অক্ষর থাকে, তাহাদের মধ্য হইতে 4টি করিয়া লইয়া যেসব সমবায় ($^{10}C_4$) গঠন করা যায়, তাহার প্রত্যেকের সহিত t যুক্ত করিয়া প্রত্যেকটি সমবায় হইতে বিন্যাস-সংখ্যা লইলেই মোট বিন্যাস-সংখ্যা পাওয়া যাইবে, প্রত্যেকটি সমবায়ে 5টি অক্ষর থাকিবে বলিয়া, উহা হইতে $\lfloor 5$-সংখ্যক বিন্যাস পাওয়া যাইবে।

$\therefore$ নির্ণেয় বিন্যাস-সংখ্যা $= {}^{10}C_4 \times \underline{|5}$

$$= \frac{10.9.8.7}{1.2.3.4} \times 120 = \mathbf{25200}.$$

[বিন্যাস-স্থত্র ব্যতিরেকে মাত্র সমবায়-স্থত্র-সাহায্যে সমাধানের ভার শিক্ষার্থিগণের উপর অর্পিত হইল।]

উদা. 11. In how many ways can 21 white balls and 19 black balls be arranged in a row so that no two black balls may be together.

শ্বেতবর্ণের বলগুলিকে W দ্বারা স্থচিত করিলে, কৃষ্ণবর্ণের বলগুলি যাহাতে পাশাপাশি না বসে তাহার জন্য তাহাদিগকে নিম্নলিখিতরূপে ×-চিহ্নিত স্থানে বসাইতে হইবে

$$\times\ W\ \times\ W\ \times\ W\ \times\ W \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\ \times\ W\ \times\ W\ \times \text{।}$$

এখন শ্বেতবর্ণ বলের সংখ্যা 21 বলিয়া ×-চিহ্নের সংখ্যা অবশ্যই 22 হইবে। এই 22টি স্থানের মধ্যে যে-কোন 19টি স্থান নির্ব্বাচন করিয়া সেই সকল স্থানে কৃষ্ণবর্ণ বল বসাইলে উহারা কথনই পাশাপাশি বসিবে না।

$\therefore$ নির্ণেয় বিভিন্ন উপায়-সংখ্যা

$$= {}^{22}C_{19} = {}^{22}C_3 = \frac{22 \times 21 \times 20}{3 \times 2 \times 1} = \mathbf{1540}.$$

উদা. 12. A boat's crew consists of 8 men, 3 of whom can only row on one side and 2 only on the other. Find the number of ways in which the crew can be arranged.

মনে কর, মাঝিদের নাম A, B, C, D, E, F, G ও H, এবং A, B, C মাত্র একপার্শ্বে এবং D, E অন্যপার্শ্বে কাজ করিতে পারে, অতএব, তাহাদিগকে নিম্নোক্ত প্রকারে সাজানো যায় :—

$$\begin{array}{c|c} A & D \\ B & E \\ C & \end{array}$$

যেহেতু মাঝিদের 4 জন করিয়া একপার্শ্বে থাকিবে, অতএব, অবশিষ্ট 3 জনের 1 জনকে A, B, C এর পার্শ্বে এবং অপর 2 জনকে D, E এর পার্শ্বে রাথা যায়—ইহা স্পষ্ট যে, ইহা তিন ${}^3C_1$ প্রকারে করা যায়, কেননা অবশিষ্ট 3 জনের যে-কোন 1 জনকে A, B, C এর পার্শ্বে রাথা যায়।

মাঝিদের এই তিনপ্রকারের অবস্থানের একটির আলোচনা করা যাক, যাহাতে A, B, C এর পার্শ্বে F কে রাখা হইল :

$$\begin{array}{c|c} A & D \\ B & E \\ C & G \\ F & H \end{array}$$

এক্ষণে A, B, C, F কে তাহাদের মধ্যে $\lfloor 4$ প্রকারে সাজানো যায়, এইরূপে অপর পার্শ্বের D, E, G, H কেও তাহাদের মধ্যে $\lfloor 4$ প্রকারে সাজানো যায়।

অতএব, বাম পক্ষের প্রত্যেক প্রকারের সহিত দক্ষিণ পক্ষের প্রত্যেক প্রকার সংযুক্ত করা যায় বলিয়া, এক্ষেত্রে মোট $\lfloor 4 \times \lfloor 4$ প্রকারে মাঝিদের সাজানো যায়। অপর দুই ক্ষেত্রের (অর্থাৎ G ও H এর এক এক জনকে A, B, C এর পার্শ্বে রাখিয়া) প্রত্যেক ক্ষেত্রে মাঝিদিগকে মোট $\lfloor 4 \times \lfloor 4$ প্রকারে সাজানো যায়।

সুতরাং, মোটের উপর $3 \times \lfloor 4 \times \lfloor 4 = 3 \times 24 \times 24 = \mathbf{1728}$ প্রকারে মাঝিদিগকে সাজানো যায়।

উদা. 13. In how many of the permutations of n different things taken r together will three given things always occur ?

প্রথমে n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে উহাদের r-সংখ্যকটি করিয়া লইয়া গঠিত বিভিন্ন সমবায়ে যে সকল সমবায়ে নির্দ্দিষ্ট বস্তু তিনটি সর্ব্বদাই থাকিবে। তাহাদের সংখ্যা নির্ণয় করা যাক।

নির্দ্দিষ্ট বস্তু তিনটিকে পৃথক্ করিয়া রাখিয়া অবশিষ্ট $(n-3)$-সংখ্যক বস্তু হইতে সম্ভাব্য সকল প্রকারে $(r-3)$-সংখ্যক বস্তু লইয়া যে ${}^{n-3}C_{r-3}$-সংখ্যক সমবায় গঠন করা যায়, দেখা যায় যে, পৃথক্ করিয়া রাখা বস্তু তিনটিকে এই সকল সমবায়ে প্রত্যেকটির সহিত সংযুক্ত করিলে প্রত্যেক সমবায়ের বস্তু-সংখ্যাও হয় r এবং এই r-সংখ্যক বস্তুর মধ্যে নির্দ্দিষ্ট বস্তু তিনটি সর্ব্বদাই বর্ত্তমান থাকে।

অতএব, যে সকল সমবায়ে নির্দ্দিষ্ট বস্তু তিনটি সর্ব্বদাই থাকে তাহাদের সংখ্যা

$$= {}^{n-3}C_{r-3} = \frac{\lfloor n-3}{\lfloor r-3 \, \lfloor n-r}.$$

নির্দ্দিষ্ট তিনটি বস্তুসমেত এই r-সংখ্যক বস্তুবিশিষ্ট সমবায়গুলির প্রত্যেকটি হইতে $\lfloor r$-সংখ্যক বিন্যাস পাওয়া যায় বলিয়া, যে সকল বিন্যাসে নির্দ্দিষ্ট বস্তু তিনটি সর্ব্বদাই বর্ত্তমান থাকে তাহাদের সংখ্যা

$$=\frac{\lfloor n-3}{\lfloor r-3\,\lfloor n-r}\times\lfloor r=\frac{\lfloor n-3}{\lfloor n-r}\times r(r-1)(r-2).$$

প্রশ্নমালা 7

1. Find the values of ${}^{50}C_{47}$, ${}^{27}C_{23}$, ${}^{40}C_{35}$.

2. If ${}^{2n}C_r={}^{2n}C_{r+2}$, find r. [C. U. 1930]

3. If $m={}^nC_2$, show that ${}^mC_2=3.{}^{n+1}C_4$. [C. U. 1912]

4. If ${}^nP_r=720$ and ${}^nC_r=120$, find n and r.

5. If ${}^{n-1}C_r : {}^nC_r : {}^{n+1}C_r=1 : 3 : 8$, find n and r.

6. Prove that : ${}^nC_r+{}^{n-1}C_{r-1}+{}^{n-1}C_{r-2}={}^{n+1}C_r$.

7. Prove that the product of any r consecutive positive integers is always divisible by $\lfloor r$.

8. In a question paper there are 15 questions ; out of these 12 are to be attempted. In how many ways can a candidate choose the questions ?

9. Four persons are chosen by lot out of ten ; in how many ways can this be done and how often would any one person be chosen ?

10. A basket contains 10 mangoes. Find how many different selections you can make of 3 mangoes so as to always include a particular mango. [C. U. 1921]

11. From a company of 15 men, how many selections of 9 men can be made so as to exclude three particular men ? [C. U. 1954]

12. If there be twenty pears at three a penny, how many different selections can be made in buying 6 penny worth of pears and in how many of these will a particular pear occur ?

13. There are 16 points in a plane, no three of which are in the same straight line. Find the number of straight lines which can be formed by joining them. [C. U. 1909]

14. How many diagonals can be drawn in a figure of n straight lines as sides ? How many different triangles can be formed by joining the angular points of this figure ?

15. There are n points in a plane of which no three are in a straight line except m, which are all in a straight line. Find the number of (i) different straight lines ; (ii) different triangles, formed by joining the points. [C. U. 1928]

16. Suppose 20 clerks have to be appointed out of 23 candidates of whom 2 are Mahomedans and the rest Hindus. How many different selections can be made so that none of the Mahomedan candidates may be excluded ?

17. At an election there are 5 candidates and three members to be elected, and a voter is entitled to vote for any number of candidates not greater than the number to be elected. In how many ways may a voter choose to vote ? [C. U. 1935]

18. In a Municipal Corporation, there are 20 councillors and 5 aldermen. How many committees can be formed consisting of 6 councillors and 3 aldermen ? [C. U. 1923, '31, '33]

19. Find the number of combinations which can be formed by taking the letters of the alphabet 6 at a time, each combination containing two vowels and no more.

20. From 7 gentlemen and 4 ladies a committee of 5 is to be formed. In how many ways can this be done so as to include at least one lady ? [C. U. 1948]

21. Suppose 8 professors are wanted for a college newly started ; if 3 D. Sc.'s and 12 M. Sc.'s apply for the professorships, how many selections can be made taking in (i) all the D. Sc.'s ; (ii) at least one of them ?

22. In a group of 15 boys there are 7 boy-scouts. In how many ways can 12 boys be selected so as to include (i) exactly 6 boy-scouts ; (ii) at least 6 boy-scouts ? [C. U. 1943]

23. A cricket team consisting of 11 players is to be selected from 2 groups consisting of 6 and 8 players respectively. In how many ways can the selections be made on the supposition that the group of six shall contribute no fewer than 4 players ? [C. U. 1938]

24. A certain council consists of a chairman, two vice-chairmen and 12 other members. How many different committees consisting of 6 can be formed, including always the chairman and only one vice-chairman ? [C. U. 1914]

25. A committee of 7 members is to be chosen out of 20 Municipal Commissioners of whom 15 are Hindus and 5 Mahomedans, in such a way that 5 Hindus and 2 Mahomedans shall

be on the committee. In how many different ways can such a committee be constituted, and from how many of these will a particular Hindu Commissioner be excluded ?

26. How many combinations can be formed of eight counters marked 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, taking them 4 at a time, there being at least one odd and one even counter in each combination ?

[C. U. 1941]

27. Out of 17 consonants and 5 vowels, all different, how many different words can be formed, each consisting of 3 consonants and 2 vowels ? [C. U. 1939]

28. Find the number of words which can be formed with two different consonants and one vowel, out of 8 different consonants and 4 different vowels, the vowel to lie between two consonants.

29. Prove that the number of words which can be formed of the letters a, b, c, d, e, f, taken three together, each word containing one vowel at least, is 96.

30. If words be formed with 6 only of the letters of the word *centrifugal*, in how many of them will all the three letters c, t, f occur ?

31. In how many ways can 37 copies of a book on literature and 35 copies of a book on Mathematics be arranged in a column, one above the other, so that no two mathematical books may be together ?

32. A boat's crew consists of 10 men, 3 of whom can only row on one side and 2 only on the other. Find the number of ways in which the crew can be arranged.

2·11. ${}^nC_r$ এর চরম মান।

r-এর মান কত হইলে, n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে উহাদের r-সংখ্যকটি করিয়া লইয়া গঠিত সমবায়সমূহের সংখ্যা বৃহত্তর হইবে, তাহা নির্ণয় করিতে হইবে।

[*To find the value of r, for which the number of combinations of n different things taken r at a time is the greatest.*]

আমরা জানি,

$${}^nC_r = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+2)(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)\cdots\cdots3.2.1}$$

এবং $^nC_{r-1} = \dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+2)}{(r-1)(r-2)\cdots 3.2.1}$;

$$\therefore \quad \frac{^nC_r}{^nC_{r-1}} = \frac{n-r+1}{r} = \frac{n+1}{r} - 1. \qquad \cdots \qquad (1)$$

অতএব, n একটি ধনাত্মক পূর্ণ রাশি হইলে, r এর মানবৃদ্ধির সহিত $\dfrac{n+1}{r}-1$ এর মান হ্রাস পাইবে, r এর মান হ্রাসপ্রাপ্ত হইলে, $\dfrac{n+1}{r}-1$ এর মান বৃদ্ধি পাইবে। এইরূপে, r এর কোন নির্দ্দিষ্ট মানের জন্য মনে কর, $\dfrac{n+1}{r}-1$ এর মান k, তাহা হইলে, ঐ নির্দ্দিষ্ট মান অপেক্ষা r এর সমস্ত ক্ষুদ্রতর মানের জন্যই $\dfrac{n+1}{r}-1 > k$, এবং r এর উচ্চতর সমস্ত মানের জন্য $\dfrac{n+1}{r}-1 < k$.

এক্ষণে, মনে কর, r এর কোন নির্দ্দিষ্ট মানের জন্য

$$\frac{n+1}{r} - 1 > 1. \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad (2)$$

অতএব, r এর ক্ষুদ্রতর সমস্ত মানের জন্যই $\dfrac{n+1}{r}-1$, 1 অপেক্ষা আরও বৃহত্তর।

সুতরাং, (1) হইতে, $\dfrac{^nC_r}{^nC_{r-1}} > 1, \dfrac{^nC_{r-1}}{^nC_{r-2}} > 1, \dfrac{^nC_{r-2}}{^nC_{r-3}} > 1\cdots\cdots$;

অর্থাৎ, $^nC_r > {^nC_{r-1}} > {^nC_{r-2}} > {^nC_{r-3}} > \cdots \quad \cdots$ (A)

এইরূপে, যদি r এর যে-কোন মানের জন্য $^nC_r > {^nC_{r-1}}$ হয়, তাহা হইলে ইহা $^nC_{r-2}, {^nC_{r-3}}, \cdots\cdots$ অপেক্ষাও বৃহত্তর হইবে।

ঐরূপে, r এর কোন নির্দ্দিষ্ট মানের জন্য যদি $\dfrac{n+1}{r}-1 < 1$ হয়, তাহা হইলে ঐ নির্দ্দিষ্ট মান অপেক্ষা r এর সকল বৃহত্তর মানের জন্যই $\dfrac{n+1}{r}-1$ এর মান 1 অপেক্ষা আরও ক্ষুদ্রতর হইবে।

অতএব, (1) হইতে, $\dfrac{^nC_r}{^nC_{r-1}} < 1, \dfrac{^nC_{r+1}}{^nC_r} < 1, \dfrac{^nC_{r+2}}{^nC_{r+1}} < 1, \cdots\cdots$;

অর্থাৎ, $^nC_{r-1} > {^nC_r} > {^nC_{r+1}} > {^nC_{r+2}} > \cdots \quad \cdots$ (B)

এইরূপে, দেখা যায় যে, পরবর্ত্তী সমবায়গুলির মান ক্রমশঃ হ্রাসপ্রাপ্ত হয়।

(A) এবং (B) হইতে, ইহা স্পষ্ট যে, r এর মান 1 হইতে n পর্য্যন্ত বৃদ্ধিপ্রাপ্ত হইলে, যে পর্য্যন্ত না $\frac{n+1}{r}-1$ এর মান 1 হইতে ক্ষুদ্রতর হয়, সেই পর্য্যন্ত ^nC_r এর মান ক্রমান্বয়ে বৃদ্ধিপ্রাপ্ত হইতে থাকে, এবং তাহার পর হইতে ক্রমান্বয়ে হ্রাসপ্রাপ্ত হইতে থাকে।

$\therefore$ ^nC_r বৃহত্তম হইবে, যখন $\frac{n+1}{r}-1$ হয় 1 অপেক্ষা ঠিক বৃহত্তর অথবা 1 এর সমান ;

অথবা, $\frac{n+1}{r}$ হয় 2 অপেক্ষা ঠিক বৃহত্তর অথবা 2 এর সমান।

অথবা, $n+1$ হয় $2r$ অপেক্ষা ঠিক বৃহত্তর অথবা $2r$ এর সমান ;

অথবা, r হয় $\frac{1}{2}(n+1)$ অপেক্ষা ঠিক ক্ষুদ্রতর বা $\frac{1}{2}(n+1)$ এর ঠিক সমান ... ... (3)

n যুগ্ম বা অযুগ্ম ধনাত্মক পূর্ণ রাশি হইলে, r এর মান কিরূপ দাঁড়ায় দেখা যাক।

(ক) n যুগ্ম ধনাত্মক পূর্ণ রাশি হইলে, মনে কর, $n=2m$, তাহা হইলে (3) হইতে পাওয়া যায় যে, ^nC_r বৃহত্তম হইবে, যখন r, $\frac{1}{2}(2m+1)$ অপেক্ষা ঠিক ক্ষুদ্রতর বা $\frac{1}{2}(2m+1)$ এর সমান। কিন্তু r একটি ধনাত্মক পূর্ণ রাশি বলিয়া, ইহা $m+\frac{1}{2}$ এর সমান হইতে পারে না ; অতএব, $m+\frac{1}{2}$ অপেক্ষা ঠিক ক্ষুদ্রতর পূর্ণ সংখ্যা m এর সমান হইবে। অতএব,

$$\mathbf{r=m} \text{ অর্থাৎ } \frac{\mathbf{n}}{\mathbf{2}} \text{ হইলেই, } {}^{\mathbf{n}}\mathbf{C_r} \text{ বৃহত্তম হইবে।}$$

(খ) n অযুগ্ম ধনাত্মক পূর্ণ রাশি হইলে, মনে কর, $n=2m+1$, অতএব, (3) হইতে পাওয়া যায় যে, ^nC_r বৃহত্তম হইবে, যখন r, $\frac{1}{2}(2m+1+1)$ অর্থাৎ $(m+1)$ অপেক্ষা ঠিক ক্ষুদ্রতর অথবা $(m+1)$ এর সমান। $(m+1)$ অপেক্ষা ঠিক ক্ষুদ্রতর রাশি m. অতএব,

$$\mathbf{r=m} \text{ বা } \mathbf{m+1} \text{ অর্থাৎ } \frac{\mathbf{n-1}}{\mathbf{2}} \text{ অথবা } \frac{\mathbf{n+1}}{\mathbf{2}} \text{ হইলে, } \mathbf{C} \text{ বৃহত্তম হইবে।}$$

n অযুগ্ম হইলে, $^nC_{\frac{n+1}{2}}$ এবং $^nC_{\frac{n-1}{2}}$-ই ^nC_r এর চরম মান হইবে। কেননা উভয়ই পূরক সমবায়।

প্রশ্নমালা 8

1. How many letters of the word *Pantheism* should be taken to form a group so that the number of different groups may be the greatest? In how many of these groups will the letters p and m occur?

2. A person wishes to make up as many different parties as he can out of 20 friends, each party consisting of the same number; how many should he invite at a time? In how many of these would the same man be found?

3. Find the greatest number of different groups that can be formed from the letters of the word *Barouche*, each group consisting of the same number of letters. In how many of them will the letter c occur?

4. Prove that the greatest values of ${}^{2n}C_r$ and ${}^{2n-1}C_r$ bear to one another the ratio of 2 : 1.

জটিল বিন্যাস ও সমবায়

(Harder Permutations and Combinations)

2·12. সবগুলি বিভিন্ন নহে এরূপ বস্তুসমূহের বিন্যাস।

সবগুলি বিভিন্ন নহে এরূপ n-সংখ্যক বস্তুর সবগুলি লইয়া বিন্যাস গঠন করিলে যে বিন্যাসগুলি পাওয়া যাইবে তাহাদের সংখ্যা নির্ণয়।

[*To find the number of permutations of* **n** *things, taken all together*, **when the things are not all different.**]

n-সংখ্যক বস্তুকে n-সংখ্যক অক্ষর দ্বারা সূচিত কর এবং মনে কর, এই সকল অক্ষরের p-সংখ্যকটি a, q-সংখ্যকটি b, r-সংখ্যকটি c এবং অবশিষ্ট অক্ষরগুলির সবগুলি পরস্পর বিভিন্ন।

মনে কর, নির্ণেয় বিন্যাস-সংখ্যা x.

বিন্যাসগুলির প্রত্যেকটিতেই p-সংখ্যক পরস্পর অভিন্ন a অক্ষরটি আছে। যে-কোন বিন্যাসে, এই p-সংখ্যক a অক্ষরের স্থানে, অবশিষ্ট অন্য সকল অক্ষর হইতে ভিন্ন এবং পরস্পরও ভিন্ন এরূপ p-সংখ্যক নূতন অক্ষর বসাইয়া বিন্যাসটির অন্য অক্ষর সকলের স্থানে আদৌ পরিবর্তন না করিয়া, অর্থাৎ পূর্ব্ববৎই রাখিয়া, এই নূতন p-সংখ্যক বিভিন্ন অক্ষরের মধ্যে বিন্যাস রচনা করিলে (অর্থাৎ

p-সংখ্যক অক্ষরের সবগুলিকে লইয়া বিন্যাস রচনা করিলে), বিন্যাসটি হইতে $\underline{|p}$-সংখ্যক বিভিন্ন বিন্যাস পাওয়া পাইবে। যে-কোন বিন্যাস হইতেই এইরূপ পরিবর্ত্তন ও বিন্যাস-গঠন দ্বারা $\underline{|p}$-সংখ্যক বিভিন্ন বিন্যাস পাওয়া যায় বলিয়া, x-সংখ্যক বিন্যাসের প্রত্যেকটিতে এইরূপ পরিবর্ত্তন ও বিন্যাস-গঠন সাধন করিলে, x-সংখ্যক বিন্যাস হইতে মোট $x \times \underline{|p}$-সংখ্যক নূতন বিন্যাস পাওয়া যাইবে।

এইরূপে, এই $x \times \underline{|p}$-সংখ্যক নূতন বিন্যাসগুলি যে-কোন বিন্যাসে, q-সংখ্যক b অক্ষরের স্থানে, অবশিষ্ট অন্য সকল অক্ষর হইতে ভিন্ন এবং পরস্পরও ভিন্ন এরূপ q-সংখ্যক নূতন অক্ষর বসাইয়া, বিন্যাসটির অন্য অক্ষর সকলের স্থান আদৌ পরিবর্ত্তন না করিয়া, পূর্ব্ববৎই রাখিয়া, এই নূতন q-সংখ্যক বিভিন্ন অক্ষরের মধ্যে বিন্যাস রচনা করিলে, বিন্যাসটি হইতে $\underline{|q}$-সংখ্যক বিভিন্ন বিন্যাস পাওয়া যাইবে। $x \times \underline{|p}$-সংখ্যক বিন্যাসগুলির যে-কোনটি হইতেই, এইরূপ পরিবর্ত্তন ও বিন্যাস-গঠন দ্বারা $\underline{|q}$-সংখ্যক বিভিন্ন বিন্যাস পাওয়া যায় বলিয়া, $x \times \underline{|p}$-সংখ্যক বিন্যাসের প্রত্যেকটিতে এইরূপ পরিবর্ত্তন ও বিন্যাস-গঠন সাধন করিলে, $x \times \underline{|p}$-সংখ্যক বিন্যাস হইতে মোট $x \times \underline{|p} \times \underline{|q}$-সংখ্যক নূতন বিন্যাস পাওয়া যাইবে।

আবার, এই $x \times \underline{|p} \times \underline{|q}$-সংখ্যক নূতন বিন্যাসগুলির প্রত্যেকটিতে r-সংখ্যক c অক্ষরের স্থানে, অবশিষ্ট অন্য সকল অক্ষর হইতে ভিন্ন এবং পরস্পরও ভিন্ন এরূপ r-সংখ্যক নূতন অক্ষর বসাইয়া, এই r-সংখ্যক বিভিন্ন অক্ষরের মধ্যে বিন্যাস রচনা করিলে, মোট $x \times \underline{|p} \times \underline{|q} \times \underline{|r}$-সংখ্যক নূতন বিন্যাস পাওয়া যাইবে। স্পষ্টই, এই বিন্যাসগুলির প্রত্যেকটিতে n-সংখ্যক অক্ষর আছে এবং তাহারা পরস্পর ভিন্ন।

তাহা হইলে দেখা গেল যে, পরস্পর ভিন্ন n-সংখ্যক অক্ষরগুলি লইয়া বিন্যাস রচনা করিলে মোট বিন্যাস-সংখ্যা হয়, $x \times \underline{|p} \times \underline{|q} \times \underline{|r}$. আবার, আমরা জানি, n-সংখ্যক বিভিন্ন অক্ষরগুলির সবগুলিকে লইয়া বিন্যাস রচনা করিলে বিন্যাস-সংখ্যা হয় $\underline{|n}$.

$$\therefore \quad x \times \underline{|p} \times \underline{|q} \times \underline{|r} = \underline{|n};$$

$$\therefore \quad x = \frac{\underline{|n}}{\underline{|p}\,\underline{|q}\,\underline{|r}}.$$

দ্রষ্টব্য ঃ প্রক্রিয়াটি সম্পূর্ণ সাধারণ ; a, b, c এর ন্যায় তিন-এর অধিক-সংখ্যক বস্তুর প্রত্যেকটি একাধিক করিয়া থাকিলেও বিন্যাস-সংখ্যা নির্ণয়ে উপরের সূত্রটি প্রযোজ্য।

2·13. পুনরাবৃত্তি-ঘটিত বিন্যাস।

n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে r-সংখ্যকটি লইয়া বিন্যাস রচনা করিলে প্রতিটি বিন্যাসে উক্ত n-সংখ্যক বস্তুর প্রত্যেকটিরই একবার, দুইবার,…r-সংখ্যকবার পর্য্যন্ত থাকা সম্ভব হইলে, যে বিন্যাসগুলি গঠিত হইবে, তাহাদের সংখ্যা নির্ণয়।

[*To find the number of permutations of n different things taken r at a time, when each may occur once, twice,... up to r times in any permutation.*]

n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুকে n-সংখ্যক বিভিন্ন অক্ষর দ্বারা সূচিত কর। বিন্যাস-গুলির প্রত্যেকটিতে বস্তুগুলির প্রত্যেকটি এক, দুই,…… অথবা r-সংখ্যকবার থাকিতে পারে বলিয়া উক্ত r-সংখ্যক অক্ষরের প্রত্যেকটি একবার, দুইবার,.... r-সংখ্যকবার আছে।

স্পষ্টই, উক্ত n-সংখ্যক বিভিন্ন অক্ষর দ্বারা যে সকল বিভিন্ন উপায়ে r-সংখ্যক স্থান পূর্ণ করা যাইতে পারে তাহাদের সংখ্যাই হইবে নির্ণেয় বিন্যাস-সংখ্যা, কেবলমাত্র মনে রাখিতে হইবে, এইরূপে স্থান পূর্ণ করিবার সময়ে অক্ষরগুলির প্রত্যেকটিকে একবার, দুইবার,···· অথবা r-সংখ্যকবার লওয়া যাইতে পারে।

n-সংখ্যক বিভিন্ন অক্ষরের যে-কোনটিকেই প্রথম স্থানে রাখা যাইতে পারে বলিয়া প্রথম স্থানটি **n-সংখ্যক** বিভিন্ন উপায়ে পূর্ণ করা যাইতে পারে। এই n-সংখ্যক বিভিন্ন উপায়ের যে-কোন এক উপায়ে প্রথম স্থানটিকে পূর্ণ করিবার পরে (অর্থাৎ যে-কোন একটি অক্ষরকে প্রথম স্থানে বসাইবার পরে) দ্বিতীয় স্থানটিকেও **n-সংখ্যক** বিভিন্ন উপায়ে পূর্ণ করা যাইতে পারে, কারণ যে অক্ষরটিকে প্রথম স্থানে বসানো হইয়াছে তাহার আরও অন্ততঃ $(r-1)$-সংখ্যকটি অবশিষ্ট আছে বলিয়া তাহাকেও পুনরায় দ্বিতীয় স্থানে বসানো যায়। অতএব, প্রথম স্থান পূর্ণ করিবার প্রত্যেক উপায়ের সহিত দ্বিতীয় স্থান পূর্ণ করিবার প্রত্যেকটি উপায়কে সংযুক্ত করা যায় বলিয়া, প্রথম দুইটি স্থান $\mathbf{n \times n}$ বা $\mathbf{n^2}$-সংখ্যক বিভিন্ন উপায়ে পূর্ণ করা যাইতে পারে। এইরূপে প্রথম তিনটি স্থান $\mathbf{n^3}$-সংখ্যক বিভিন্ন উপায়ে পূর্ণ করা যায়। যত-সংখ্যক স্থান পূর্ণ করা হয়, n-এর সূচকও সেই সংখ্যা ইহা লক্ষ্য রাখিয়া, এইরূপে অগ্রসর হইলে, স্পষ্টই দেখা যাইতেছে যে, যে সকল বিভিন্ন উপায়ে r-সংখ্যক স্থান পূর্ণ করা যাইতে পারে তাহাদের সংখ্যা $\mathbf{n^r}$.

অতএব, নির্ণেয় বিন্যাস-সংখ্যা $=\mathbf{n^r}$.

উদা. 1. How many different words can be formed out of the letters of the word *Constantinople* ? In how many of these will the three n's be consecutive letters ?

প্রদত্ত শব্দে মোট 14টি অক্ষর আছে এবং ইহাদের মধ্যে 2টি o, 3টি n, 2টি t এবং অবশিষ্ট 7টি পরস্পর ভিন্ন।

$$\therefore \text{ নির্ণেয় শব্দ-সংখ্যা} = \frac{\lfloor 14}{\lfloor 2 \lfloor 3 \lfloor 2}$$
$$= 14.13.12.11.10.9.8.7.6.5$$
$$= \mathbf{3632428800.}$$

3টি n সর্ব্বদাই পাশাপাশি থাকিলে, উহাদিগকে একটি অক্ষর মনে করিয়া বিন্যাস রচনা করিলে, নির্ণেয় শব্দ-সংখ্যা পাওয়া যাইবে। অতএব, এক্ষেত্রে মোট অক্ষর-সংখ্যা হইবে 12 এবং ইহাদের মধ্যে 2টি o এবং 2টি t.

$$\therefore \text{ নির্ণেয় শব্দ-সংখ্যা} = \frac{\lfloor 12}{\lfloor 2 \lfloor 2} = 12.11.10.9.8.7.6.5.3.2.$$
$$= \mathbf{119750400.}$$

উদা. 2. There are fifteen rowing clubs ; two of the clubs have *each* three boats on the river, five others have *each* two, and the remaining eight have *each* one ; find an expression for the number of different lists that can be formed of the order of the 24 boats, observing that the second boat of a club must occur after the first and the third after the second.

প্রদত্ত শর্ত্তানুসারে, মোট যতগুলি তালিকা রচনা করা সম্ভব তাহাদের সংখ্যা-জ্ঞাপক রাশিকে x দ্বারা সূচিত কর। এখন, পনেরটি সঙ্ঘকে $a_1, a_2, \ldots, a_{15}$ দ্বারা সূচিত করিয়া, মনে কর, a_1 এবং a_2 সঙ্ঘের প্রত্যেকের তিনখানি করিয়া নৌকা আছে, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7 সঙ্ঘগুলির প্রত্যেকের দুইখানি করিয়া নৌকা আছে এবং অন্যান্য সঙ্ঘগুলির প্রত্যেকের একখানি করিয়া নৌকা আছে। তালিকাগুলিতে কোন সঙ্ঘেরই দ্বিতীয় নৌকা প্রথম নৌকার পূর্ব্বে এবং তৃতীয় নৌকা প্রথম বা দ্বিতীয় নৌকার পূর্ব্বে থাকিতে পারে না বলিয়া ঐ xটি তালিকার কোন তালিকাতেই $a_1, a_2, \ldots a_7$ প্রভৃতি সঙ্ঘগুলির কোনটিরই নৌকাগুলির স্থান পরস্পর বিনিময় করিয়া লেখা যাইবে না। কিন্তু প্রদত্ত শর্ত্তটির উল্লেখ না থাকিলে, অন্যান্য সকল নৌকার স্থান অপরিবর্ত্তিত রাখিয়া, কেবলমাত্র a_1 সঙ্ঘের নৌকা তিনখানির মধ্যে বিন্যাস গঠন করিলে, xটি তালিকার প্রত্যেক তালিকা হইতে $\lfloor 3$-সংখ্যক নূতন তালিকা পাওয়া

যাইবে ; সুতরাং, xটি তালিকা হইতে $x \times \lfloor 3$টি নূতন তালিকা পাওয়া যাইবে। আবার, শর্তের উল্লেখ না থাকিলে, এই $x \times \lfloor 3$টি নূতন তালিকার প্রত্যেকটিতে অন্য সকল নৌকার স্থান অপরিবর্তিত রাখিয়া কেবলমাত্র a_2 সঙ্ঘের নৌকা তিনখানির মধ্যে বিন্যাস গঠন করিলে $x \times \lfloor 3$টি তালিকার প্রত্যেকটি হইতে $\lfloor 3$-সংখ্যক নূতন তালিকা পাওয়া যাইবে ; সুতরাং, $x \times \lfloor 3$টি তালিকা হইতে $x \times \lfloor 3 \times \lfloor 3$টি নূতন তালিকা পাওয়া যাইবে। এইরূপে অগ্রসর হইলে দেখা যায় যে, কোন শর্তের উল্লেখ না থাকিলে, মোট $x \times \lfloor 3 \times \lfloor 3 \times \lfloor 2 \times \lfloor 2 \times \lfloor 2 \times \lfloor 2 \times \lfloor 2$ গুলি তালিকা পাওয়া যাইবে। আবার, ইহাও সুস্পষ্ট যে, কোন শর্তের উল্লেখ না থাকিলে, 24 খানি নৌকার সবগুলিকে লইয়া বিন্যাস গঠন করিয়া মোট $\lfloor 24$-সংখ্যক তালিকা পাওয়া যাইবে।

$$\therefore \quad x \times \lfloor 3 \times \lfloor 3 \times \lfloor 2 \times \lfloor 2 \times \lfloor 2 \times \lfloor 2 \times \lfloor 2 = \lfloor 24 ;$$

$$\therefore \quad x = \frac{\lfloor 24}{\lfloor 3 \times \lfloor 3 \times \lfloor 2 \times \lfloor 2 \times \lfloor 2 \times \lfloor 2 \times \lfloor 2} = \frac{\lfloor 24}{(\lfloor 3)^2 (\lfloor 2)^5}.$$

দ্রষ্টব্য : প্রদত্ত শর্তানুসারে তালিকা প্রস্তুত করিলে দেখা যায় যে, কোন তালিকাতেই a_1, a_2 প্রভৃতি কোন সঙ্ঘেরই স্ব স্ব নৌকাগুলির মধ্যে পরস্পর স্থান-বিনিময় করাইয়া নূতন বিন্যাস রচনা করা সম্ভব নহে। অতএব, মনে করা যাইতে পারে প্রত্যেকটি সঙ্ঘের বিভিন্ন নৌকাগুলি পরস্পর বিভিন্ন নহে, একই, কিন্তু অন্য সকল নৌকা হইতে বিভিন্ন। তাহা হইলে দেখা যাইতেছে, 24 খানা নৌকার মধ্যে a_1 সঙ্ঘের নৌকা তিনখানি একই, কিন্তু অন্য সঙ্ঘগুলির নৌকাগুলি হইতে ভিন্ন ; a_2 সঙ্ঘের নৌকা তিনখানি একই, কিন্তু অন্য সঙ্ঘগুলির নৌকাগুলি হইতে ভিন্ন ; এইরূপ, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7 সঙ্ঘের প্রত্যেকটির দুইখানি নৌকা পরস্পর অভিন্ন, কিন্তু অন্য সবগুলি হইতে ভিন্ন ; এবং বাকী আটটি সঙ্ঘের প্রত্যেকটির এক একখানি নৌকা পরস্পর এবং অন্যান্য সবগুলি হইতে ভিন্ন। অতএব,

$$x = \frac{\lfloor 24}{(\lfloor 3)^2 (\lfloor 2)^5}.$$

উদা. 3. In how many other ways can the letters of the word *multiple* be arranged,

(1) without changing the order of the vowels ;

(2) keeping the position of the vowels fixed ;

(3) without changing the relative order of vowels and consonants ?

(1) এস্থলে, প্রদত্ত শর্ত্তানুসারে গঠিত বিন্যাসসমূহের কোনটিতেই স্বরবর্ণক্রম পরিবর্ত্তন নিষিদ্ধ বলিয়া স্বরবর্ণ তিনটির স্থান পরস্পর বিনিময় করাইয়া নূতন বিন্যাস রচনা করা সম্ভব নহে। অতএব, এক্ষেত্রে পরস্পর বিভিন্ন স্বরবর্ণ তিনটিকে কার্য্যতঃ একই এবং পরস্পর অভিন্ন মনে করা যাইতে পারে। তাহা হইলে, মোট ৪টি অক্ষরের 2টি l এবং কার্য্যতঃ অভিন্ন বিবেচ্য 3টি স্বরবর্ণ ;

$\therefore$ মোট বিন্যাস-সংখ্যা $=\dfrac{\underline{|8}}{\underline{|3}\,\underline{|2}}=8.7.6.5.2=3360.$

কিন্তু প্রদত্ত *multiple* শব্দটিই একটি বিন্যাস বলিয়া,

পুনর্বিন্যাস-সংখ্যা $=3360-1=$ **3359.**

(2) স্বরবর্ণ তিনটির স্থান স্থির, অপরিবর্ত্তিত থাকিবে বলিয়া এক্ষেত্রে 2টি l-যুক্ত বাকী 5টি ব্যঞ্জনবর্ণ লইয়া বিন্যাস গঠন করিতে হইবে।

$\therefore$ মোট বিন্যাস-সংখ্যা $=\dfrac{\underline{|5}}{\underline{|2}}=60.$

$\therefore$ নির্ণেয় পুনর্বিন্যাস-সংখ্যা $=60-1=$ **59.**

(3) বিন্যাসগুলিতে স্বরবর্ণ এবং ব্যঞ্জনবর্ণের আপেক্ষিক অবস্থান সর্বদাই পূর্ব্ববৎ অর্থাৎ প্রথমে 'multiple' শব্দটিতে যেমন প্রথম, তৃতীয়, চতুর্থ, ষষ্ঠ ও সপ্তম স্থানে ব্যঞ্জনবর্ণ এবং দ্বিতীয়, পঞ্চম ও অষ্টম স্থানে স্বরবর্ণ ছিল সেইরূপই থাকিবে।

এখন, স্বরবর্ণ তিনটিকে উক্ত নির্দ্দিষ্ট স্থান তিনটিতে $\underline{|3}$ বিভিন্ন উপায়ে রাখা যায় এবং ব্যঞ্জনবর্ণ 5টির মধ্যে 2টি l বলিয়া উহাদিগকে উক্ত নির্দ্দিষ্ট 5টি স্থানে $\dfrac{\underline{|5}}{\underline{|2}}$ বিভিন্ন উপায়ে রাখা যায়। সুতরাং, স্বরবর্ণ তিনটির বিন্যাসের $\underline{|3}$ বিভিন্ন উপায়ের প্রত্যেকটির সহিত ব্যঞ্জনবর্ণ 5টির বিন্যাসের $\dfrac{\underline{|5}}{\underline{|2}}$ বিভিন্ন উপায়ের প্রত্যেকটি সংযুক্ত করা যায় বলিয়া মোট বিন্যাস-সংখ্যা হইবে

$$\underline{|3}\times\frac{\underline{|5}}{\underline{|2}}=360\ ;$$

$\therefore$ নির্ণেয় মোট পুনর্বিন্যাস-সংখ্যা $=360-1=$ **359.**

উদা. 4. How many numbers greater than a million can be formed with the digits 2, 3, 0, 3, 4, 2, 3 ?

সংখ্যাগুলি এক মিলিয়ন (নিযুত) অপেক্ষা বৃহত্তর বলিয়া, উহাদের প্রত্যেকটিই

সাত অথবা সাতের অধিক অঙ্কবিশিষ্ট হইবে। কিন্তু সাতটি অঙ্ক দেওয়া আছে ; অতএব, সবগুলি অঙ্ক লইয়াই সংখ্যা গঠন করিতে হইবে।

এখন, অঙ্কগুলির মোট সংখ্যা 7 এবং ইহাদের মধ্যে দুইটি 2 ও তিনটি 3 আছে ; সুতরাং, অঙ্কগুলির সবগুলি লইয়া গঠিত মোট বিন্যাস-সংখ্যা

$$=\frac{\lfloor 7}{\lfloor 2 \lfloor 3}=420.$$

এই 420টি বিন্যাসের কতকগুলির আদিতে 0 আছে ; ইহারা নিযুতের চেয়ে বৃহত্তর সংখ্যা নহে বলিয়া ইহাদিগকে বাদ দিতে হইবে। যে সকল বিন্যাসের আদিতে 0 আছে তাহাদের সংখ্যা নির্ণয় করিতে হইলে, 0 কে প্রথম স্থানে রাখিয়া বাকী ছয়টি স্থান বাকী ছয়টি অঙ্ক দ্বারা কত বিভিন্ন উপায়ে পূর্ণ করা যায়, তাহাই নির্ণয় করিতে হয়। বাকী 6টি অঙ্কের দুইটি 2 এবং তিনটি 3.

∴ যে সকল বিন্যাসের আদিতে 0 আছে তাহাদের সংখ্যা

$$=\frac{\lfloor 6}{\lfloor 2 \lfloor 3}=60.$$

∴ নির্ণেয় এক মিলিয়ন অপেক্ষা বৃহত্তর সংখ্যাগুলির সংখ্যা

$$=420-60=\mathbf{360}.$$

উদা. 5. In how many ways can the letters of the word '*arrange*' be arranged ? How many arrangements can be made, (*a*) if the two *r*'s are not allowed to come together, (*b*) if neither the two *r*'s nor the two *a*'s are allowed to come together ?

এস্থলে মোট 7টি অক্ষরের মধ্যে 2টি r, 2টি a এবং বাকী অক্ষরগুলি পরস্পর এবং অন্য সকল অক্ষর হইতে ভিন্ন।

∴ নির্ণেয় বিন্যাস-সংখ্যা $=\frac{\lfloor 7}{\lfloor 2 \lfloor 2}=7.6.5.2.3=\mathbf{1260}.$

(*a*) যে সকল বিন্যাসে r দুইটি একত্র নাই তাহাদের সংখ্যা মোট বিন্যাস-সংখ্যা, 1260 হইতে যে সকল বিন্যাসে উহারা একত্র আছে তাহাদের সংখ্যা বিয়োগ করিলেই পাওয়া যাইবে।

যে সকল বিন্যাসে r দুইটি একত্র আছে তাহাদের সংখ্যা নির্ণয় করিতে হইলে, r দুইটিকে বন্ধনীভুক্ত করিয়া একটি অক্ষর মনে করিতে হয়। এইরূপ করিলে অক্ষরগুলি হইল $a, (rr), a, n, g, e$; ইহাদের সংখ্যা 6 এবং 6টির মধ্যে দুইটি a. ইহাদের সবগুলি লইয়া গঠিত বিন্যাস-সংখ্যাই নির্ণেয় বিন্যাস-সংখ্যা।

∴ যে সকল বিন্যাসে 2টি r একত্র থাকে তাহাদের সংখ্যা

$$=\frac{\lfloor 6}{\lfloor 2}=6.5.4.3=360.$$

∴ যে সকল বিন্যাসে দুইটি r একত্র নাই তাহাদের সংখ্যা

$$=1260-360=\mathbf{900}.$$

(*b*) *arrange* শব্দটির সবগুলি অক্ষর লইয়া বিন্যাস রচনা করিলে যে 1260টি বিন্যাস পাওয়া যায় তাহাদিগকে নিম্নে বর্ণিত চারভাগে ভাগ করিয়া রাখা যায় ঃ

(*i*) দুইটি r অথবা দুইটি a কখনই পাশাপাশি থাকিবে না, এইরূপ বিন্যাস-সমূহ ; মনে কর, উহাদের সংখ্যা N ;

(*ii*) দুইটি r-ও পাশাপাশি থাকিবে, দুইটি a-ও পাশাপাশি থাকিবে, এইরূপ বিন্যাসসমূহ ; মনে কর, ইহাদের সংখ্যা l ;

(*iii*) কেবলমাত্র দুইটি r পাশাপাশি থাকিবে, কিন্তু দুইটি a পাশাপাশি থাকিবে না, এইরূপ বিন্যাসসমূহ ; মনে কর, ইহাদের সংখ্যা m ;

(*iv*) কেবলমাত্র দুইটি a পাশাপাশি থাকিবে, কিন্তু দুইটি r পাশাপাশি থাকিবে না, এইরূপ বিন্যাসসমূহ ; মনে কর, ইহাদের সংখ্যা n.

তাহা হইলে, $N+l+m+n=1260$,

বা, $N=1260-(l+m+n)$.

যে সকল বিন্যাসে 2টি r পাশাপাশি থাকে এবং 2টি a-ও পাশাপাশি থাকে, তাহাদিগের সংখ্যা দুইটি r কে বন্ধনীভুক্ত করিয়া সকল অক্ষর হইতে ভিন্ন একটি অক্ষর এবং দুইটি a কে বন্ধনীভুক্ত করিয়া সকল অক্ষর হইতে ভিন্ন আর একটি অক্ষর মনে করিলে, (aa), (rr), n, g, e, এই যে পাঁচটি বিভিন্ন অক্ষর পাওয়া যায়, তাহাদের সবগুলিকে লইয়া গঠিত বিন্যাস-সংখ্যার সমান।

∴ $l=\lfloor 5=120.$ ... ... (1)

$l+m=$ যে সকল বিন্যাসে 2টি r পাশাপাশি থাকে, তাহাদের সংখ্যা

= 2টি r কে বন্ধনীভুক্ত করিয়া অন্য সকল অক্ষর হইতে ভিন্ন একটি অক্ষর মনে করিলে, a, (rr), a, n, g, e এই যে ছয়টি অক্ষর পাওয়া যায় তাহাদের সবগুলি লইয়া গঠিত বিন্যাসসমূহের সংখ্যা

$$=\frac{\lfloor 6}{\lfloor 2}=6.5.4.3.=360. \quad \ldots \quad \ldots \quad (2)$$

এইরূপে, $l+n=360.$ ... ... (3)

(2) ও (3) এর যোগফল হইতে (1) বিয়োগ করিয়া,

$$\therefore \quad l+m+n=(l+m)+(l+n)-l$$
$$=360+360-120=600.$$

$$\therefore \quad N=1260-(l+m+n)=1260-600=\mathbf{660}.$$

উদা. 6. If there be x things to be given to n persons, show that n^x will represent the total number of different ways in which they may be given.

x-সংখ্যক জিনিসের যে-কোন একটি জিনিস n-সংখ্যক বিভিন্ন উপায়ে লোকগুলিকে দেওয়া যায় ; কারণ n-সংখ্যক লোকের যে-কোন জনকেই জিনিসটি দেওয়া যায়। এই জিনিসটি n-সংখ্যক বিভিন্ন উপায়ের যে-কোন এক উপায়ে দেওয়া হইলে, অর্থাৎ একজনকে দেওয়া হইলে আর একটি জিনিসও n-সংখ্যক বিভিন্ন উপায়ে লোকগুলিকে দেওয়া যায় ; কারণ প্রথম জিনিসটি যে লোক পাইয়াছে, এ জিনিসটিও সেই লোকের পাইবার বাধা নাই বলিয়া, n-সংখ্যক বিভিন্ন লোকের যে-কোন জনকেই এই জিনিসটিও দেওয়া যায়। এখন, প্রথম জিনিসটি দিবার n-সংখ্যক বিভিন্ন উপায়ের প্রত্যেকটির সহিত দ্বিতীয় জিনিসটি দিবার n-সংখ্যক বিভিন্ন উপায়ের প্রত্যেকটিকে সংযুক্ত করা যায় বলিয়া, দুইটি জিনিস $n \times n$ বা n^2 বিভিন্ন উপায়ে দেওয়া যায়। এইরূপে দুইটি জিনিস দিবার n^2 বিভিন্ন উপায়ের প্রত্যেক উপায়ের সহিত তৃতীয় একটি জিনিস দিবার n-সংখ্যক উপায়ের প্রত্যেকটিকে সংযুক্ত করা যায় বলিয়া, তিনটি জিনিস $n^2 \times n$ বা n^3 বিভিন্ন উপায়ে দেওয়া যায়।

এইরূপে অগ্রসর হইয়া দেখা যায় যে, n-সংখ্যক লোকের মধ্যে x-সংখ্যক জিনিস যত উপায়ে দেওয়া যায় তাহাদের সংখ্যা $=\mathbf{n^x}$.

উদা. 7. If there be two kinds of balls, black and white, and at least 4 of each kind, in how many different ways can a ball be put in each of 4 different boxes ?

কালো অথবা সাদা যে-কোন একটিকেই প্রথম বাক্সে রাখা যায় বলিয়া, প্রথম বাক্সে দুই উপায়ে একটি বল রাখা যায় ; আবার, প্রথম বাক্সে কালো অথবা সাদা যে-কোন রঙের বলই রাখা হউক না কেন, অর্থাৎ, প্রথম বাক্সে যে-কোন দুই উপায়ের এক উপায়ে একটি বল রাখা হইলে, দ্বিতীয় বাক্সেও সাদা অথবা কালো যে-কোন একটি বল রাখা যায়, অর্থাৎ দ্বিতীয় বাক্সে দুই উপায়ে

একটি বল রাখা যায়। এখন, প্রথম বাক্সে বল রাখার দুই উপায়ের প্রত্যেক উপায়ের সহিত দ্বিতীয় বাক্সে বল রাখার দুই উপায়ের প্রত্যেক উপায় সংযুক্ত করা যায় বলিয়া, দুইটি বাক্সে 2×2 বা 2^2 বিভিন্ন উপায়ে বল রাখা যায়। আবার, প্রথম দুই বাক্সে 2^2 বিভিন্ন উপায়ের যে-কোন এক উপায়ে বল রাখা হইলে, তৃতীয় বাক্সে 2 উপায়ে বল রাখা যায়, এবং প্রথম দুই বাক্সে 2^2 উপায়ে বল রাখার প্রত্যেকটি উপায়ের সহিত তৃতীয় বাক্সে বল রাখার 2 উপায়ের প্রত্যেকটি উপায় সংযুক্ত করা যায় বলিয়া, ঐ তিনটি বাক্সে $2^2 \times 2$ বা 2^3 বিভিন্ন উপায়ে একটি একটি বল রাখা যায়। আবার, চতুর্থ বাক্সেও 2 বিভিন্ন উপায়ে একটি বল রাখা যায়, এবং তিনটি বাক্সে বল রাখিবার 2টি বিভিন্ন উপায়ের প্রত্যেকটির সহিত চতুর্থ বাক্সটিতে একটি বল রাখিবার 2টি বিভিন্ন উপায়ের প্রত্যেকটিকে সংযুক্ত করা যায় বলিয়া, যত বিভিন্ন উপায়ে চারটি বাক্সে একটি একটি করিয়া বল রাখা যায় তাহাদের সংখ্যা $= 2^3 \times 2 = 2^4 = 16$.

প্রশ্নমালা 9

1. Find the number of permutations of the letters in *India*. [Calcutta, 1919, '20]

2. Find the number of permutations of the letters of the word *Calcutta*, taken all together. [Calcutta, 1916]

3. How many different words can be made out of the letters which form the word *Allahabad* ? In how many of these will the vowels occupy the even places ?

4. A library has 5 copies of one book, 4 copies of each of two books, 6 copies of each of three books, and single copies of eight books. In how many ways can all the books be arranged ? [Calcutta, 1934]

5. Find how many words could be made from the letters of the word *Orion*, supposing that (i) the letters may stand in any order, and (ii) the two consonants may not stand together.

6. In how many ways can the letters of the word *rationalisation* be re-arranged ? In how many of the new arrangements will the 2 *t*'s be together, and in how many will the 3 *a*'s occupy the first three consecutive positions ?

7. In how many ways can the letters of the word *Utilitarianism* be re-arranged without changing the position of any of the vowels ?

8. In how many ways can the letters of the word *Civilisation* be re-arranged without changing the relative order of vowels and consonants ?

9. You are given 12 balls of which 4 are red, 3 black and 5 white ; in how many ways can you arrange the balls so that no two white balls may occupy contiguous positions ?

10. A train consists of 12 carriages, of which 5 are first class, 4 second and the rest third class. In how many different ways may the carriages be arranged ? In how many different ways may they be arranged so that all the first class may be together ?

11. How many different numbers each of six digits can be formed by means of the digits of the number 121,202 ?

12. How many numbers can be formed with the digits 9, 8, 5, 2, 3, 4, 3, 2, 5, 8, 5, 2, 3 taken all together, so that the even digits may always occupy the even places ?

13. Of 15 balls of which some are white and the rest black, how many should be white so that the number of ways in which the balls can be arranged in a row may be the greatest possible ?

14. In how many ways can 3 prizes be given away to 7 boys when each boy is eligible for any of the prizes ?

15. There are 3 candidates for a Professorship, and one is to be elected by the votes of 5 men ; in how many ways can the votes be given ?

16. If there be 4 different steamers plying between Calcutta and Chandbali, all of them leaving Calcutta together, in how many ways can a gentleman make 7 journeys from Calcutta to Chandbali ?

17. In the preceding example what would be the answer if one of the steamers were in dock for repairs when the gentleman made his 3rd journey and if two of them were in dock when he made his 5th journey, on every other occasion all the 4 steamers were plying together ?

18. Sixteen men compete with one another in running, swimming and riding. How many prize-lists could be made if there were altogether 6 prizes of different values, one for running, 2 for swimming and 3 for riding ?

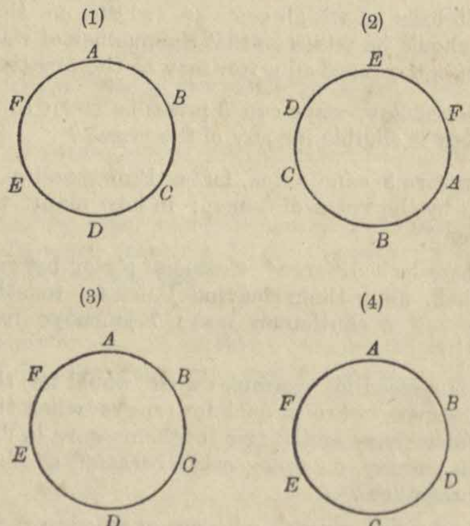
19. A guardian with 6 wards wishes every one of them to study either Law or Medicine or Engineering ; in how many ways can he make up his mind with regard to the education of

his wards if everyone of them be fit for any of those branches of study ?

20. There are m men and n monkeys, n being greater than m. If a man may have any number of monkeys, in how many ways may every monkey have a master ?

2·14. বৃত্তাকারে সজ্জিত বস্তুসমূহের বিন্যাস (Circular Permutations) : n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুকে বৃত্তাকারে সাজাইলে যে সকল বিভিন্ন বিন্যাস পাওয়া যায় তাহাদের সংখ্যা নির্ণয়।

বিভিন্ন বস্তুকে কোন বৃত্ত বা বক্র রেখা দ্বারা বদ্ধ ক্ষেত্রের পাশে পাশে রাখিয়া সাজাইলে যে সকল বিভিন্ন বিন্যাস পাওয়া যায় তাহাদের মধ্যে বস্তুসমূহের একই আপেক্ষিক অবস্থান-বিশিষ্ট বিন্যাসসমূহকে অভিন্ন এবং বিভিন্ন আপেক্ষিক



অবস্থান-বিশিষ্ট বিন্যাসসমূহকে ভিন্ন বিন্যাসরূপে গণ্য করা হয়। যেমন, কতকগুলি বিভিন্ন বস্তুকে A, B, C, D, E, F দ্বারা সূচিত করিলে, বস্তুসমূহের একই আপেক্ষিক অবস্থান-বিশিষ্ট বিন্যাস দুইটি হইবে অভিন্ন ; কিন্তু বস্তুগুলির বিভিন্ন আপেক্ষিক অবস্থান-বিশিষ্ট বিন্যাস দুইটি হইবে বিভিন্ন।

A হইতে আরম্ভ করিয়া, ঘড়ির কাঁটা যেদিকে চলে সেদিকে বৃত্তটির পাশে পাশে চলিলে পূর্ব্বপৃষ্ঠার চিত্র (1) ও (2) এ পর পর একই অক্ষর পাওয়া যায় বলিয়া বিন্যাস দুইটিকে অভিন্ন বিন্যাসরূপে গণ্য করা হয়, কিন্তু চিত্র (3) ও (4) এ এরূপ পাওয়া যায় না বলিয়া, উহাদিগকে দুইটি ভিন্ন বিন্যাসরূপে গণ্য করা হয়।

অতএব, কতকগুলি বিভিন্ন বস্তুকে বৃত্তাকারে সজ্জিত করিয়া বিভিন্ন বিন্যাস পাইতে হইলে, ঐ সকল বস্তুর যে-কোন একটির অবস্থান স্থির রাখিয়া অবশিষ্ট সকলগুলিকে সম্ভাব্য সকল প্রকার বিভিন্ন উপায়ে সাজাইতে হয়।

অতএব, n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুর একটির অবস্থান স্থির রাখিয়া অবশিষ্ট $(n-1)$-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু দ্বারা যে $|\underline{n-1}$-সংখ্যক বিন্যাস রচনা করা যায়, তাহাই হইল n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুকে বৃত্তাকারে সাজাইবার মোট বিন্যাস-সংখ্যা।

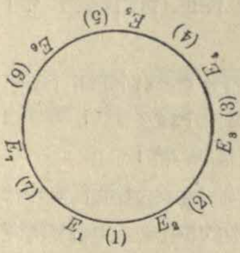
দ্রষ্টব্য 1. অনেক বীজগণিতে সারিতে সারিতে সাজানোকে রৈখিক বিন্যাস (linear permutations) এবং বৃত্তাকারে সাজানোকে বৃত্তাকার বিন্যাস (Circular permutations) বলা হইয়াছে।

দ্রষ্টব্য 2. উপরের অনুচ্ছেদে ঘড়ির কাঁটা যেদিকে ঘুরে সেইদিকে এবং ইহার উল্টাদিকে একই অক্ষরসমূহ দ্বারা গঠিত বিন্যাস দুইটিকে স্বতন্ত্র গণ্য করা হইয়াছে; কিন্তু উহাদিগকে অভিন্ন মনে করিলে, মোট বিন্যাস হইবে $\frac{1}{2}|\underline{n-1}$. যেমন, n-সংখ্যক বিভিন্ন আকারের বা বিভিন্ন রঙের ফুল লইয়া মালা রচনা করিলে $\frac{1}{2}|\underline{n-1}$-সংখ্যক বিভিন্ন নমুনা পাওয়া যাইবে; কারণ, কোন নমুনায়, ঘড়ির কাঁটা যেদিকে ঘুরে সেদিকে ফুলগুলি যে-ক্রমে সজ্জিত থাকে, অন্য এক নমুনায় যদি অনুরূপ ফুলগুলি ঘড়ির কাঁটা যেদিকে ঘুরে তার উল্টাদিকে একইক্রমে সজ্জিত থাকে, তবে মালাটিকে ঘুরাইয়া ধরিলে নমুনা দুইটির মধ্যে কোন পার্থক্য থাকে না বলিয়া, নমুনা দুইটিকে অভিন্ন ধরা হয়।

দ্রষ্টব্য 3. n-সংখ্যক ব্যক্তি কত বিভিন্ন উপায়ে বৃত্তাকারে বসিতে পারেন, ইহা না বলিয়া n-সংখ্যক ব্যক্তি কত বিভিন্ন উপায়ে একটি গোল টেবিলের চারিপাশে বসিতে পারেন বলিলে, উত্তর হইবে $|\underline{n}$, $|\underline{n-1}$ নয়; কারণ, এক্ষেত্রে ব্যক্তিসমূহের পরস্পরের আপেক্ষিক অবস্থান নহে, টেবিলের সহিত ঐ ব্যক্তি-গণের আপেক্ষিক অবস্থান বিবেচনা করিতে হয়।

উদা. 1. In how many ways can 7 Englishmen and 7 Americans sit down at a round table, no two Americans being in consecutive positions ?

একজন ইংরেজের অবস্থান স্থির রাখিয়া অবশিষ্ট 6 জন ইংরেজকে সম্ভাব্য সকল উপায়ে টেবিলটির পাশে পাশে বসাইলে মোট $\lfloor 6$ বা 720টি বিন্যাস পাওয়া যাইবে।



পার্শ্বস্থ চিত্রে E দ্বারা একজন ইংরেজ সূচিত হইতেছে এবং 1, 2, 3,...... ইত্যাদি এক একজন আমেরিকানকে সূচিত করিতেছে।

এই 720টি বিন্যাসের প্রতিটি বিন্যাসে পাশাপাশি উপবিষ্ট দুইজন ইংরেজের মাঝখানে একজন আমেরিকানকে বসাইলে, 7 জন আমেরিকানকে ঐরূপ 7টি স্থানে বসানো যাইবে এবং আমেরিকানদেরও কোন দুইজনই একত্র বসিবে না। এখন, 7 জন আমেরিকানকে ঐ 7টি স্থানে $\lfloor 7$ বিভিন্ন উপায়ে বসানো যায়; এবং ইংরেজদের বসিবার প্রতিটি বিন্যাস হইতে আমেরিকানদের বসিবার $\lfloor 7$-সংখ্যক বিভিন্ন বিন্যাস পাওয়া যায়। ইংরেজদের বসিবার $\lfloor 6$-সংখ্যক বিন্যাস আছে; অতএব, মোট বিন্যাস-সংখ্যা

$$=\lfloor 6 \times \lfloor 7 = \mathbf{3628800}.$$

উদা. 2. In how many ways can 8 persons be seated at a round table, so that all shall not have the same neighbours in any two arrangements ?

8 ব্যক্তিকে টেবিলের পাশে পাশে গোল করাইয়া বসাইলে $\lfloor 8-1$ বা $\lfloor 7$-সংখ্যক বিন্যাস পাওয়া যায়। এই সকল বিন্যাসের কোন একটিতে ঐ সকল লোক ঘড়ির কাঁটা যেদিকে ঘুরে সেদিকে যে-ক্রমে উপবিষ্ট থাকে, অপর একটিতে ঐ সকল লোক ঘড়ির কাঁটা যেদিকে ঘুরে তার বিপরীত দিকে একই ক্রমে উপবিষ্ট থাকে; অতএব, এই দুইটি বিন্যাসের একটির যে-কোন লোকের দুইপাশে যে দুইজন লোক থাকিবে, অপরটিতেও ঐ লোকের দুইপাশে একই দুইজন লোক থাকিবে। সুতরাং, শর্তানুসারে, এই দুইটি বিন্যাসকে বিভিন্ন না ধরিয়া অভিন্ন মনে করিতে হইবে। এইরূপ দুইটি বিন্যাসকে অভিন্ন মনে করিলে মোট বিন্যাস-সংখ্যা হইবে $\frac{1}{2}\lfloor 7$ বা $\frac{1}{2} \times 5040 = \mathbf{2520}.$

প্রশ্নমালা 10

1. Find in how many ways can 10 children sit in a merry-go-round relatively to one another. [Calcutta, 1921]

2. In how many ways can 6 persons be seated at a round table, so that all shall not have the same neighbours in any two arrangements ?

3. In how many ways can 5 students of class XI and 5 students of class X be arranged alternately at a round table ?

4. There are $2n$ guests at a dinner party. Supposing that the master and mistress of the house have fixed seats opposite one another, and that there are two specified guests who must not be placed next to one another ; find the number of ways in which the company can be placed.

2·15. n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তু হইতে উহাদের যতগুলি ইচ্ছা লইয়া গঠিত সমবায়সমূহের সংখ্যা নির্ণয়।

[*To find the total number of combinations of n dissimilar things by taking some or all at a time.*]

n-সংখ্যক বিভিন্ন বস্তুকে $a_1, a_2, \ldots\ldots, a_n$ দ্বারা সূচিত করিলে দেখা যায় যে, উক্ত n-সংখ্যক বস্তুর একটি একটি, দুইটি দুইটি, ইত্যাদিরূপে লইয়া এবং সর্ব্বশেষে সবগুলিকে লইয়া উক্ত প্রকারে সম্ভাব্য সকল প্রকার বিভিন্ন সমবায় গঠন করিলে, এই সকল সমবায়ের যে-কোনটিতে a_1 বস্তুটি (1) থাকিতে পারে, অথবা, (2) নাও থাকিতে পারে। অতএব, দেখা যাইতেছে, প্রদত্ত শর্ত্ত অনুসারে গঠিত সমবায়সমূহে a_1 বস্তুটি মাত্র দুই উপায়ে বিবেচিত হইতে পারে :

(1) উহা গৃহীত হইতে পারে, অথবা (2) উহা পরিত্যক্ত হইতে পারে ; এইরূপে a_2 বস্তুটিও দুই উপায়ে বিবেচিত হইতে পারে ; এবং a_1 কে বিবেচনা করিবার প্রত্যেক উপায়ের সহিত a_2 কে বিবেচনা করিবার প্রত্যেকটি উপায় সংযুক্ত করা যায় বলিয়া, ঐ দুই বস্তুকে একসঙ্গে মোট 2×2, বা 2^2-সংখ্যক বিভিন্ন উপায়ে বিবেচনা করা যায়। আবার, a_3 বস্তুটিকে যে দুই উপায়ে বিবেচনা করা যায় তাহার প্রত্যেক উপায়ের সহিত a_1 এবং a_2 কে বিবেচনা করিবার 2^2-সংখ্যক উপায়ের প্রত্যেকটিকে সংযুক্ত করিলে দেখা যায় যে, a_1, a_2, a_3 বস্তু তিনটিকে একসঙ্গে $2^2 \times 2$ বা 2^3 বিভিন্ন উপায়ে বিবেচনা করা যায়। এইরূপে অগ্রসর হইলে, দেখা যায় যে, n-সংখ্যক বস্তুকে একসঙ্গে

2^n-সংখ্যক বিভিন্ন উপায়ে বিবেচনা করা যায়। এখন, উক্ত n-সংখ্যক বস্তুকে একসঙ্গে বিবেচনা করিবার এই সকল বিভিন্ন উপায় হইতেই সবগুলি সমবায় এবং ইহাদের প্রত্যেকটি হইতে একটি সমবায় গঠিত হইয়াছে বলিয়া এবং ঐ 2^n-সংখ্যক বিভিন্ন উপায়ের মধ্যে যেটিতে বস্তুসমূহের প্রত্যেকটিকে দ্বিতীয় উপায়ে যাহাতে বস্তুটি পরিত্যক্ত হইয়াছে এইরূপে বিবেচনা করা হইয়াছে, সেটিতে সমুদায় n-সংখ্যক বস্তুই পরিত্যক্ত হওয়ায়, উহা হইতে কোন সমবায়ই উৎপন্ন হয় না বলিয়া উহাকে বাদ দিয়া মোট সমবায়-সংখ্যা হইবে

$$2^n - 1.$$

দ্রষ্টব্য ঃ উপরের ফল হইতে আমরা দেখিতে পাই

$$^nC_1 + {}^nC_2 + {}^nC_3 + \cdots + {}^nC_n = 2^n - 1.$$

2·16. সবগুলি বিভিন্ন নহে, এরূপ বস্তুসমূহের মোট সমবায়।

(p+q+r+⋯)-সংখ্যক বস্তুর মধ্যে p-সংখ্যক বস্তু একজাতীয় এবং পরস্পর অভিন্ন, q-সংখ্যক বস্তু ভিন্ন একজাতীয়, কিন্তু পরস্পর অভিন্ন, r-সংখ্যক বস্তুও ঐ দুইজাতীয় বস্তু হইতে ভিন্ন অন্য একজাতীয়, কিন্তু পরস্পর অভিন্ন, ইত্যাদিরূপে অন্যান্য জাতীয় বস্তুগুলিও থাকিলে এই সকল বস্তু হইতে একটি একটি করিয়া লইয়া, দুইটি দুইটি করিয়া লইয়া, ইত্যাদিরূপে সর্ব্বশেষে সবগুলিকে লইয়া সম্ভাব্য সকল প্রকার বিভিন্ন সমবায় গঠন করিলে মোট সমবায়-সংখ্যা হইবে

$$(p+1)(q+1)(r+1)\cdots - 1.$$

p-সংখ্যক সমজাতীয় এবং পরস্পর অভিন্ন বস্তু, প্রদত্ত শর্তমতে গঠিত সমবায়সমূহের

(1) কতকগুলিতে একটি করিয়া থাকিতে পারে,

(2) কতকগুলিতে দুইটি করিয়া থাকিতে পারে,

(3) কতকগুলিতে তিনটি করিয়া থাকিতে পারে,

… … … …

… … … …

(p) কতকগুলিতে p-সংখ্যকটি করিয়া থাকিতে পারে,

($p+1$) কতকগুলিতে ঐ বস্তুটি মোটেই না থাকিতে পারে।

অতএব, দেখা গেল, উক্ত p-সংখ্যক বস্তুকে সমবায় গঠনকালে $(p+1)$-সংখ্যক বিভিন্ন উপায়ে বিবেচনা করা যায়।

এইরূপ, q-সংখ্যক সমজাতীয় এবং পরস্পর অভিন্ন বস্তুকে সমবায় গঠনকালে $(q+1)$-সংখ্যক বিভিন্ন উপায়ে বিবেচনা করা যায়।

এখন, p-সংখ্যক সমজাতীয় বস্তুকে বিবেচনা করিবার $(p+1)$-সংখ্যক বিভিন্ন উপায়ের প্রত্যেকটির সহিত q-সংখ্যক সমজাতীয় বস্তুকে বিবেচনা করিবার $(q+1)$-সংখ্যক বিভিন্ন উপায়ের প্রত্যেকটিকে সংযুক্ত করা যায় বলিয়া p এবং q-সংখ্যক সমজাতীয় বস্তুকে সমবায় গঠনকালে মোট $(p+1)(q+1)$-সংখ্যক বিভিন্ন উপায়ে বিবেচনা করা যায়। এইরূপে, p, q, r-সংখ্যক সমজাতীয় বস্তুকে সমবায় গঠনকালে মোট $(p+1)(q+1)(r+1)$-সংখ্যক বিভিন্ন উপায়ে বিবেচনা করা যায়।

এইরূপে অগ্রসর হইলে দেখা যায় যে, সমুদায় বস্তুকে সমবায় গঠনকালে মোট $(p+1)(q+1)(r+1)\cdots$-সংখ্যক বিভিন্ন উপায়ে বিবেচনা করা যায়। অতএব, বস্তুগুলিকে বিবেচনা করিবার এই সকল বিভিন্ন উপায় হইতেই সবগুলি সমবায় এবং ইহাদের প্রত্যেকটি হইতে একটি সমবায় উৎপন্ন হয় বলিয়া এবং উক্ত $(p+1)(q+1)(r+1)\cdots$-সংখ্যক বিভিন্ন উপায়ের মধ্যে যেটিতে প্রত্যেক জাতীয় বস্তুকে উপরিবর্ণিত উপায়সমূহের শেষোক্ত উপায়ে যাহাতে ঐ সমজাতীয় বস্তুর একটিও থাকিবে না এইরূপে বিবেচনা করা হয়, সেটিতে সকল জাতীয় বস্তুই পরিত্যক্ত হওয়ায় উহা হইতে কোন সমবায়ই উৎপন্ন হয় না বলিয়া উহাকে বাদ দিয়া মোট সমবায়-সংখ্যা হইবে

$$(p+1)(q+1)(r+1)\cdots-1.$$

অনুসিদ্ধান্ত। বস্তুগুলি অভিন্ন হইলে, $p=q=r\cdots=1$ হইবে, এবং তখন $p+q+r+\cdots=n$ ধরিয়া, এই n-সংখ্যক বস্তু হইতে 1টি, 2টি,..., n-সংখ্যকটি করিয়া লইয়া গঠিত সমবায়সমূহের সংখ্যা

$$=(1+1)(1+1)(1+1)\cdots n\text{-সংখ্যক উৎপাদক } -1$$

$$=2.2.2\cdots \text{ এইরূপ } n\text{-সংখ্যক উৎপাদক } -1$$

$$=2^n-1.$$ [অনু. 2·15 দ্রষ্টব্য।]

2·17. বিভিন্ন দলে বিভাগ।

(m+n)-সংখ্যক বস্তুকে কত বিভিন্ন উপায়ে যথাক্রমে m-সংখ্যক এবং n-সংখ্যক বস্তু-সংবলিত দুইটি দলে ভাগ করা যায় তাহা নির্ণয় করিতে হইবে।

[*To find the number of ways in which* $m+n$ *things can be divided into two groups containing m and n things respectively.*]

$(m+n)$-সংখ্যক বস্তু হইতে $^{m+n}C_m$-সংখ্যক উপায়ে m-সংখ্যক বস্তু-সংবলিত এক একটি দল গঠন করা যায়, এবং যতবারই এই m-সংখ্যক বস্তু-সংবলিত দল গঠন করা যায়, ততবারের প্রত্যেকবারেই n-সংখ্যক বস্তু পড়িয়া থাকিবে, যাহা হইতে ^nC_n বা 1টি মাত্র উপায়ে n-সংখ্যক বস্তু-সংবলিত দল গঠন করা যায়। অতএব, যে সকল বিভিন্ন উপায়ে m-সংখ্যক এবং n-সংখ্যক বস্তু-সংবলিত দুইটি দুইটি দলে $(m+n)$-সংখ্যক বস্তুকে ভাগ করা যায় তাহাদের সংখ্যা

$$= {}^{m+n}C_m \times 1 = {}^{m+n}C_m = \frac{\lfloor m+n}{\lfloor m \lfloor n}.$$

দ্রষ্টব্য : $n=m$ হইলে, উপরের ফলে $n=m$ বসাইয়া $\frac{\lfloor 2n}{\lfloor m \lfloor n}$ জোড়া দল পাওয়া যায় ; কিন্তু ইহাদের প্রতি $\lfloor 2$ বা 2 জোড়ার একটিতে যে দুই দল থাকে অন্যটিতেও ঐ দুই দলেরই স্থান অদল বদল করা হয় মাত্র বলিয়া ঠিক সেই দুই দলই থাকে ; অতএব, এক্ষেত্রে, $2m$-সংখ্যক বস্তুকে m-সংখ্যক বস্তু-সংবলিত দুইটি দুইটি দলে ভাগ করিবার বিভিন্ন উপায়-সংখ্যা হইবে

$$\frac{\lfloor 2m}{\lfloor 2 . \lfloor m \lfloor m}, \text{ বা, } \frac{1}{\lfloor 2} . \frac{\lfloor 2m}{(\lfloor m)^2}.$$

উদা. 1. How many different sums can be formed with the following coins : a farthing, a penny, a six pence, a shilling, a half-crown, a crown, a half-sovereign and a sovereign ?

এস্থলে মোট 8টি বিভিন্ন মুদ্রা আছে ; এই সকল মুদ্রা হইতে একটি করিয়া বা দুইটি করিয়া, ইত্যাদিরূপে লওয়া যায়।

∴ মোট নির্ব্বাচন-সংখ্যা

$$= {}^8C_1 + {}^8C_2 + {}^8C_3 + {}^8C_4 + {}^8C_5 + {}^8C_6 + {}^8C_7 + {}^8C_8$$
$$= 2^8 - 1 = 256 - 1 = \mathbf{255}.$$

উদা. 2. How many different factors can 42 have ?

কোন সংখ্যার মৌলিক উৎপাদকগুলির প্রত্যেকটিই উহার উৎপাদক, আবার, এইসব মৌলিক উৎপাদকের একাধিকের গুণফলও উহার উৎপাদক।

এখন 42 এর তিনটি মৌলিক উৎপাদক 2, 3 ও 7. এই তিনটি মৌলিক উৎপাদকের এক বা একাধিককে যত বিভিন্ন উপায়ে নির্ব্বাচন করা যায় 42 এর ততগুলিই উৎপাদক হইবে।

$\therefore$ মোট উৎপাদক-সংখ্যা $= {}^3C_1 + {}^3C_2 + {}^3C_3 = 2^3 - 1 = 7.$

কিন্তু এই 7টি উৎপাদকের মধ্যে 42ও আছে, সেটিকে বাদ দিয়া নির্ণেয় উৎপাদক-সংখ্যা $= 7 - 1 = \mathbf{6}.$

উদা. 3. In how many ways can 10 things be divided in three groups of 2, 3 and 5 things respectively ?

10টি জিনিস হইতে 2টি করিয়া নির্ব্বাচন করা যায় ${}^{10}C_2$ উপায়ে ; 2টি জিনিস নির্ব্বাচিত হইবার পরে অবশিষ্ট 8টি জিনিস হইতে 3টি করিয়া নির্ব্বাচন করা যায় ${}^8C_3$ উপায়ে এবং 3টিকে নির্ব্বাচন করিবার পরে অবশিষ্ট 5টি হইতে 5টি করিয়া নির্ব্বাচন করা যায় ${}^5C_5$ উপায়ে।

$\therefore$ 10টি জিনিসকে যথাক্রমে 2, 3 ও 5টি জিনিস-সংবলিত 3টি দলে ভাগ করিবার মোট উপায়-সংখ্যা

$$= {}^{10}C_2 \times {}^8C_3 \times {}^5C_5 = \frac{10 \times 9}{2 \times 1} \times \frac{8 \times 7 \times 6}{3 \times 2 \times 1} \times 1 = 45 \times 56 = \mathbf{2520}.$$

দ্রষ্টব্য : সূত্র-সাহায্যে একবারেও লেখা যায়, যত বিভিন্ন উপায়ে জিনিস-গুলিকে 2, 3 ও 5টি জিনিস-সংবলিত 3টি 3টি দলে ভাগ করিয়া রাখা যায়, তাহাদের সংখ্যা

$$= \frac{\lfloor 10}{\lfloor 2 \lfloor 3 \lfloor 5} = \frac{10.9.8.7.6.\lfloor 5}{2.1.3.2.1.\lfloor 5} = 2520.$$

উদা. 4. (i) In how many ways can 15 different things be divided equally among three persons ?

(ii) In how many ways can 15 different things be divided into three groups of 5 each ?

(i) এস্থলে 15টি বিভিন্ন বস্তুকে 3 ব্যক্তির মধ্যে সমান ভাগে ভাগ করিয়া দিলে প্রত্যেকে 5টি করিয়া বস্তু পাইবে এবং যত বিভিন্ন উপায়ে উহাদের ভাগ করিয়া দেওয়া যায় তাহাদের সংখ্যা

$$= \frac{\lfloor 15}{(\lfloor 5)^3} = \frac{15.14.13.12.11.10.9.8.7.6.\lfloor 5}{5.4.3.2.1.5.4.3.2.1.\lfloor 5} = 14.13.11.9.7.6$$
$$= \mathbf{756756}.$$

(ii) এস্থলে, বিভিন্ন 5টি বস্তু-সংবলিত 3টি 3টি দলে 15টি বস্তুকে ভাগ করিতে হইবে বলিয়া, 3টি 3টি দলের মোট সমবায়-সংখ্যা, অর্থাৎ যত বিভিন্ন

উপায়ে উহাদের লইয়া 5টি বস্তু-সংবলিত 3টি করিয়া দল গঠন করা যায়, তাহাদের সংখ্যা

$$=\frac{\lfloor 15}{(\lfloor 5)^3 \lfloor 3}=\frac{756756}{6}=\mathbf{126126}.$$

প্রশ্নমালা 11

1. A man has 6 friends : in how many ways may he invite one or more of them to dinner ? [C. U. 1950]

2. In how many ways is it possible to draw a sum of money from a bag containing a sovereign, a half-sovereign, a crown, a florin, a shilling, a penny and a farthing ?

3. How many different factors may 4290 have ?

4. In how many ways is it possible to make a selection out of 4 oranges, 6 apples and 7 guavas, all the fruits of the same kind being of same size ?

5. In how many ways can the following books be divided between two students : 3 copies of Tagore's Gitanjali, 5 copies of Bankimchandra's Ananda Math, and 7 copies of Saratchandra's Pather Dabi ?

6. Show that the number of all possible selections of one or more questions from 8 given questions, each having an alternative, is 3^8-1. [C. U. 1918]

7. Prove that the total number of selections that can be made out of the letters '*daddy did a deadly deed*' is 1919. [B. U. 1910]

8. In how many ways can 8 different things be divided between two persons ?

9. In how many ways can 22 people be divided into two cricket teams to play against each other in a friendly game ? [C. U. 1950]

10. Show that the total number of combinations formed by taking some or all of $(p+q+r)$ things of which p are alike, q are alike and the rest are all different is $(p+1)(q+1)2^r-1$.

2·18. বিবিধ প্রশ্ন।

উদা. 1. Find the number of groups and arrangements of the letters of the word *examination*, taken 4 at a time.

শব্দটিতে মোট 11টি অক্ষর (a, a), (i, i), (n, n), e, x, m, t, o আছে; ইহাদের মধ্যে 2টি a, 2টি i, 2টি n এবং 5টি আছে 1টি করিয়া।

এই সকল অক্ষর হইতে 4টি করিয়া লইয়া সমবায় গঠন করিলে, ইহাদের কতকগুলিতে 4টি অক্ষরই বিভিন্ন থাকিতে পারে, আবার কতকগুলিতে সেইরূপ নাও থাকিতে পারে, অতএব, ঐ সকল সমবায়কে নিম্নলিখিত 3 শ্রেণীতে বিভক্ত করা যায়ঃ

(1) 4টি বিভিন্ন অক্ষরযুক্ত সমবায়সমূহ,

(2) 2টি একই প্রকার এবং 2টি বিভিন্ন এইরূপ 4টি অক্ষরযুক্ত সমবায়সমূহ,

(3) 2টি একপ্রকার এবং অপর দুইটি ভিন্ন অন্য একপ্রকার এইরূপ 4টি অক্ষরযুক্ত সমবায়সমূহ।

ইহা স্পষ্টই প্রতীয়মান হয় যে, সম্ভাব্য সকল প্রকার সমবায় উপরিউক্ত শ্রেণী তিনটিতে আছে। সুতরাং, প্রত্যেক শ্রেণীর সমবায়-সংখ্যা নির্ণয় করিয়া, সেই সংখ্যা হইতে নির্ণেয় বিন্যাস-সংখ্যা পাওয়া যাইবে।

(1) a, i, n, e, x, m, t, o এই 8টি অক্ষর হইতে 4টি করিয়া লইয়া সমবায় গঠন করিলে এই শ্রেণীর সমবায়গুলি পাওয়া যাইবে।

অতএব, উহাদের সংখ্যা $= {}^8C_4$.

আবার, এই সকল সমবায়ের প্রত্যেকটি হইতে $\lfloor 4$-সংখ্যক বিন্যাস পাওয়া যায় বলিয়া, এই শ্রেণীর সমবায়সমূহ হইতে গঠিত বিন্যাস-সংখ্যা $= {}^8C_4 \times \lfloor 4$.

(2) (a, a) এর সহিত i, n, e, x, m, t, o এই 7টি অক্ষরের 2টি করিয়া লইয়া সংযুক্ত করিলে, (i, i) এর সহিত a, n, e, x, m, t, o এই 7টি অক্ষরের দুইটি করিয়া লইয়া সংযুক্ত করিলে, এবং (n, n) এর সহিত a, i, e, x, m, t, o এই 7টি অক্ষরের দুইটি করিয়া সংযুক্ত করিলে, এই শ্রেণীর সমবায়গুলি পাওয়া যাইবে। অতএব, এই শ্রেণীর সমবায়সমূহের মোট সংখ্যা $= 3 \times {}^7C_2$.

আবার, এই সকল সমবায়ে প্রত্যেকটি হইতে $\frac{\lfloor 4}{\lfloor 2}$-সংখ্যক বিন্যাস পাওয়া যায় বলিয়া, এই শ্রেণীর সমবায়সমূহ হইতে গঠিত মোট বিন্যাস-সংখ্যা $= 3 \times {}^7C_2 \times \frac{\lfloor 4}{\lfloor 2}$.

(3) (a, a), (i, i) এবং (n, n) এই 3 জোড়া অক্ষর হইতে 2 জোড়া করিয়া লইলেই এই শ্রেণীর সমবায়গুলি পাওয়া যাইবে। অতএব, এই শ্রেণীর সমবায়-সংখ্যা $= {}^3C_2 = {}^3C_1$.

আবার, এই সকল সমবায়ের প্রত্যেকটি হইতে $\frac{\lfloor\underline{4}}{\lfloor\underline{2}\,\lfloor\underline{2}}$-সংখ্যক বিন্যাস পাওয়া যায় বলিয়া, এই শ্রেণীর সমবায়সমূহ হইতে গঠিত মোট বিন্যাস-সংখ্যা $= {}^3C_1 \times \frac{\lfloor\underline{4}}{\lfloor\underline{2}\,\lfloor\underline{2}}$.

∴ নির্ণেয় মোট বিন্যাস-সংখ্যা

$$= {}^8C_4 + 3 \times {}^7C_2 + {}^3C_1$$
$$= \frac{8.7.6.5}{4.3.2.1} + 3 \times \frac{7.6}{2.1} + 3$$
$$= 70 + 63 + 3 = \mathbf{136} \text{ ;}$$

এবং নির্ণেয় মোট বিন্যাস-সংখ্যা

$$= {}^8C_4 \times \lfloor\underline{4} + 3 \times {}^7C_2 \times \frac{\lfloor\underline{4}}{\lfloor\underline{2}} + {}^3C_1 \times \frac{\lfloor\underline{4}}{\lfloor\underline{2}\,\lfloor\underline{2}}$$
$$= 70 \times 24 + 63 \times 12 + 3 \times 6$$
$$= 1680 + 756 + 18 = \mathbf{2454}.$$

উদা. 2. A train is going from Howrah to Kharagpur and stops at nine intermediate stations. Six persons enter a compartment of the train during the journey (at the intermediate stations) with six different tickets. How many different sets of tickets may they have had ?

$$\underline{\mathrm{H}\ \mathrm{S}_1\ \mathrm{S}_2\ \mathrm{S}_3\ \mathrm{S}_4\ \mathrm{S}_5\ \mathrm{S}_6\ \mathrm{S}_7\ \mathrm{S}_8\ \mathrm{S}_9\ \mathrm{K}}$$

মধ্যবর্ত্তী স্টেশনসমূহকে $S_1, S_2, \ldots, S_9$ দ্বারা সূচিত করিলে, স্পষ্টই দেখা যাইতেছে, খড়্গপুর অভিমুখে যাইবার জন্য, S_1 স্টেশনে 9 প্রকার বিভিন্ন টিকিট পাওয়া যায়, S_2 স্টেশনে 8 প্রকার বিভিন্ন টিকিট, S_3 স্টেশনে 7 প্রকার বিভিন্ন টিকিট এবং এইরূপে S_4, S_5, S_6, S_7, S_8 এবং S_9 স্টেশনসমূহে যথাক্রমে 6, 5, 4, 3, 2 এবং 1 প্রকার বিভিন্ন টিকিট পাওয়া যায়। অতএব, হাওড়া হইতে খড়্গপুর যাইবার সময়ে মধ্যবর্ত্তী স্টেশনসমূহে মোট $9+8+7+6+5+4+3+2+1$, বা 45 প্রকার বিভিন্ন টিকিট পাওয়া যায়। প্রশ্নে প্রদত্ত 6 খানি বিভিন্ন টিকিট এই 45 প্রকার বিভিন্ন টিকিটেরই 6 খানি। অতএব, 45 প্রকার বিভিন্ন টিকিট হইতে 6 খানি যত প্রকারে নির্ব্বাচন করা যায়, তাহাই হইবে নির্ণেয় সংখ্যা।

∴ নির্ণেয় সংখ্যা $= {}^{45}C_6 = \frac{45.44.43.42.41.40}{6.5.4.3.2.1}$

$$= 3 \times 11 \times 43 \times 7 \times 41 \times 20 = \mathbf{8145060}.$$

প্রশ্নমালা 12

(বিবিধ প্রশ্নমালা)

1. If P_r denote the total number of permutations of n different things taken r at a time, show that

$$P_1+\frac{P_2}{2\,!}+\frac{P_3}{3\,!}+\frac{P_4}{4\,!}+\cdots+\frac{P_n}{n\,!}=2^n-1.$$

2. If ${}^nC_{r-1}/a={}^nC_r/b={}^nC_{r+1}/c$, find n and r.

3. A telegraph has m arms, and each arm is capable of n distinct positions ; find the total number of signals which can be made with the telegraph, supposing all the arms to be used to form a signal.

4. A gentleman invites a party of 12 friends to dinner, and places 6 at one table and 6 at another, the tables being round. Find the number of ways in which he can arrange the guests.

[ইঙ্গিত ঃ অনুচ্ছেদ 2·17, দ্রষ্টব্য অনুসারে সমবায়-সংখ্যা $\frac{\lfloor 2m}{(\lfloor m)^2}$ হয়, যেহেতু যে-কোন দলটিকে যে-কোন এক টেবিলে বসানো যায়। অতএব, নির্ণেয় সমবায়-সংখ্যা $\frac{\lfloor 12}{(\lfloor m)^2}$. ইহা হইতে নির্ণেয় বিন্যাস-সংখ্যা নির্ণীত হইবে।]

5. In a certain Algebraical Exercise Book, there are 15 examples on Arithmetical Progression, 20 examples on Permutations and Combinations and 18 examples on the Binomial Theorem ; in how many different ways can a teacher select for his pupils not more than 2 examples from each of those sets ?

6. Find the number of combinations of 16 things, 8 of which are alike, taken 8 at a time.

7. How many different collections of letters can be made by taking at least 4 letters from each of the words *length*, *stroke* and *number* ?

8. How many different collections of letters can be made by taking at least one letter from each of the words *random*, *noble* and *integral* ?

9. There are $n-1$ sets containing $2a$, $3a$,..., na things respectively ; show that the number of combinations, which can

be formed by taking a out of the first, $2a$ out of the second, and so on for each combination is $\frac{(na)!}{(a!)^n}$.

10. You are given three classes of letters : (a_1, a_2, a_3, a_4) ; (b_1, b_2, b_3) ; (c_1, c_2). Find the total number of combinations which can be made with these letters when no two of the same class enter into any combination.

11. A drawer is fitted with n compartments, and each compartment contains n counters, no two of which are marked alike. Prove that the total number of combinations, which can be made with these counters, when no two out of the same compartment enter into any combination, is $(n+1)^n - 1$.

12. Show that 154 numbers less than 1000 and divisible by 5 can be formed with the 10 digits, each digit occurring not more than once in each number.

13. How many different signals may be made with 5 flags, 2 of which are blue, 1 white, 1 red and 1 black ?

14. A gentleman invites a party of $m+n$ friends to a dinner and places m at one round table and n at another ; find the number of ways in which he can arrange the guests.

15. Find the number of permutations which can be formed from the letters of the word *thatch*, taken 3 at a time.

16. Find the number of ways in which the letters of the word *toleration* may be arranged, taking 4 at a time.

17. Find the number of arrangements that can be made by taking 4 of the letters of the word *alliteration.*

18. Find the number of selections and arrangements that can be made by taking 4 of the letters of the word *parallelogram.*

19. Find the number of different words that can be made by taking 7 letters from the word *accommodation.*

20. Find how many numbers greater than 1000 can be formed from the digits 1, 1, 2, 3, 4, 0, taken 4 at a time.

21. Out of 3 Mathematical books, 4 Scientific books and 5 Literary books how many different collections can be made, each consisting of (*i*) one book on each subject ; (*ii*) at least one book on each subject ?

22. A mail train from Calcutta to Goalundo stops at 12 intermediate stations. Seventy-five persons enter an intermediate compartment during the journey with 75 different tickets. How many different sets of tickets may they have had ?

23. Show that the number of parallelograms formed by the intersection of two sets of m and n parallel straight lines is

$$\frac{1}{4}mn(m-1)(n-1).$$

24. If n points in a plane be joined in all possible ways by indefinite straight lines, and if no two of the straight lines be coincident or parallel, and no three pass through the same point (with the exception of the n original points), then the number of points of intersection, exclusive of the n points will be

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{8}.$$

25. Show that

$$^{m+n}C_r = {}^mC_r + {}^mC_{r-1}.{}^nC_1 + {}^mC_{r-2}.{}^nC_2 + \cdots + {}^mC_1.{}^nC_{r-1} + {}^nC_r.$$

[$(m+n)$-সংখ্যক বস্তুকে m-সংখ্যক এবং n-সংখ্যক বস্তু-সংবলিত দুইটি ভাগে ভাগ করিয়া, (1) m-সংখ্যকের ভাগ হইতেই r-সংখ্যকটি করিয়া লইয়া, (2) m-সংখ্যকের ভাগ হইতে $(r-1)$টি করিয়া এবং n-সংখ্যকের ভাগ হইতে 1টি করিয়া লইয়া, (3) m-সংখ্যকের ভাগ হইতে $(r-2)$টি করিয়া এবং n-সংখ্যকের ভাগ হইতে 2টি করিয়া লইয়া, ইত্যাদিরূপে সমবায়সমূহ গঠন করিলে $(m+n)$-সংখ্যক বস্তু হইতে r-সংখ্যকটি করিয়া লইয়া গঠিত সকল সমবায়ই পাওয়া যাইবে।]

তৃতীয় অধ্যায়
দ্বিপদ উপপাদ্য
(Binomial Theorem)

সূচক ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা (Positive Integral Index)

3·1. দ্বিপদ রাশি।

দুইটি পদযুক্ত রাশিমালাকে দ্বিপদ রাশি (Binomial) বলে। $(a+x)$, $(1+x)$, $(x+y)$, $(2x+3y)$ ইত্যাদি দ্বিপদ রাশি।

3·2. দ্বিপদ উপপাদ্য।

যে বীজগণিতীয় সূত্রসাহায্যে দ্বিপদ রাশির কোন ঘাতকে বিস্তৃত করিয়া একটি শ্রেণীর আকারে প্রকাশ করা যায়, তাহাকে দ্বিপদ উপপাদ্য (Binomial Theorem) বলে এবং শ্রেণীটিকে ঐ ঘাতের বিস্তৃতি (expansion) বলা হয়।

দ্বিপদ রাশিটির ঘাতের সূচক ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা হইলে, উপপাদ্যটিকে **ধনাত্মক এবং পূর্ণ সূচকবিশিষ্ট ঘাত-সম্প্রসারক দ্বিপদ উপপাদ্য** (Binomial theorem for positive integral index) বলা হয়।

[গণিতশাস্ত্রের এই অতি প্রয়োজনীয় উপপাদ্যটির আবিষ্কারের খ্যাতি বিখ্যাত গণিত ও পদার্থ-বিদ্যাবিদ্ মহামতি নিউটনের উপর আরোপ করা হইলেও, ধনাত্মক এবং পূর্ণ সূচকবিশিষ্ট ঘাত-সম্প্রসারক দ্বিপদ উপপাদ্য তৎপূর্ব্ব যুগে—অতি প্রাচীন কাল হইতেই—সভ্যদেশের গণিতজ্ঞগণের সুপরিজ্ঞাত ছিল। প্রাচীন ভারতীয়গণও এই উপপাদ্য-সম্বন্ধীয় সম্যক্ জ্ঞানের অধিকারী ছিলেন—ইহার যথেষ্ট প্রমাণ আছে। নিউটনের বিস্ময়কর উদ্ভাবনী শক্তি উপপাদ্যটিকে ভগ্নাংশ এবং ঋণাত্মক সূচকবিশিষ্ট দ্বিপদ ঘাত-সম্প্রসারণের ক্ষেত্রে প্রসারিত করিয়া উহাকে পরিপূর্ণতা দান করিয়াছে।]

3·3. ধনাত্মক এবং পূর্ণ সূচকবিশিষ্ট ঘাত-সম্প্রসারক দ্বিপদ উপপাদ্য।

প্রমাণ কর যে, n ধনাত্মক এবং পূর্ণ সংখ্যা হইলে (To prove that when *n is a positive integer*),

$$(a+x)^n = a^n + {}^nC_1 a^{n-1}x + {}^nC_2 a^{n-2}x^2 + {}^nC_3 a^{n-3}x^3 + \cdots\cdots + {}^nC_r a^{n-r}x^r + \cdots\cdots + x^n \quad \cdots \quad (1)$$

$$= a^n + na^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{\lfloor 2} a^{n-2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{\lfloor 3} a^{n-3}x^3 + \cdots\cdots$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{\lfloor r} a^{n-r}x^r + \cdots\cdots + x^n. \quad \cdots (2)$$

$(a+x)^n = n$-সংখ্যক $(a+x)$ এর ক্রমিক গুণফল,

অর্থাৎ, $(a+x)(a+x)\cdots\cdots n$-সংখ্যক গুণক পর্য্যন্ত।

এই n-সংখ্যক গুণকের ক্রমিক গুণফলের প্রত্যেকটি পদ উক্ত n-সংখ্যক গুণকের প্রত্যেকটি হইতে একটি অক্ষর লইলে, যে n-সংখ্যক অক্ষর পাওয়া যায় তাহাদের গুণনের ফল। এক একটি গুণক হইতে একটি অক্ষর লইয়া এই n-সংখ্যক অক্ষর নির্ব্বাচনের সময়।

(ক) উক্ত n-সংখ্যক গুণকের কতকগুলি হইতে x এবং বাকীগুলি হইতে a লওয়া যায়;

(খ) সবগুলি হইতেই a লওয়া যায়; আবার,

(গ) সবগুলি হইতেই x-ও লওয়া যায়।

অক্ষর নির্ব্বাচনের এই তিনপ্রকার বিভিন্ন উপায় বিবেচনা করিলেই, স্পষ্টই, উক্ত ক্রমিক গুণফলের সব পদ পাওয়া যাইবে।

এখন, (ক) n-সংখ্যক গুণকের কতকগুলি, মনে করা যাক, r-সংখ্যক গুণকের প্রত্যেকটি হইতে x এবং বাকী অর্থাৎ $(n-r)$-সংখ্যক গুণকের প্রত্যেকটি হইতে a লওয়া হইল। এই সকল অক্ষরের গুণন হইতে $a^{n-r}x^r$ পদটি পাওয়া যায়। কিন্তু এই যে r-সংখ্যক গুণকের প্রত্যেকটি হইতে x অক্ষরটি লওয়া হইল, এই r-সংখ্যক গুণক n-সংখ্যক গুণক হইতে ^nC_r উপায়ে নির্ব্বাচন করা যায় বলিয়া, ^nC_r-সংখ্যক $a^{n-r}x^r$ পদ পাওয়া যাইবে; অতএব, উক্ত ক্রমিক গুণফলে $a^{n-r}x^r$ পদটির সহগ হইবে ^nC_r; তাহা হইলে পদটি হইল $^nC_ra^{n-r}x^r$. স্পষ্টই, r এর মান 0 হইতে n পর্য্যন্ত যে-কোন সংখ্যাই হইতে পারে; কিন্তু ইহার মান কখনই n অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে না। r এর এই সকল বিভিন্ন মানের জন্য $^nC_ra^{n-r}x^r$-জাতীয় বিভিন্ন পদ পাওয়া যাইবে।

(খ) উপরে (ক)-এ $r=0$ ধরিলে, কোন গুণক হইতেই x অক্ষরটি লওয়া হইবে না, n-সংখ্যক গুণকের সবগুলি হইতে a অক্ষরটি লওয়া হইবে। অতএব, এক্ষেত্রে, পদটি হইবে a^n এবং ইহার সহগ হইবে $^nC_0$ বা 1. স্পষ্টই, $^nC_ra^{n-r}x^r$-এ $r=0$ বসাইয়া, সহগ-সমেত পদটি পাওয়া যায়।

(গ) $r=n$ ধরিলে, (ক) হইতে দেখা যায়, কোন গুণক হইতেই a অক্ষরটি লওয়া হইবে না, n-সংখ্যক গুণকের সবগুলি হইতে x অক্ষরটি লওয়া হইবে। অতএব, এক্ষেত্রে, x^n পদটি পাওয়া যাইবে এবং ইহার সহগ হইবে ${}^nC_n$ বা 1. ইহাও ${}^nC_ra^{n-r}x^r$-এ $r=n$ বসাইয়া পাওয়া যায়।

অতএব, দেখা গেল উক্ত ক্রমিক গুণফলের সহগ-সমেত সকল পদই ${}^nC_ra^{n-r}x^r$-এ পর পর $r=0, 1, 2...n$ বসাইয়া পাওয়া যায়।

$$\therefore\ (a+x)^n = a^n + {}^nC_1a^{n-1}x + {}^nC_2a^{n-2}x^2 + {}^nC_3a^{n-3}x^3 + \cdots\cdots + {}^nC_ra^{n-r}x^r + \cdots\cdots + x^n$$
$$= a^n + na^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{\underline{|2}}a^{n-2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{\underline{|3}}a^{n-3}x^3 + \cdots\cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{\underline{|r}}a^{n-r}x^r + \cdots\cdots + x^n.$$

বিকল্প প্রমাণ :

প্রকৃত গুণন দ্বারা দেখা যায়,

$$(a+x)^2 = a^2 + 2ax + x^2 = a^2 + {}^2C_1a^{2-1}x + x^2.$$
$$(a+x)^3 = a^3 + 3a^2x + 3ax^2 + x^3 = a^3 + {}^3C_1a^{3-1}x + {}^3C_2a^{3-2}x^2 + x^3.$$

$n=2$ এবং 3 এর ক্ষেত্রে দ্বিপদ উপপাদ্যটি সত্য প্রমাণিত হইল।

এখন, মনে কর, n এর কোন বিশেষ মান m এর জন্য উপপাদ্যটি সত্য। তাহা হইলে,

$$(a+x)^m = a^m + {}^mC_1a^{m-1}x + {}^mC_2a^{m-2}x^2 + {}^mC_3a^{m-3}x^3 + \cdots\cdots + {}^mC_ra^{m-r}x^r + \cdots\cdots + x^m. \quad \cdots \quad (A)$$

(A) এর উভয় পক্ষকে $(a+x)$ দ্বারা গুণ করিলে,

$$(a+x)^{m+1} = (a+x)\{a^m + {}^mC_1a^{m-1}x + {}^mC_2a^{m-2}x^2 + {}^mC_3a^{m-3}x^3 + \cdots + {}^mC_ra^{m-r}x^r + \cdots + x^m\}$$
$$= a^{m+1} + ({}^mC_1 + 1)a^mx + ({}^mC_2 + {}^mC_1)a^{m-1}x^2 + ({}^mC_3 + {}^mC_2)a^{m-2}x^3 + \cdots + ({}^mC_r + {}^mC_{r-1})a^{m-r+1}x^r + \cdots + x^{m+1}.$$

এখন, ${}^mC_r + {}^mC_{r-1} = {}^{m+1}C_r$. [অনুচ্ছেদ 2·10 দ্রষ্টব্য] ইহার উভয় পক্ষে $r=1, 2, 3, \ldots m$ বসাইলে,

${}^mC_1 + {}^mC_0$ অর্থাৎ ${}^mC_1 + 1 = {}^{m+1}C_1$, ${}^mC_2 + {}^mC_1 = {}^{m+1}C_2$,
${}^mC_3 + {}^mC_2 = {}^{m+1}C_3$, ইত্যাদি।

$$\therefore \quad (a+x)^{m+1} = a^{m+1} + {}^{m+1}C_1 a^m x + {}^{m+1}C_2 a^{m-1} x^2 + {}^{m+1}C_3 a^{m-2} x^3 + \cdots\cdots + {}^{m+1}C_r a^{m-r+1} x^r + \cdots\cdots + x^{m+1}.$$

অতএব, দেখা গেল উপপাদ্যটিকে $n = m$ এর জন্য সত্য মনে করিলে, উহা $n = m+1$ এর জন্যও সত্য। কিন্তু দেখা গিয়াছে, উপপাদ্যটি $n = 3$ এর জন্য সত্য; অতএব, উহা $n = 3+1$, বা 4 এর জন্যও সত্য; আবার, উপপাদ্যটি $n = 4$ এর জন্য সত্য বলিয়া, $n = 4+1$ বা 5 এর জন্যও সত্য। এইরূপে অগ্রসর হইলে দেখা যায়, n এর সকল ধনাত্মক এবং পূর্ণ মানের জন্যই উপপাদ্যটি সত্য। অতএব, n একটি ধনাত্মক এবং পূর্ণ সংখ্যা হইলে,

$$(a+x)^n = a^n + {}^nC_1 a^{n-1} x + {}^nC_2 a^{n-2} x^2 + {}^nC_3 a^{n-3} x^3 + \cdots\cdots + {}^nC_r a^{n-r} x^r + \cdots\cdots + x^n$$

$$= a^n + n a^{n-1} x + \frac{n(n-1)}{\underline{|2}} a^{n-2} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{\underline{|3}} a^{n-3} x^3 + \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{\underline{|r}} a^{n-r} x^r + \cdots + x^n.$$

অনুসিদ্ধান্ত। (1) এবং (2) এর দক্ষিণ পক্ষ $(a+x)^n$ এর বিস্তৃতি। ${}^nC_r a^{n-r} x^r$ এ r এর বিভিন্ন মান বসাইয়া এই বিস্তৃতির পদগুলি পাওয়া গিয়াছে। এখন, r এর মান $0, 1, 2, \ldots n$ এই $(n+1)$-সংখ্যক সংখ্যা হইতে পারে বলিয়া, বিস্তৃতির মোট পদ-সংখ্যা হইবে $\mathbf{n+1}$.

দ্রষ্টব্য। $(a+x)^n$ এর বিস্তৃতির ${}^nC_0$, ${}^nC_1$ প্রভৃতি সহগগুলিকে দ্বিপদ সহগ (Binomial coefficients) বলা হয়।

3·4. $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতি নির্ণয়।

$(a+x)^n$ এর বিস্তৃতিতে a র স্থলে 1 বসাইয়া $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতি পাওয়া যায়। আবার,

$$(a+x)^n = \left\{x\left(1+\frac{x}{a}\right)\right\}^n = a^n\left(1+\frac{x}{a}\right)^n = a^n(1+z)^n, \ \frac{x}{a} \text{ এর স্থলে}$$

z বসাইয়া। অতএব, $(1+z)^n$ এবং $(1+x)^n$ একই প্রকার দ্বিপদের n-তম ঘাত বলিয়া, দেখা গেল যে, যে-কোন দ্বিপদের ঘাতকেই $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতি সাহায্যে সম্প্রসারিত করা যায়।

$(1+x)^n$ এর বিস্তৃতি-প্রকাশক সূত্রকেও তাই দ্বিপদ উপপাদ্যরূপে ধরা হয়। নিম্নে ইহার প্রমাণ দেওয়া হইল।

প্রমাণ কর যে, n একটি ধনাত্মক এবং পূর্ণ সংখ্যা হইলে,

$$(1+x)^n = 1 + {}^nC_1x + {}^nC_2x^2 + {}^nC_3x^3 + \cdots + {}^nC_rx^r + \cdots + x^n \quad \cdots \quad (1)$$

$$= 1 + nx + \frac{n(n-1)}{\lfloor 2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{\lfloor 3}x^3 + \cdots$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{\lfloor r}x^r + \cdots\cdots + x^n. \quad \cdots \quad (2)$$

প্রকৃত গুণন দ্বারা দেখা যায়,

$$(1+x)^2 = 1 + 2x + x^2 = 1 + {}^2C_1x + x^2,$$

$$(1+x)^3 = 1 + 3x + 3x^2 + x^3 = 1 + {}^3C_1x + {}^3C_2x^2 + x^3.$$

$n=2$ এবং 3 এর ক্ষেত্রে দ্বিপদ উপপাদ্যটি সত্য, দেখা গেল।

এখন, মনে কর, n এর কোন বিশেষ মান m এর জন্য উপপাদ্যটি সত্য। তাহা হইলে,

$$(1+x)^m = 1 + {}^mC_1x + {}^mC_2x^2 + {}^mC_3x^3 + \cdots\cdots$$
$$+ {}^mC_rx^r + \cdots + x^m. \quad \cdots \quad \cdots \quad (3)$$

(3) এর উভয় পক্ষকে $(1+x)$ দ্বারা গুণ করিলে,

$$(1+x)^{m+1} = (1+x)\{1 + {}^mC_1x + {}^mC_2x^2 + {}^mC_3x^3 + \cdots\cdots$$
$$+ {}^mC_rx^r + \cdots + x^m\}$$
$$= 1 + ({}^mC_1 + 1)x + ({}^mC_2 + {}^mC_1)x^2 + ({}^mC_3 + {}^mC_2)x^3 + \cdots$$
$$+ ({}^mC_r + {}^mC_{r-1})x^r + \cdots\cdots + x^{m+1}.$$

এখন, ${}^mC_r + {}^mC_{r-1} = {}^{m+1}C_r$. ইহার উভয় পক্ষে $r = 1, 2, 3, \ldots m$ বসাইলে,

${}^mC_1 + {}^mC_0$, অর্থাৎ ${}^mC_1 + 1 = {}^{m+1}C_1$, ${}^mC_2 + {}^mC_1 = {}^{m+1}C_2$,

${}^mC_3 + {}^mC_2 = {}^{m+1}C_3$, ইত্যাদি।

$$\therefore \quad (1+x)^{m+1} = 1 + {}^{m+1}C_1x + {}^{m+1}C_2x^2 + {}^{m+1}C_3x^3 + \cdots$$
$$+ {}^{m+1}C_rx^r + \cdots\cdots x^{m+1}.$$

অতএব, দেখা গেল উপপাদ্যটিকে $n = m$ এর জন্য সত্য মনে করিলে, উহা $n = m+1$ এর জন্যও সত্য। কিন্তু দেখা গিয়াছে, উপপাদ্যটি $n = 3$ এর জন্য সত্য; অতএব, উহা $n = 3+1$ বা 4 এর জন্যও সত্য; আবার উপপাদ্যটি

$n=4$ এর জন্যও সত্য বলিয়া, $n=4+1$ বা, 5 এর জন্যও সত্য। এইরূপে অগ্রসর হইলে দেখা যায়, n এর সকল ধনাত্মক এবং পূর্ণ মানের জন্যই উপপাদ্যটি সত্য। অতএব, n একটি ধনাত্মক এবং পূর্ণ সংখ্যা হইলে,

$$(1+x)^n = 1 + {}^nC_1 x + {}^nC_2 x^2 + {}^nC_3 x^3 + \cdots + {}^nC_r x^r + \cdots + x^n$$
$$= 1 + nx + \frac{n(n-1)}{\lfloor 2} x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{\lfloor 3} x^3 + \cdots$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{\lfloor r} x^r + \cdots + x^n.$$

অনুসিদ্ধান্ত। $(a+x)^n$ এবং $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতি নির্ণয়-কালে x এবং a র মানের উপর কোন বিধি-নিষেধ আরোপ করা হয় নাই, বিস্তৃতি দুইটি a এবং x এর সকল মানের জন্যই সত্য। অতএব, x এর স্থলে $-x$ লিখিয়া,

$$(a-x)^n = a^n - {}^nC_1 a^{n-1}x + {}^nC_2 a^{n-2}x^2 - {}^nC_3 a^{n-3}x^3 + \cdots$$
$$+ (-1)^r\, {}^nC_r a^{n-r}x^r + \cdots\cdots + (-1)^n x^n.$$
$$(1-x)^n = 1 - {}^nC_1 x + {}^nC_2 x^2 - {}^nC_3 x^3 + \cdots + (-1)^r\, {}^nC_r x^r + \cdots$$
$$+ (-1)^n x^n.$$

দেখা যাইতেছে:

(1) $(a+x)^n$ এবং $(a-x)^n$ এর সহগগুলি একই সাংখ্যমান (numerical value)-বিশিষ্ট; আবার, $(1+x)^n$ এবং $(1-x)^n$ এর সহগগুলিও একই সাংখ্যমান-বিশিষ্ট।

(2) $(a-x)^n$ ও $(1-x)^n$ উভয়েরই প্রথম পদ হইতে আরম্ভ করিয়া একান্তর পদগুলি ধনাত্মক এবং দ্বিতীয় পদ হইতে আরম্ভ করিয়া একান্তর পদগুলি ঋণাত্মক।

(3) n যুগ্ম সংখ্যা হইলে, $(a-x)^n$ ও $(1-x)^n$ উভয় ক্ষেত্রেই শেষ পদটি ধনাত্মক এবং অযুগ্ম হইলে, উভয় ক্ষেত্রেই শেষ পদটি ঋণাত্মক।

3·5. বিস্তৃতির সাধারণ পদ।

${}^nC_r a^{n-r} x^r$-এ r এর বিভিন্ন মান বসাইয়া বিস্তৃতির সকল পদই পাওয়া যায় বলিয়া, ${}^nC_r a^{n-r} x^r$ কে বিস্তৃতির সাধারণ পদ (general term) বলা হয়।

এখন,

প্রথম পদ $= a^n = {}^nC_0 a^{n-0} x^0$; স্পষ্টই, ইহা সাধারণ পদে
$r=0$ বসাইয়া পাওয়া গেল ;

দ্বিতীয় পদ $= {}^nC_1 a^{n-1}x$; স্পষ্টই ইহা সাধারণ পদে $r=1$ বসাইয়া পাওয়া যায় ;

তৃতীয় পদ $= {}^nC_2\, a^{n-2}x^2$; " " " $r=2$ " " "

চতুর্থ পদ $= {}^nC_3\, a^{n-3}x^3$; " " " $r=3$ " " "

ইত্যাদি, ইত্যাদি, ইত্যাদি।

অতএব, দেখা গেল, $r=0$ হইলে, পদটি হয় প্রথম, অর্থাৎ $(0+1)$-তম ;

$r=1$ " " " দ্বিতীয়, অর্থাৎ $(1+1)$-তম ;

$r=2$ " " " তৃতীয়, অর্থাৎ $(2+1)$-তম ;

$r=3$ " " " চতুর্থ, অর্থাৎ $(3+1)$-তম ;

ইত্যাদি, ইত্যাদি, ইত্যাদি।

অতএব, $\mathbf{{}^nC_ra^{n-r}x^r}$ পদটি হইবে বিস্তৃতির $\mathbf{(r+1)}$-তম পদ।

অতএব, **(r+1)-তম** পদটি $(a+x)^n$ এর বিস্তৃতির সাধারণ পদ এবং এই সাধারণ পদ

$$= \mathbf{C_ra^{n-r}x^r = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{\lfloor r}a^{n-r}x^r.}$$

এইরূপে, $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতির সাধারণ পদ

$=$ ইহার $(r+1)$-তম পদ

$$= \mathbf{{}^nC_rx^r = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-r+1)}{\lfloor r}x^r.}$$

অনুসিদ্ধান্ত। $(a-x)^n$ এর বিস্তৃতির সাধারণ পদ

$=$ ইহার $(r+1)$-তম পদ $=(-1)^r\, {}^nC_ra^{n-r}x^r$;

এবং $(1-x)^n$ এর বিস্তৃতির সাধারণ পদ

$=$ ইহার $(r+1)$-তম পদ $=(-1)^r\, {}^nC_rx^r$.

দ্রষ্টব্য ঃ বিস্তৃতির সাধারণ পদ ${}^nC_ra^{n-r}x^r$-টিকে লক্ষ্য করিলে বুঝা যায় ঃ

(1) বিস্তৃতির প্রত্যেক পদে a এবং xএর সূচক-সমষ্টি n ;

(2) বিস্তৃতির প্রত্যেক পদে

(ক) সহগ ${}^nC_r$ এ r এর মান হইবে পদটির ক্রমিক সংখ্যা (ordinal number of the term) অপেক্ষা 1 কম ;

(খ) দ্বিপদ রাশিটির দ্বিতীয় পদের x এর সূচক হইবে ${}^nC_r$ এর r-এর সমান, অর্থাৎ পদটির ক্রমিকসংখ্যা অপেক্ষা 1 কম ; এবং

(গ) দ্বিপদ রাশিটির প্রথম পদ a-র সূচক হইবে সহগ ${}^nC_r$ এর n হইতে r এর বিয়োগফল $(n-r)$, অথবা, বলা চলে, n হইতে x এর সূচক r এর বিয়োগফল।

যেমন, $(a+x)^n$ এর বিস্তৃতির

20-তম পদ $= {}^nC_{19}a^{n-19}x^{19}$,

33-তম পদ $= {}^nC_{32}a^{n-32}x^{32}$.

$\left(2x+\dfrac{3}{y}\right)^{19}$ এর বিস্তৃতির

অষ্টম পদটি হইবে ${}^{19}C_7(2x)^{19-7}\left(\dfrac{3}{y}\right)^7$,

অর্থাৎ, ${}^{19}C_7(2x)^{12}\left(\dfrac{3}{y}\right)^7$,

অর্থাৎ, $\dfrac{19.18.17.16.15.14.13}{7.6.5.4.3.2.1}2.^{12}x^{12}.3^7.\dfrac{1}{y^7}$,

অর্থাৎ, $451373285376\,\dfrac{x^{12}}{y^7}$.

3·6. বিস্তৃতির মধ্যপদ।

$(a+x)^n$ এর বিস্তৃতির মধ্যপদ (middle term) নির্ণয় করিতে হইবে।

[*To find the middle term (or terms) in the expansion of* $(a+x)^n$.]

(ক) মনে কর, n একটি যুগ্মসংখ্যা এবং ইহা $= 2m$; তাহা হইলে, $m=\dfrac{n}{2}$.

এক্ষেত্রে, বিস্তৃতির পদ-সংখ্যা $= n+1 = 2m+1$; স্পষ্টই $(2m+1)$ একটি বিযুগ্মসংখ্যা। অতএব, বিস্তৃতির **একটিমাত্র** মধ্যপদ থাকিবে, এবং বিস্তৃতির $(m+1)$-তম পদ, অর্থাৎ, $\left(\dfrac{n}{2}+1\right)$-তম পদ।

$\therefore$ n একটি যুগ্মসংখ্যা হইলে, বিস্তৃতির মধ্যপদ $= {}^nC_{\frac{1}{2}n}a^{n-\frac{1}{2}n}x^{\frac{1}{2}n}$

$$= \frac{\lfloor n}{(\lfloor \tfrac{1}{2}n)^2}a^{\frac{1}{2}n}x^{\frac{1}{2}n}.$$

(খ) মনে কর, n একটি অযুগ্মসংখ্যা এবং ইহা $= 2m+1$; তাহা হইলে,

$$m=\frac{n-1}{2}.$$

এক্ষেত্রে, বিস্তৃতির পদ-সংখ্যা $= n+1 = 2m+2$; স্পষ্টই $(2m+2)$ একটি যুগ্মসংখ্যা। অতএব, বিস্তৃতির দুইটি মধ্যপদ থাকিবে, এবং ইহারা বিস্তৃতির $(m+1)$-তম এবং $(m+2)$-তম পদ, অর্থাৎ, $\left(\frac{n-1}{2}+1\right)$-তম এবং $\left(\frac{n-1}{2}+2\right)$-তম পদ, অর্থাৎ, $\left(\frac{n-1}{2}+1\right)$-তম এবং $\left(\frac{n+1}{2}+1\right)$-তম পদ।

$\therefore$ n অযুগ্মসংখ্যা হইলে বিস্তৃতির দুইটি মধ্যপদ থাকিবে, এবং ইহারা

$$^nC_{\frac{n-1}{2}}\, a^{n-\frac{n-1}{2}} x^{\frac{n-1}{2}} \text{ এবং } ^nC_{\frac{n+1}{2}}\, a^{n-\frac{n+1}{2}} x^{\frac{n+1}{2}},$$

$$\text{অর্থাৎ, } \frac{\lfloor n}{\lfloor \frac{n-1}{2} \lfloor \frac{n+1}{2}} a^{\frac{n+1}{2}} x^{\frac{n-1}{2}} \text{ এবং } \frac{\lfloor n}{\lfloor \frac{n+1}{2} \lfloor \frac{n-1}{2}} a^{\frac{n-1}{2}} x^{\frac{n+1}{2}}.$$

দ্রষ্টব্য। n অযুগ্মসংখ্যা হইলে, লক্ষ্য করিতে হইবে, মধ্যপদ দুইটির সহগ দুইটি একই।

n অযুগ্মসংখ্যা হইলে, $(a-x)^n$ এর বিস্তৃতির মধ্যপদ দুইটির সহগ দুইটি একটি ধনাত্মক এবং অন্যটি ঋণাত্মক হইবে, কিন্তু তাহাদের সাংখ্যমান একই হইবে।

3·7. সমদূরবর্ত্তী পদযুগ্ম।

$(a+x)^n$ বিস্তৃতিতে প্রথম এবং শেষ হইতে সমদূরবর্ত্তী পদযুগ্মের সহগদ্বয় সমান।

[*In the expansion of* $(a+x)^n$, *the coefficients of the terms equidistant from the beginning and the end are equal.*]

বিস্তৃতিটির প্রথম হইতে $(r+1)$-তম পদের সহগ ^nC_r.

এখন, বিস্তৃতিটিতে মোট $(n+1)$-সংখ্যক পদ থাকায়, শেষ হইতে $(r+1)$-তম পদটির পূর্ব্বে $\{(n+1)-(r+1)\}$, অর্থাৎ $(n-r)$-সংখ্যক পদ থাকিবে ; অতএব এই পদটি বিস্তৃতিটির প্রথম হইতে $(n-r+1)$-তম পদ, এবং সেইজন্য ইহার সহগ $^nC_{n-r}$.

কিন্তু, $^nC_r = {}^nC_{n-r}$.

$\therefore$ বিস্তৃতিটির প্রথম হইতে $(r+1)$-তম পদের সহগ = বিস্তৃতিটির শেষ হইতে $(r+1)$-তম পদের সহগ।

উদা. 1. Expand $(2x-3y)^5$.

$$(2y-3y)^5=(2x)^5+5.(2x)^4(-3y).+\frac{5.4}{1.2}(2x)^3.(-3y)^2$$
$$+\frac{5.4.3}{1.2.3}(2x)^2(-3y)^3+\frac{5.4.3.2}{1.2.3.4}(2x)(-3y)^4$$
$$+\frac{5.4.3.2.1}{1.2.3.4.5}(-3y)^5$$
$$=32x^5-240x^4y+720x^3y^2-1080x^2y^3+810xy^4$$
$$-243y^5.$$

উদা. 2. Expand $(\frac{1}{2}x-2y)^7$.

$$(\tfrac{1}{2}x-2y)^7=\left\{\frac{x}{2}\left(1-\frac{4y}{x}\right)\right\}^7=\left(\frac{x}{2}\right)^7\left(1-\frac{4y}{x}\right)^7$$
$$=\frac{x^7}{128}\left\{1+{}^7C_1\left(-\frac{4y}{x}\right)+{}^7C_2\left(-\frac{4y}{x}\right)^2+{}^7C_3\left(-\frac{4y}{x}\right)^3\right.$$
$$+{}^7C_4\left(-\frac{4y}{x}\right)^4+{}^7C_5\left(-\frac{4y}{x}\right)^5+{}^7C_6\left(-\frac{4y}{x}\right)^6$$
$$\left.+{}^7C_7\left(-\frac{4y}{x}\right)^7\right\}$$
$$=\frac{x^7}{128}\left\{1-7\left(\frac{4y}{x}\right)+\frac{7.6}{1.2}\left(\frac{4y}{x}\right)^2-\frac{7.6.5}{1.2.3}\left(\frac{4y}{x}\right)^3\right.$$
$$\left.+\frac{7.6.5}{1.2.3}\left(\frac{4y}{x}\right)^4-\frac{7.6}{1.2}\left(\frac{4y}{x}\right)^5+7\left(\frac{4y}{x}\right)^6-\left(\frac{4y}{x}\right)^7\right\}$$
$$=\frac{x^7}{128}\left\{1-\frac{7.4.y}{x}+\frac{21.4^2.y^2}{x^2}-\frac{35.4^3.y^3}{x^3}\right.$$
$$\left.+\frac{35.4^4.y^4}{x^4}-\frac{21.4^5.y^5}{x^5}+\frac{7.4^6.y^6}{x^6}-\frac{4^7.y^7}{.x^7}\right\}$$
$$=\frac{x^7}{128}-\frac{7}{32}x^6y+\frac{21}{8}x^5y^2-\frac{35}{2}x^4y^3+70x^3y^4$$
$$-168x^2y^5+224xy^6-128y^7.$$

উদা. 3. Find the 7th term of the expansion of $(a^3+3ab)^9$.

নির্ণেয় পদ $={}^9C_6.(a^3)^3.(3ab)^6={}^9C_3(a^3)^3.(3ab)^6$

$$=\frac{9.8.7}{1.2.3}a^9.3^6.a^6.b^6=61236a^{15}b^6.$$

উদা. 4. Write down the 49th term of $(a-x)^{50}$.

নির্ণেয় পদ $= {}^{50}C_{48}.a^2.(-x)^{48} = {}^{50}C_2.a^2(-x)^{48}$

$$=\frac{50.49}{1.2}.a^2.(-x)^{48} = 1225a^2x^{48}.$$

উদা. 5. Write down the coefficient of y in the expansion of $\left(y^2+\frac{c^3}{y}\right)^5$.

মনে কর, বিস্তৃতিটির $(r+1)$-তম পদে y আছে।

এখন, $(r+1)$-তম পদ $= {}^5C_r(y^2)^{5-r}\left(\frac{c^3}{y}\right)^r = {}^5C_r.c^{3r}y^{10-3r}$.

এই পদটিতে y থাকিলে, অর্থাৎ y এর সূচক 1 হইলে, অবশ্যই $10-3r=1$;

$\therefore\ r=3$.

অতএব, নির্ণেয় সহগ $= {}^5C_3\, c^{3\times 3} = {}^5C_3c^9 = 10c^9$.

উদা. 6. Find the coefficient of (i) x^{32} and (ii) x^{-17} in $\left(x^4-\frac{1}{x^3}\right)^{15}$.

(i) মনে কর, বিস্তৃতিটির $(r+1)$-তম পদে x^{32} আছে।

এখন, $(r+1)$-তম পদ $= {}^{15}C_r(x^4)^{15-r}.\left(-\frac{1}{x^3}\right)^r$

$$= {}^{15}C_rx^{60-4r}.\frac{(-1)^r}{x^{3r}} = (-1)^r\,{}^{15}C_rx^{60-7r}.$$

এই পদটিতে x^{32} থাকিলে, অর্থাৎ x এর সূচক 32 হইলে, অবশ্যই $60-7r=32$ বা $7r=28$;

$\therefore\ r=4$.

$\therefore$ নির্ণেয় সহগ $= (-1)^r\,{}^{15}C_r = (-1)^4.{}^{15}C_4$

$$= 1\times\frac{15.14.13.12}{4.3.2.1}$$

$$= \mathbf{1365}.$$

(ii) মনে কর, বিস্তৃতিটির $(r+1)$-তম পদে x^{-17} আছে।

এখন, $(r+1)$-তম পদ $= {}^{15}C_r(x^4)^{15-r}\left(-\frac{1}{x^3}\right)^r$

$$= {}^{15}C_r x^{60-4r}.\frac{(-1)^r}{x^{3r}} = (-1)^r\,{}^{15}C_r x^{60-7r}.$$

এই পদটিতে x^{-17} থাকিলে, অর্থাৎ x এর সূচক -17 হইলে, অবশ্যই $60-7r=-17$, বা $7r=77$; $\therefore\ r=11$.

$\therefore$ নির্ণেয় সহগ $=(-1)^{11}.{}^{15}C_{11} = -1.{}^{15}C_4$

$$= -\frac{15.14.13.12}{4.3.2.1}$$

$$= \mathbf{-1365.}$$

উদা. 7. Find the term independent of x in $\left(x-\frac{1}{x^2}\right)^{3n}$.

মনে কর, বিস্তৃতিটির $(r+1)$-তম পদে x নাই, অর্থাৎ ঐ পদে x এর সূচক 0.

এখন, $(r+1)$-তম পদ $= {}^{3n}C_r x^{3n-r}\left(-\frac{1}{x^2}\right)^r = (-1)^r.{}^{3n}C_r x^{3n-3r}$.

এই পদে x না থাকিলে, অর্থাৎ x এর সূচক 0 হইলে, অবশ্যই $3n-3r=0$;

$\therefore\ r=n$.

$\therefore$ নির্ণেয় পদ $=(-1)^n\ {}^{3n}C_n = (-1)^n.\frac{(3n)\,!}{n\,!\,(2n)\,!}$.

উদা. 8. Prove that if the term x^r occurs in the expansion of $\left(x+\frac{1}{x}\right)^n$, the coefficient of the term $= \frac{\lfloor \underline{n}}{\lfloor \underline{\tfrac{1}{2}(n-r)}\ \lfloor \underline{\tfrac{1}{2}(n-r)}}$.

মনে কর, x^r-সংবলিত পদটি বিস্তৃতিটির $(p+1)$-তম পদে আছে।

এখন, $(p+1)$-তম পদ $= {}^nC_p x^{n-p}\left(\frac{1}{x}\right)^p = {}^nC_p x^{n-2p}$. এই পদে x^r থাকিলে, অর্থাৎ x এর সূচক r হইলে,

$$n-2p=r\ ;\quad \therefore\ p=\tfrac{1}{2}(n-r).$$

$\therefore$ নির্ণেয় সহগ $= {}^nC_p = \frac{\lfloor \underline{n}}{\lfloor \underline{p}\ \lfloor \underline{n-p}} = \frac{\lfloor \underline{n}}{\lfloor \underline{\tfrac{1}{2}(n-r)}\ \lfloor \underline{\tfrac{1}{2}(n+r)}}$.

উদা. 9. Find the middle term of $(2x-y)^6$.

বিস্তৃতিটিতে 7টি পদ থাকায় উহার একটিমাত্র মধ্যপদ থাকিবে এবং $(\frac{6}{2}+1)$-তম বা চতুর্থ পদটিই হইবে এই মধ্যপদ।

$\therefore$ নির্ণেয় মধ্যপদ $= {}^6C_3(2x)^{6-3}(-y)^3$

$$= (-1)^3.{}^6C_3 2^3.x^3y^3 = -1.\frac{6.5.4}{3.2.1}\cdot 8.xy^{33}$$

$$= -160x^3y^3.$$

উদা. 10. Find the first four terms in the expansion of $(1+2x-3x^2)^8$ in ascending powers of x.

বিস্তৃতিটিকে x এর ঊর্দ্ধক্রম অনুসারে সাজাইলে প্রথম পদটি হইবে 1, দ্বিতীয়, তৃতীয়, চতুর্থ পদ যথাক্রমে x, x^2 এবং x^3 সংবলিত হইবে ; সুতরাং এস্থলে বিস্তৃতিটির-x^3 সংবলিত পদ পর্যন্তই মাত্র নির্ণয় করিতে হইবে।

$2x-3x^2$ এর পরিবর্ত্তে y বসাইলে,

$$(1+2x-3x^2)^8 = (1+y)^8$$

$$= 1+8y+\frac{8.7}{2.1}y^2+\frac{8.7.6}{3.2.1}y^3+\cdots\cdots$$

$$= 1+8(2x-3x^2)+28(2x-3x^2)^2+56(2x-3x^2)^3+$$

$\cdots x^3$ অপেক্ষা x এর উচ্চতর ঘাত-সংবলিত পদসমূহ

[y এর স্থলে $2x-3x^2$ বসাইয়া]

$$= 1+8(2x-3x^2)+28(4x^2-12x^3+9x^4)$$
$$+56(8x^3-\cdots)+\cdots\cdots$$

$$= 1+16x+88x^2+112x^3\cdots\cdots$$

প্রশ্নমালা 13

1. (*a*) Expand the following :

(i) $(a+2b)^6$; (ii) $(a-3x)^6$;

(iii) $\left(a+\frac{1}{a}\right)^6$; (iv) $\left(\frac{2x}{3}-\frac{3}{2x}\right)^6$.

(*b*) Expand and simplify :

$(x+x\sqrt{y})^5+(x-x\sqrt{y})^5$.

2. Find the values of :

(i) $\{a+\sqrt{a^2-1}\}^6+\{a-\sqrt{a^2-1}\}^6$;

(ii) $(2+3\sqrt{-1})^4+(2-3\sqrt{-1})^4$.

3. Write down the 10th term of $(2x-y)^{11}$.

4. Find the 8th term of $(x^{\frac{3}{2}}y^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{3}{2}})^{10}$.

5. Write down the 4th term of $\left(\frac{x}{a}-\frac{a}{x}\right)^{10}$.

6. Find the coefficient of x^{15} in the expansion of $(x-x^2)^{10}$. [C. U. 1926]

7. Find the coefficient of x^{18} in $(ax^4-bx)^9$.

8. Write down the coefficient of $\frac{1}{y^2}$ in the expansion of $\left(y+\frac{c^3}{y^2}\right)^{10}$.

9. In the expansion of $(1+x)^{m+n}$, when m and n are positive integers, prove that the coefficients of x^m and x^n are equal. [C. U. 1923, '35]

10. What is the coefficient of x^m in the expansion of $(x+y)^n$?

11. Find the coefficient of x^{2r+1} in the expansion of $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{2n+1}$.

12. Find the $(2n+1)$th term in the expansion of $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{3n}$.

13. Show that the coefficient of x^n in the expansion of $(1+x)^{2n}$ is double the coefficient of x^{n-1} in the expansion of $(1+x)^{2n-1}$. [C. U. 1947]

14. Find the coefficient of x^{2n-1} in the expansion of $\left(x-\frac{1}{x}\right)^{4n+1}$.

15. Find the term independent of x in the expansion of $\left(x+\frac{1}{x}\right)^{10}$. [C. U. 1910, '21, '27]

16. Find the term independent of x in the expansion of (i) $(1-x)^3\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^5$; (ii) $(1+x)^m\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^n$. [Utkal, 1947]

17. Find the coefficient of x^{10} in the expansion of $(1+x+x^2) \times(1-x)^{15}$. [Madras, 1920]

18. Find the coefficient of x^2 in $(1-2x+3x^2-4x^3+5x^5) \times\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^7$.

19. (i) Find the middle term (or, terms) in the expansion of each of the following :

(a) $(a+b)^8$; (b) $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^9$; (c) $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^{2n}$.

(ii) Find the number of terms in the expansion of $(1+x)^{100}$, and show that the middle term is $\dfrac{\lfloor 100}{\lfloor 50 \lfloor 50} x^{50}$.

20. Expand $\left(\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}\right)^{2n+1}$, giving in particular the general term and the two middle terms. [C. U. 1932]

21. If in the expansion of $(1+x)^{10}$, the coefficient of the $(4r+5)$th term is equal to that of $(2r+1)$th term, find r. [C. U. 1949]

22. If the rth term in the expansion of $(x+1)^{20}$ has its coefficient equal to that of $(r+4)$th term, find r. [C. U. 1946]

23. If in the expansion of $(1+x)^{2n+1}$, the coefficients of x^r and x^{r+1} be equal, find r. [C. U. 1930]

24. Show that the coefficient of the middle term of $(1+x)^{2n}$ is equal to the sum of the coefficients of the two middle terms of $(1+x)^{2n-1}$. [Cal., 1918 ; Pat., 1942]

25. Find the first four terms of the expansion of $(1-x+x^2)^n$, in ascending powers of x.

26. Show that the middle term in the expansion of

(a) $\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^{2n}$ is $\dfrac{1.3.5\ldots\ldots(2n-1)}{n\,!}2^n$; [Pat., 1942]

(b) $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^{2n}$ is $\dfrac{1.3.5\ldots\ldots(2n-1)}{n\,!}(-2)^n$.

27. If x^{4r} occurs in the expansion of $(x-x^{-2})^{4n}$, prove that its coefficient is $\dfrac{\lfloor 4n}{\lfloor \frac{4}{3}(n-r)\ \lfloor \frac{4}{3}(2n+r)}$.

3·8. বৃহত্তম সহগ।

$(a+x)^n$ অথবা $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতির বৃহত্তম সহগ নির্ণয়।

[*To find the greatest coefficient in the expansion of* $(a+x)^n$ *or* $(1+x)^n$.]

সহগগুলি হইতেছে $^nC_0$, $^nC_1$, $^nC_2$, $^nC_3, \ldots\ldots$, ^nC_n. ইহাদের মধ্যে কোন্‌টি বৃহত্তম, তাহাই নির্ণয় করিতে হইবে।

বিন্যাস ও সমবায় অধ্যায় হইতে আমরা জানি,

(1) n যুগ্মসংখ্যা হইলে, যখন $r=\dfrac{n}{2}$ হয়, তখন ^nC_r বৃহত্তম হয়;

আর, (2) n অযুগ্মসংখ্যা হইলে, যখন $r=\dfrac{n-1}{2}$, বা $\dfrac{n+1}{2}$ হয়, তখন ^nC_r বৃহত্তম হয়।

অতএব, n যুগ্ম হইলে, $^nC_{\frac{n}{2}}$ বিস্তৃতির বৃহত্তম সহগ;

আর, n অযুগ্ম হইলে, $^nC_{\frac{n-1}{2}}$ এবং $^nC_{\frac{n+1}{2}}$ সহগ দুইটি সমমানবিশিষ্ট হয় এবং তখন ইহারাই বিস্তৃতির বৃহত্তম সহগ।

3·9. বৃহত্তম পদ।

$(a+x)^n$ এর বিস্তৃতির বৃহত্তম পদ নির্ণয়।

[*To find the greatest term in the expansion of* $(a+x)^n$.]

বিস্তৃতির r-তম এবং $(r+1)$-তম পদ দুইটিকে যথাক্রমে T_r এবং T_{r+1} দ্বারা সূচিত করিলে,

$$T_{r+1}={}^nC_r a^{n-r}x^r=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+2)(n-r+1)}{r(r-1)(r-2)\cdots3.2.1}\cdot a^{n-r}x^r,$$

এবং $T_r={}^nC_{r-1}a^{n-r+1}x^{r-1}=\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+2)}{(r-1)(r-2)\cdots3.2.1}\cdot a^{n-r+1}x^{r-1}$.

অতএব, $\frac{T_{r+1}}{T_r} = \frac{n-r+1}{r} \cdot \frac{x}{a}$.

$\therefore\ T_{r+1} >, =,$ বা $< T_r$ হইবে,

যদি $(n-r+1)x >, =,$ বা $< ra$ হয়,

অর্থাৎ, যদি $(n+1)x >, =,$ বা $< ra + rx$, বা $r(a+x)$ হয়,

অর্থাৎ, যদি $\frac{(n+1)x}{a+x} >, =,$ বা $< r$ হয়,

অর্থাৎ, যদি $r <, =,$ বা $> \frac{(n+1)x}{a+x}$ হয়।

এখন, $\frac{(n+1)x}{a+x}$ (i) পূর্ণ সংখ্যা হইতে পারে, আবার (ii) ভগ্নাঙ্কও হইতে পারে।

(i) $\frac{(n+1)x}{a+x}$ পূর্ণ সংখ্যা হইলে, মনে কর, ইহা $= p$.

তাহা হইলে, r এর 1, 2, 3, প্রভৃতি $(p-1)$ পর্য্যন্ত সকল মানের জন্য $T_{r+1} > T_r$, অর্থাৎ, $T_1, T_2, T_3, \ldots, T_{p-1}$ এবং T_p পদগুলির প্রত্যেকটি ইহার পূর্ব্ববর্ত্তীটি অপেক্ষা বৃহত্তর ; সুতরাং, T_pই এই পদগুলির মধ্যে বৃহত্তম পদ।

$r = p$ হইলে, $T_{r+1} = T_r$, অর্থাৎ $T_{p+1} = T_p$.

$r > p$ হইলে, $T_{r+1} < T_r$, অর্থাৎ $T_{p+1}, T_{p+2}, T_{p+3}, \ldots, T_n, T_{n+1}$ পদগুলির প্রত্যেকটি ইহার পূর্ব্ববর্ত্তীটি অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর ; সুতরাং, T_{p+1} ই এই পদগুলির মধ্যে বৃহত্তম।

অতএব, দেখা গেল, এক্ষেত্রে $T_p = T_{p+1}$, অর্থাৎ বিস্তৃতির p-তম পদটি $(p+1)$-তম পদটির সমান এবং ইহারাই বিস্তৃতির বৃহত্তম পদদ্বয়।

(ii) $\frac{(n+1)x}{a+x}$ পূর্ণ সংখ্যা না হইয়া ভগ্নাঙ্ক হইলে, মনে কর, এই ভগ্নাঙ্কটি $= q$ পূর্ণ সংখ্যা + একটি প্রকৃত ভগ্নাংশ, অর্থাৎ q এই ভগ্নাঙ্কটির পূর্ণ অংশ। তাহা হইলে, r এর 1, 2, 3, প্রভৃতি q পর্য্যন্ত সকল মানের জন্য $r < \frac{(n+1)x}{a+x}$, অতএব, $T_{r+1} > T_r$, অর্থাৎ $T_1, T_2, T_3, \ldots T_q, T_{q+1}$ পদগুলির প্রত্যেকটি ইহার পূর্ব্ববর্ত্তীটি অপেক্ষা বৃহত্তর ; সুতরাং, T_{q+1} ই ঐ পদগুলির বৃহত্তম পদ।

আবার, r এর $q+1, q+2, \ldots, n$ পর্য্যন্ত সকল মানের জন্যই $r > \frac{(n+1)x}{a+x}$;
অতএব, $T_{r+1} < T_r$, অর্থাৎ, $T_{q+1}, T_{q+2}, T_{q+3}, \ldots T_n, T_{n+1}$ পদগুলির প্রত্যেকটি ইহার পূর্ব্ববর্ত্তীটি অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর; সুতরাং, T_{q+1}ই এই পদগুলির মধ্যে বৃহত্তম পদ।

অতএব, দেখা গেল, এক্ষেত্রে T_{q+1} অর্থাৎ বিস্তৃতিটির $(q+1)$-তম পদই বৃহত্তম পদ।

দ্রষ্টব্য 1. দ্বিতীয় ক্ষেত্রে $r = \frac{(n+1)x}{a+x}$ হইতে পারে না।

দ্রষ্টব্য 2. $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতির বৃহত্তম পদও a র স্থলে 1 বসাইয়া অনুরূপ যুক্তি-সাহায্যেই নির্ণয় করা যায়।

দ্রষ্টব্য 3. $(a-x)^n$ এর বিস্তৃতির পদগুলি এবং $(a+x)^n$ এর বিস্তৃতির পদগুলি একই সাংখ্যমানবিশিষ্ট বলিয়া, উভয়ের বিস্তৃতির বৃহত্তম পদদ্বয় একই সাংখ্যমানবিশিষ্ট হইবে। সুতরাং, $(a-x)^n$ এর বিস্তৃতির চিহ্ন-নিরপেক্ষ বৃহত্তম পদ (numerically greatest term) নির্ণয় করিতে হইলে, পদগুলির ঋণ-চিহ্ন বর্জ্জন করিয়া উপরের অনুচ্ছেদে বর্ণিত পদ্ধতিতে অগ্রসর হইতে হয়।

উদা. 1. *Find the numerically greatest coefficient in the expansion of* (i) $(1+x)^{10}$, (ii) $(2-3x)^7$.

(i) এস্থলে সহগগুলি হইতেছে $^{10}C_0, {}^{10}C_1, {}^{10}C_2, \ldots, {}^{10}C_{10}$; ইহাদের মধ্যে বৃহত্তমটি নির্ণয় করিতে হইবে।

এখন, $^{10}C_r = \frac{\lfloor 10}{\lfloor r \lfloor 10-r}$; এবং $^{10}C_{r-1} = \frac{\lfloor 10}{\lfloor r-1 \lfloor 10-r+1}$;

$\therefore \quad \frac{^{10}C_r}{^{10}C_{r-1}} = \frac{10-r+1}{r}$, বা, $^{10}C_r = \frac{10-r+1}{r}\, {}^{10}C_{r-1}$;

$\therefore \quad {}^{10}C_r >, =$ বা $< {}^{10}C_{r-1}$ হইবে,

যদি $10-r+1 >, =$ বা $< r$ হয়,

অর্থাৎ যদি $11 >, =$ বা $< 2r$ হয়,

অর্থাৎ যদি $r <, =$ বা $> \frac{11}{2}$ অর্থাৎ $5\frac{1}{2}$ হয়।

$\therefore$ নির্ণেয় বৃহত্তম সহগ $= {}^{10}C_5 = \frac{10.9.8.7.6}{5.4.3.2.1} = \mathbf{252}.$

(ii) $(2-3x)^7 = 2^7(1-\frac{3}{2}x)^7$; অতএব, চিহ্ন-নিরপেক্ষ $(1-\frac{3}{2}x)^7$ এর বৃহত্তম সহগকে 2^7 দ্বারা গুণ করিলে বৃহত্তম সহগটি পাওয়া যাইবে।

এখন, $(1-\frac{3}{2}x)^7$ এর চিহ্ন-নিরপেক্ষ সহগগুলি হইতেছে ${}^7C_0$, $\frac{3}{2}\,{}^7C_1$, $(\frac{3}{2})^2\,{}^7C_2$, $(\frac{3}{2})^3\,{}^7C_3$, $(\frac{3}{2})^4\,{}^7C_4$, $(\frac{3}{2})^5\,{}^7C_5$, $(\frac{3}{2})^6\,{}^7C_6$, $(\frac{3}{2})^7\,{}^7C_7$; ইহাদের বৃহত্তমটি নির্ণয় করিতে হইবে।

এখন, $\frac{(r+1)\text{-তম সহগ}}{r\text{-তম সহগ}}=\frac{(\frac{3}{2})^r.{}^7C_r}{(\frac{3}{2})^{r-1}.{}^7C_{r-1}}=\frac{3}{2}.\frac{(7-r+1)}{r}=\frac{24-3r}{2r}.$

$\therefore$ $(r+1)$-তম সহগ $>, =,$ বা $<$ r-তম সহগ হইবে,

যদি $24-3r >, =,$ বা $< 2r$ হয়,

অর্থাৎ যদি $24 >, =,$ বা $< 5r$ হয়,

অর্থাৎ যদি $r <, =,$ বা $> \frac{24}{5}$ অর্থাৎ $4\frac{4}{5}$ হয়।

$\therefore$ পঞ্চম সহগটি বৃহত্তম ;

$\therefore$ নির্ণেয় চিহ্ন-নিরপেক্ষ বৃহত্তম সহগ

$$=2^7.(\tfrac{3}{2})^4\,{}^7C_4$$
$$=2^3.3^4.{}^7C_3$$
$$=8\times 81\times\frac{7.6.5}{3.2.1}=\mathbf{22680.}$$

উদা. 2. *Find the greatest term in the expansion of* $(2+3x)^{12}$, when $x=\frac{5}{8}$.

r-তম এবং $(r+1)$-তম পদ দুইটিকে যথাক্রমে T_r এবং T_{r+1} দ্বারা সূচিত করিলে,

$$\frac{T_{r+1}}{T_r}=\frac{12-r-1}{r}.\frac{3x}{2}=\frac{13-r}{r}.\frac{5}{4};$$

$\therefore$ $T_{r+1} >, =,$ বা $< T_r$ হইবে,

যদি $5(13-r) >, =,$ বা $< 4r$ হয়,

অর্থাৎ, যদি $65-5r >, =,$ বা $< 4r$ হয়,

অর্থাৎ, যদি $65 >, =,$ বা $< 9r$ হয়,

অর্থাৎ, যদি $r <, =,$ বা $> 7\frac{2}{9}$ হয়।

$\therefore$ অষ্টম পদটি বৃহত্তম পদ এবং ইহার মান

$$={}^{12}C_7.2^5.(3x)^7={}^{12}C_5.2^5.(\tfrac{5}{2})^7$$
$$=\mathbf{15468750.}$$

উদা. 3. *Find the numerically greatest term in the expansion of* $(3-5x)^{11}$, *when* $x=\frac{1}{5}$.

r-তম এবং $(r+1)$-তম পদদ্বয়কে যথাক্রমে T_r এবং T_{r+1} দ্বারা স্থচিত করিলে,

$$\frac{T_{r+1}}{T_r}=\frac{11-r+1}{r}\cdot\frac{5x}{3}=\frac{12-r}{r}\cdot\frac{1}{3}.$$

$\therefore$ $T_{r+1} >, =,$ বা $< T_r$ হইবে,

যদি $12-r >, =,$ বা $< 3r$ হয়,

অর্থাৎ, যদি $12 >, =,$ বা $< 4r$ হয়,

অর্থাৎ, যদি $r <, =,$ বা > 3 হয়।

অতএব, T_3, T_4 অর্থাৎ বিস্তৃতির তৃতীয় এবং চতুর্থ পদ দুইটির চিহ্ন-নিরপেক্ষ মান বা পরম মান সমান এবং এই পদ দুইটিই বৃহত্তম এবং এই মান

$$={}^{11}C_2\,3^9.(5x)^2=\frac{11.10}{2.1}\cdot3^9=\mathbf{1082565}.$$

প্রশ্নমালা 14

1. Find the greatest coefficient in the expansion of (i) $(1+x)^{14}$, (ii) $(3-2x)^9$.

2. Find the greatest numerical coefficient in the expansion of $\left(3ax-\frac{2b^2}{x}\right)^{14}$.

3. Find which is the greatest term in the expansion of each of the following :

(i) $\left(\frac{x}{2}-\frac{y}{3}\right)^{15}$, where $x=8$, $y=9$.

(ii) $(\frac{3}{4}m-\frac{2}{3}n)^{19}$, when $m=8$, $n=3$.

4. Find the value of the greatest term in the expansion of each of the following :

(i) $(1+x)^6$, when $x=\frac{1}{2}$. (ii) $(2+3x)^{14}$, when $x=\frac{2}{3}$.

(iii) $(a+x)^n$, when $a=\frac{1}{2}$, $x=\frac{1}{3}$, $n=9$.

3·10. দ্বিপদ সহগের ধর্ম।

(i) $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতির সহগসমূহের সমষ্টি 2^n.

[*The sum of the coefficients of the terms in the expansion of* $(1+x)^n$ *is* 2^n.]

আমরা জানি, $(1+x)^n = 1 + {}^nC_1\, x + {}^nC_2\, x^2 + {}^nC_3\, x^3 + \cdots\cdots\cdots + {}^nC_n\, x^n$;

উভয় পক্ষে $x=1$ বসাইলে, $2^n = 1 + {}^nC_1 + {}^nC_2 + {}^nC_3 + \cdots\cdots + {}^nC_n$;
অতএব, সহগসমূহের সমষ্টি $= 2^n$.

অনুসিদ্ধান্ত। ${}^nC_1 + {}^nC_2 + {}^nC_3 + \cdots + {}^nC_n = 2^n - 1$, অর্থাৎ n-সংখ্যক বস্তু হইতে একসঙ্গে উহাদের 1, 2, 3,...n-সংখ্যকটি করিয়া লইয়া গঠিত সমবায়-সমূহের সংখ্যা $= 2^n - 1$.

দ্রষ্টব্য। ${}^nC_0, {}^nC_1, {}^nC_2$, প্রভৃতি দ্বিপদ সহগগুলিকে সংক্ষেপে $C_0, C_1, C_2, \ldots$ প্রভৃতিরূপেও লেখা হয়।

(ii) **$(1+x)^n$ এর বিস্তৃতিতে অযুগ্ম-পদসমূহের সহগ-সমষ্টি উহার যুগ্ম-পদসমূহের সহগ-সমষ্টির সমান, এবং সমষ্টিদ্বয়ের প্রত্যেকটি হইতেছে 2^{n-1}.**

[*In the expansion of $(1+x)^n$, the sum of the coefficients of the odd terms is equal to the sum of the coefficients of the even terms, each being equal to 2^{n-1}.*]

$$(1+x)^n = 1 + {}^nC_1\, x + {}^nC_2\, x^2 + {}^nC_3\, x^3 + \cdots\cdots + {}^nC_n\, x^n,$$

উভয় পক্ষে $x = -1$ বসাইলে,

$$0 = 1 - {}^nC_1 + {}^nC_2 - {}^nC_3 + \cdots + (-1)^n\, {}^nC_n.$$

$$\therefore\ 1 + {}^nC_2 + {}^nC_4 + \cdots = {}^nC_1 + {}^nC_3 + {}^nC_5 + \cdots$$
$$= \tfrac{1}{2}(1 + {}^nC_1 + {}^nC_2 + {}^nC_3 + {}^nC_4 + \cdots + {}^nC_n)$$
$$= \tfrac{1}{2}.2^n = 2^{n-1}.$$

3·11. বিভিন্ন প্রশ্নের সমাধান।

উদা. 1. *If A be the sum of the odd terms and B be the sum of the even terms in the expansion of $(a+x)^n$, prove that $A^2 - B^2 = (a^2 - x^2)^n$.*

$(a+x)^n$ এর বিস্তৃতির পদগুলিকে t_0, t_1, t_2, ইত্যাদি দ্বারা সূচিত করিলে,

$$(a+x)^n = t_0 + t_1 + t_2 + t_3 + \cdots\cdots + t_n$$
$$= (t_0 + t_2 + t_4 + \cdots) - (t_1 + t_3 + t_5 + \cdots)$$
$$= A + B ;$$

$$(a-x)^n = t_0 - t_1 + t_2 - t_3 + t_4 - t_5 + \cdots\cdots + (-1)^n t_n$$
$$= (t_0 + t_2 + t_4 + \cdots) - (t_1 + t_3 + t_5 + \cdots\cdots)$$
$$= A - B.$$

$$\therefore\ A^2 - B^2 = (A+B)(A-B) = (a+x)^n (a-x)^n = (a^2 - x^2)^n.$$

উদা. 2. If t_0, t_1, t_2, t_3 *etc. represent the terms of the expansion of* $(a+x)^n$, *show that*

$$(t_0 - t_2 + t_4 - \cdots)^2 + (t_1 - t_3 + t_5 - \cdots)^2 = (a^2 + x^2)^n.$$

$$(a+x)^n = a^n + {}^nC_1\, a^{n-1}\, x + {}^nC_2\, a^{n-2}\, x^2 + {}^nC_3\, a^{n-3}\, x^3 + \cdots + {}^nC_n x^n$$

$$= t_0 + t_1 + t_2 + t_3 + \cdots\cdots + t_n.$$

উভয় পক্ষে x এর স্থলে ix বসাইলে,

$$(a+ix)^n = a^n + {}^nC_1\, a^{n-1} ix + {}^nC_2 a^{n-2}.\, i^2 x^2 + {}^nC_3\, a^{n-3}\, i^3 x^3 + {}^nC_4\, a^{n-4}\, i^4 x^4 + \cdots$$
$$= a^n + i\,{}^nC_1 a^{n-1} x - {}^nC_2 a^{n-2} x^2 - i\,{}^nC_3 a^{n-3} x^3 + \cdots$$
$${}^nC_4 a^{n-4} x^4 + i\,{}^nC_5 a^{n-5} x^5 - {}^nC_6 a^{n-6} x^6 - i\,{}^nC_7 a^{n-7} x^7 + \cdots\cdots$$
$$= t_0 + it_1 - t_4 - it_3 + t_4 + it_5 - t_6 - it_7 + t_8 + it_9 + \cdots$$
$$= (t_0 - t_2 + t_4 - t_6 + \cdots) + i(t_1 - t_3 + t_5 - t_7 + \cdots) \quad \cdots \quad (1)$$

আবার, $(a-ix)^n = a^n - {}^nC_1 a^{n-1} ix + {}^nC_2 a^{n-2} i^2 x^2 - {}^nC_3 a^{n-3} i^3 x^3 + {}^nC_4 a^{n-4} i^4 x^4 - {}^nC_5 a^{n-5} i^5 x^5 + \cdots\cdots$

$$= a^n - i\,{}^nC_1 a^{n-1} x - {}^nC_2 a^{n-2} x^2 + i\,{}^nC_3 a^{n-3} x^3 + {}^nC_4 a^{n-4} x^4 - i\,{}^nC_5 a^{n-5} x^5 + \cdots\cdots$$
$$= t_0 - it_1 - t_2 + it_3 + t_4 - it_5 - t_6 + it_7 + t_8 - \cdots$$
$$= (t_0 - t_2 + t_4 - t_6 + \cdots) - i(t_1 - t_3 + t_5 - t_7 + \cdots) \quad \cdots \quad (2)$$

$\therefore$ (1) এবং (2) হইতে,

$$(a+ix)^n (a-ix)^n = \{(t_0 - t_2 + t_4 - t_6 + \cdots) + i(t_1 - t_3 + t_5 - t_7 + \cdots)\} \times \{(t_0 - t_2 + t_4 - t_6 + \cdots) - i(t_1 - t_3 + t_5 - t_7 + \cdots)\}$$

বা, $(a^2 + x^2)^n = (t_0 - t_2 + t_4 - t_6 + \cdots)^2 + (t_1 - t_3 + t_5 - t_7 + \cdots)^2$

উদা. 3. *If a, b, c, d be any four consecutive coefficients of an expanded binomial, show that* $(bc+ad)(b-c)=2(ac^2-b^2d)$.

মনে কর, a, b, c, d $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতির যথাক্রমে $(r-1)$-তম, r-তম, $(r+1)$-তম, $(r+2)$-তম পদ।

এখন, $\dfrac{{}^nC_r}{{}^nC_{r-1}}=\dfrac{n-r+1}{r}$;

$\therefore$ (i) $\dfrac{b}{a}=\dfrac{{}^nC_{r-1}}{{}^nC_{r-2}}=\dfrac{n-(r-1)+1}{r-1}=\dfrac{n-r+2}{r-1}$;

(ii) $\dfrac{c}{b}=\dfrac{{}^nC_r}{{}^nC_{r-1}}=\dfrac{n-r+1}{r}$;

(iii) $\dfrac{d}{c}=\dfrac{{}^nC_{r+1}}{{}^nC_r}=\dfrac{n-(r+1)+1}{r+1}=\dfrac{n-r}{r+1}$.

(i) হইতে, $\dfrac{b}{a}(r-1)=n-r+2 \quad \cdots \quad (\alpha)$

(ii) " $\dfrac{c}{b}r=n-r+1 \quad \cdots \quad (\beta)$

(iii) " $\dfrac{d}{c}(r+1)=n-r. \quad \cdots \quad (\gamma)$

(α) হইতে (β) বিয়োগ দ্বারা,

$$\frac{b}{a}(r-1)-\frac{c}{b}r=1 \text{ বা, } r\left(\frac{b}{a}-\frac{c}{b}\right)=\frac{b}{a}+1; \quad \therefore \; r=\frac{b(a+b)}{b^2-ac};$$

এইরূপে, (β) এবং (γ) হইতে,

$$r\left(\frac{c}{b}-\frac{d}{c}\right)=\frac{d}{c}+1; \quad \therefore \; r=\frac{b(c+d)}{c^2-bd}.$$

অতএব, $\dfrac{c+d}{c^2-bd}=\dfrac{a+b}{b^2-ac}$;

বা $b^2c-ac^2+b^2d-acd=ac^2-abd+bc^2-b^2d$,

বা $b^2c+abd-bc^2-acd=2(ac^2-b^2d)$,

বা $(bc+ad)(b-c)=2(ac^2-b^2d)$.

উদা. 4. If $(1+x)^n=C_0+C_1x+C_2x^2+C_3x^3+\cdots+C_nx^n$, find the value of $C_0+\dfrac{C_1}{2}+\dfrac{C_2}{3}+\dfrac{C_3}{4}+\cdots+\dfrac{C_n}{n+1}$.

[C. U. 1945 ; Delhi, 1950]

দ্বিপদ উপপাদ্য হইতে,

$$(1+x)^n = 1 + {}^nC_1x + {}^nC_2x^2 + {}^nC_3x^3 + \cdots + {}^nC_nx^n \;;$$

$\therefore\;\; C_0 = 1, C_1 = {}^nC_1, C_2 = {}^nC_2,$ ইত্যাদি।

$\therefore\;\;$ প্রদত্ত রাশিমালা

$$= 1 + \frac{{}^nC_1}{2} + \frac{{}^nC_2}{3} + \frac{{}^nC_3}{4} + \cdots\cdots + \frac{{}^nC_n}{n+1}$$

$$= 1 + \frac{n}{\lfloor 2} + \frac{n(n-1)}{3\lfloor 2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{4\lfloor 3} + \cdots\cdots + \frac{1}{n+1}$$

$$= 1 + \frac{n}{\lfloor 2} + \frac{n(n-1)}{\lfloor 3} + \frac{n(n-1)(n-2)}{\lfloor 4} + \cdots\cdots + \frac{1}{n+1}$$

$$= \frac{1}{n+1}\left\{(n+1) + \frac{(n+1)n}{\lfloor 2} + \frac{(n+1)n(n-1)}{\lfloor 3} + \frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{\lfloor 4} + \cdots\cdots + 1\right\}$$

$$= \frac{1}{n+1}\left\{{}^{n+1}C_1 + {}^{n+1}C_2 + {}^{n+1}C_3 + {}^{n+1}C_4 + \cdots + {}^{n+1}C_{n+1}\right\}$$

$$= \frac{1}{n+1}\left(2^{n+1} - 1\right).$$

উদা. 5. If $(1+x)^n = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \cdots\cdots + C_nx^n$, find the value of $C_1 + 2C_2 + 3C_3 + \cdots + nC_n$. [C. U. 1938]

দ্বিপদ উপপাদ্য-অনুসারে,

$$(1+x)^n = 1 + {}^nC_1x + {}^nC_2x^2 + \cdots\cdots + {}^nC_nx^n \;;$$

$\therefore\;\; C_0 = 1, C_1 = {}^nC_1, C_2 = {}^nC_2,$ ইত্যাদি।

$\therefore\;\;$ প্রদত্ত রাশিমালা

$$= {}^nC_1 + 2.{}^nC_2 + 3.{}^nC_3 + \cdots\cdots + n.{}^nC_n$$

$$= n + \frac{2n(n-1)}{\lfloor 2} + \frac{3n(n-1)(n-2)}{\lfloor 3} + \cdots + n$$

$$= n + n(n-1) + \frac{n(n-1)(n-2)}{\lfloor 2} + \cdots\cdots + n$$

$$= n\left\{1 + (n-1) + \frac{(n-1)(n-2)}{\lfloor 2} + \cdots\cdots + 1\right\}$$

$$= n\{{}^{n-1}C_0 + {}^{n-1}C_1 + {}^{n-1}C_2 + \cdots\cdots + {}^{n-1}C_{n-1}\}$$

$$= n(1+1)^{n-1}$$

$$= n.2^{n-1}.$$

উদা. 6. If $(1+x)^n = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \cdots\cdots + C_nx^n$, find the value of $C_0^2 + C_1^2 + C_2^2 + \cdots\cdots + C_n^2$. [C. U. 1941]

$$(1+x)^n = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \cdots\cdots + C_nx^n. \quad \cdots \quad (1)$$

x এর স্থলে, $\frac{1}{x}$ বসাইয়া,

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^n = C_0 + \frac{C_1}{x} + \frac{C_2}{x^2} + \cdots\cdots + \frac{C_n}{x^n}. \quad \cdots \quad (2)$$

(1) এবং (2) হইতে গুণন দ্বারা,

$(1+x)^n.\left(1+\frac{1}{x}\right)^n$ = (1) এবং (2) এর শ্রেণী দুইটির গুণফল,

বা, $\frac{(1+x)^{2n}}{x^n}$ = (1) এবং (2) এর শ্রেণী দুইটির গুণফল। $\cdots$ (i)

স্পষ্টই, (1) এবং (2) এর দক্ষিণ-পক্ষস্থ শ্রেণী দুইটির গুণফলের x-বর্জ্জিত রাশিটিই প্রদত্ত রাশিমালা।

$\therefore$ প্রদত্ত রাশিমালা $= \frac{(1+x)^{2n}}{x^n}$ এর x-বর্জ্জিত রাশি

$= (1+x)^{2n}$ এর বিস্তৃতির x^n এর সহগ

$$= {}^{2n}C_n = \frac{\lfloor 2n}{\lfloor n \, \lfloor n}.$$

দ্রষ্টব্য। উপরের সমাধান (i) এর সমীকরণটি একটি অভেদ অর্থাৎ উহা x এর সকল মানের জন্যই সত্য বলিয়া, ইহার এক পক্ষের x এর যে-কোন ঘাতের সহগ অপর পক্ষের x এর সমঘাতের সহগের সমান ধরা হইয়াছে।

বিকল্প-পদ্ধতি ঃ $(1+x)^n = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \cdots\cdots + C_nx^n \cdots (1)$

আবার, $(x+1)^n = C_0x^n + C_1x^{n-1} + C_2x^{n-2} + \cdots + C_n \quad \cdots (2)$

(1) এবং (2) এর গুণন দ্বারা, উপরে বর্ণিত পদ্ধতিতেও প্রদত্ত রাশিমালার মান নির্ণয় করা যায়।

উদা. 7. *If generally n_r be the coefficient of the $(r+1)$th term in the expansion of $(1+x)^n$, show that*

$$(n+p)_r = n_r + n_{r-1}p_1 + n_{r-2}p_2 + \cdots + n_1p_{r-1} + p_r\,;$$

$n_r = (1+x)^n$ এর বিস্তৃতির $(r+1)$-তম পদের সহগ ;

$p_r = (1+x)^p$ এর বিস্তৃতির $(r+1)$-তম পদের সহগ,

এবং $(n+p)_r = (1+x)^{n+p}$ এর বিস্তৃতির $(r+1)$-তম পদের সহগ।

$\therefore \quad (1+x)^n = 1 + n_1x + n_2x^2 + n_3x^3 + \cdots + n_rx^r + \cdots + x^n,$

$(1+x)^p = 1 + p_1x + p_2x^2 + p_3x^3 + \cdots + p_rx^r + \cdots + x^p,$

এবং $(1+x)^{n+p} = 1 + (n+p)_1x + (n+p)_2x^2 + (n+p)_3x^3 + \cdots + (n+p)_rx^r + \cdots + x^{n+p}.$

$$\therefore \quad 1 + (n+p)_1x + (n+p)_2x^2 + \cdots + (n+p)_rx^r + \cdots + x^{n+p}$$
$$\equiv (1 + n_1x + n_2x^2 + \cdots + n_rx^r + \cdots + x^n) \times (1 + p_1x + p_2x^2 + \cdots + p_rx^r + \cdots + x^p).$$

উভয় পক্ষের x^r এ সহগ সমিত করিয়া,

$$(n+p)_r = n_r + n_{r-1}p_1 + n_{r-2}p_2 + \cdots + n_1p_{r-1} + p_r.$$

দ্রষ্টব্য। এই ফলটি 'ভেণ্ডারমণ্ডি'র (Vendermande's) উপপাদ্য নামে খ্যাত।

উদা. 8. *Find the value of*

$$a - (a+b)n + (a+2b)\frac{n(n-1)}{1.2} - (a+3b)\frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} + \cdots$$

প্রদত্ত রাশিমালা

$$= a\{1 - n + \frac{n(n-1)}{\lfloor 2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{\lfloor 3} + \cdots\cdots$$
$(n+1)$-সংখ্যক পদ পর্য্যন্ত }

$$- b\{n - n(n-1)\frac{n(n-1)(n-2)}{\lfloor 2} - \cdots\cdots$$ n-সংখ্যক পদ পর্য্যন্ত }

$$= a(1-1)^n - bn\{1 - (n-1) + \frac{(n-1)(n-2)}{\lfloor 2}\cdots$$
n-সংখ্যক পদ পর্য্যন্ত }

$$= a(1-1)^n - bn(1-1)^{n-1} = \mathbf{0}.$$

উদা. 9. *Prove that, for all positive integral values of n greater than* 1, $4^n - 3n - 1$ *is divisible by* 9.

$$4^n - 3n - 1 = (1+3)^n - 3n - 1$$
$$= 1 + n.3 + {}^nC_2.3^2 + {}^nC_3.3^3 + \cdots - 3n - 1$$
$$= {}^nC_2.3^2 + {}^nC_3.3^3 + \cdots\cdots$$

এখন দক্ষিণ-পক্ষস্থ সমস্ত পদই 3^2 বা 9 দ্বারা বিভাজ্য;

অতএব, $4^n - 3n - 1$ ও 9 দ্বারা বিভাজ্য।

উদা. 10. *Apply the Binomial Theorem to find the value of* 99^3.

$$99^3 = (100-1)^3 = 100^3 - {}^3C_1 100^2.1 + {}^3C_2 100.1^2 + 1^3$$
$$= 100^3 - 3\cdot100^2 + 3\cdot100 - 1$$
$$= 1000000 - 30000 + 300 - 1$$
$$= \mathbf{970299}.$$

প্রশ্নমালা 15

1. Find the values of ${}^{20}C_1 + {}^{20}C_2 + {}^{20}C_3 + \cdots\cdots + {}^{20}C_{20}$.

2. (*a*) Find the value of

$${}^{26}C_1 + {}^{26}C_3 + {}^{26}C_5 + {}^{26}C_7 + \cdots + {}^{26}C_{25}.$$

(*b*) Show that the sum of the coefficients of odd terms in the expansion of $(1+x)^{2n}$ is 2^{2n-1}. [C. U. 1917]

3. If three successive coefficients in the expansion of $(1+x)^n$ be 165, 330 and 462 ; find n. [P. U. 1945]

4. If the first three terms in the expansion of $(1+x)^n$ are in A. P., show that $2 - 4nx + n(n-1)x^2 = 0$.

5. If the rth, $(r+1)$th, and $(r+2)$th coefficients in the expansion of $(1+x)^n$ are in A.P., show that

$$n^2 - n(4r+1) + 4r^2 - 2 = 0.$$

6. If the 2nd, 3rd and 4th terms in the expansion of $(a+x)^n$ be 240, 720 and 1080 respectively ; find a, x and n.

7. The 3rd, 4th and 5th terms in the expansion of $(x+a)^n$ are 84, 280 and 560 respectively ; find x, a and n.

[Pat. 1947 ; C. U. 1955]

8. If a, b, c be three consecutive coefficients in the expansion of a power of $(1+x)$, prove that the index of the power is $\dfrac{2ac+b(a+c)}{b^2-ac}$ and that the number of the term of which a is the coefficient is $\dfrac{a(b+c)}{b^2-ac}$. [Pat. 1941]

9. If two successive coefficients of an expanded binomial be equal, prove that the two coefficients immediately preceding and succeeding them are also equal.

10. If a, b, c, d be the 3rd, 4th, 5th and 6th terms respectively in the expansion of $(x+A)^n$, n being a positive integer, show that

$$\frac{b^2-ac}{c^2-bd}=\frac{5a}{3c}.$$ [C. U. 1957]

11. If a_1, a_2, a_3, a_4 are any four consecutive coefficients in the expansion of an expanded binomial, show that

$$\frac{a_1}{a_1+a_2}+\frac{a_3}{a_3+a_4}=\frac{2a_2}{a_2+a_3}.$$ [Pat. 1950]

12. If P_n denote the product of all the coefficients in the expansion of $(1+x)^n$, show that

$$\frac{P_{n+1}}{P_n}=\frac{(n+1)^n}{\lfloor n}.$$

13. If C_r denotes the number of combinations of n things taken r at a time, show that

$$\frac{C_1}{2}+\frac{C_3}{4}+\frac{C_5}{6}+\cdots=\frac{2^n-1}{n+1}.$$

14. If $(1+x)^n=C_0+C_1x+C_2x^2+\cdots+C_nx^n$, prove that

(i) $\dfrac{C_0}{1}+\dfrac{C_2}{3}+\dfrac{C_4}{5}+\dfrac{C_6}{7}+\cdots=\dfrac{2^n}{n+1}$.

(ii) $C_0+2C_1+C_2+2C_3+C_4+2C_5+\cdots=3.2^{n-1}$.

15. If $(1+x)^n=C_0+C_1x+C_2x^2+\cdots+C_nx^n$, prove that

(i) $C_0+2C_1+3C_2+\cdots+(n+1)C_n=(n+2)2^{n-1}$.

[C. U. 1929]

(ii) $C_0+3C_1+5C_2+\cdots+(2n+1)C_n=(n+1)2^n$.

(iii) $C_2+2C_3+3C_4+\cdots+(n-1)C_n=(n-2).2^{n-1}+1$.

(iv) $C_1-2C_2+3C_3-\cdots+(-1)^{n-1}nC_n=0$.

[C. U. 1942 ; Gau. 1949]

(v) $C_0-2C_1+3C_2+\cdots+(-1)^n(n+1)C_n=0$.

(vi) $2C_0-3C_1+4C_2-5C_3+\cdots$ to $(n+1)$ terms $=0$.

(vii) $C_0-\dfrac{C_1}{2}+\dfrac{C_2}{3}-\dfrac{C_3}{4}+\cdots+(-1)^n\dfrac{C_n}{n+1}=\dfrac{1}{n+1}$.

[Pat. 1944]

(viii) $\frac{C_1}{C_0}+\frac{2C_2}{C_1}+\frac{3C_3}{C_2}+\cdots+\frac{nC_n}{C_{n-1}}=\frac{n(n+1)}{2}$.

(ix) $(C_0+C_1)(C_1+C_2)\cdots(C_{n-1}+C_n)=\frac{C_0C_1C_2\cdots C_n(n+1)^n}{\lfloor n}$.

(x) $2C_0+\frac{2^2C_1}{2}+\frac{2^3C_2}{3}+\frac{2^4C_3}{4}+\cdots+\frac{2^{n+1}C_n}{n+1}=\frac{3^{n+1}-1}{n+1}$.

(xi) $C_0C_1+C_1C_2+C_2C_3+\cdots+C_{n-1}C_n=\frac{\lfloor 2n}{\lfloor n+1\,\lfloor n-1}$.

(xii) $C_0C_2+C_1C_3+C_2C_4+\cdots+C_{n-2}C_n=\frac{\lfloor 2n}{\lfloor n+2\,\lfloor n-2}$.

(xiii) $C_0C_n+C_1C_{n-1}+C_2C_{n-2}+\cdots+C_nC_0=\frac{\lfloor 2n}{\lfloor n\,\lfloor n}$.

(xiv) $C_0C_r+C_1C_{r+1}+C_2C_{r+2}+\cdots+C_{n-r}C_n=\frac{\lfloor 2n}{\lfloor n-r\,\lfloor n+r}$.

(xv) $C_0^2-C_1^2+C_2^2-C_3^2+\cdots+(-1)^nC_n^2=0$,

or, $(-1)^{\frac{n}{2}}\frac{\lfloor n}{\left(\lfloor \frac{n}{2}\right)^2}$, according as n is odd or even.

(xvi) $C_1^2+2C_2^2+3C_3^2+\cdots+nC_n^2=\frac{\lfloor 2n-1}{(\lfloor n-1)^2}$.

(xvii) $C_0^2+2C_1^2+3C_2^2+\cdots(n+1)C_n^2=\frac{(n+2)\lfloor 2n-1}{\lfloor n-1\,\lfloor n}$.

16. Show that (*a*) $(C_0+C_1+C_2+\cdots+C_n)^p={}^{pn}C_0+{}^{pn}C_1+{}^{pn}C_2+\cdots+{}^{pn}C_{pn}$, where p is a positive integer.

$$(b)\ \left\{1+3n+\frac{3n(3n-1)}{\lfloor 2}+\frac{3n(3n-1)(3n-2)}{\lfloor 3}+\cdots\right\}$$
$$\times\left\{1+4n+\frac{4n(4n-1)}{\lfloor 2}+\frac{4n(4n-1)(4n-2)}{\lfloor 3}+\cdots\right\}$$
$$=1+7n+\frac{7n(7n-1)}{\lfloor 2}+\frac{7n(7n-1)(7n-2)}{\lfloor 3}+\cdots$$

17. If $(1+x+x^2)^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_{2n}x^{2n}$, show that

(i) $a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{2n}=3^n$,

(ii) $a_0-a_1+a_2-\cdots+a_{2n}=1$.

Hence, deduce that

(i) $a_0 + a_2 + a_4 + \cdots + a_{2n} = \frac{1}{2}(3^n + 1)$,

(ii) $a_1 + a_3 + \cdots + a_{2n-1} = \frac{1}{2}(3^n - 1)$.

18. Show that

$$\left(\frac{1+x}{1+4x}\right) = 1 - {}^nC_1\left(\frac{3x}{1+4x}\right) + {}^nC_2\left(\frac{3x}{1+4x}\right)^2 - \cdots + (-1)^n\left(\frac{3x}{1+4x}\right)^n.$$

19. Show that, if n is a positive integer,

$$2^n - n.2^{n-1} + \frac{n(n-1)}{\underline{|2}}2^{n-2} - \cdots + (-1)^n = 1.$$

20. Show that

$$x - {}^nC_1(x-y) + {}^nC_2(x-2y) - {}^nC_3(x-3y) + \cdots + (-1)^n(x-ny) = 0.$$

21. Prove that, if n is a positive integer,

$$1 - n.\frac{1+x}{1+nx} + \frac{n(n-1)}{1.2}.\frac{1+2x}{(1+nx)^2} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}.\frac{1+3x}{(1+nx)^3} + \cdots = 0.$$

22. Show that

$$\frac{x^n}{\underline{|n}} + \frac{x^{n-1}y}{\underline{|n-1}\,\underline{|1}} + \frac{x^{n-2}y^2}{\underline{|n-2}\,\underline{|2}} + \cdots + \frac{xy^{n-1}}{\underline{|1}\,\underline{|n-1}} + \frac{y^n}{\underline{|n}} = \frac{(x+y)^n}{\underline{|n}}.$$

23. Show that, if n is a positive integer,

$$(1-x)^n = (1+x)^n - 2nx(1+x)^{n-1} + \frac{2n(2n-2)}{\underline{|2}}x^2(1+x)^{n-2} - \cdots,$$

24. Prove that $5^{2n} - 24n - 1$ is divisible by 576 for all positive integral values of n greater than 1.

25. Prove that $3^{3n} - 26n - 1$ is divisible by 676 for all positive integral values of n greater than 1.

26. Apply the Binomial Theorem to find the value of

(i) $(99)^4$. (ii) $(\cdot999)^4$ correct to 3 places of decimals.

চতুর্থ অধ্যায়

অসীম গুণোত্তর-শ্রেণী এবং ঋণাত্মক বা ভগ্নাঙ্ক সূচক-বিশিষ্ট দ্বিপদ উপপাদ্য

(Infinite Geometric Series and Binomial Theorem for negative or fractional index)

4·1. দশম শ্রেণীর পাঠ্যপুস্তকে 'প্রগতি' অধ্যায়ে সমান্তর-শ্রেণী ও গুণোত্তর-শ্রেণীর আলোচনা হইয়াছে। তাহাতে যে সকল শ্রেণীর আলোচনা হইয়াছে, সেগুলি সসীম (finite) শ্রেণী; কেননা তাহাদের পদ-সংখ্যা নির্দ্দিষ্ট। এরূপ শ্রেণীর যোগফলও নির্দ্দিষ্ট এবং নির্ণয় করা সম্ভব।

এক্ষণে যে শ্রেণীর পদ-সংখ্যা অসীম অর্থাৎ যে শ্রেণীর পদগুলি অনন্ত পর্য্যন্ত বিস্তৃত তাহার আলোচনা করা হইতেছে। যে শ্রেণীর পদ-সংখ্যার সীমা নাই অর্থাৎ অসীম, তাহাকে **অসীম শ্রেণী** (Infinite series) বলে।

4·2. n একটি অখণ্ড ধন-সংখ্যা ও r একটি প্রকৃত ভগ্নাংশ হইলে, প্রমাণ করিতে হইবে যে, n এর মান যতই বাড়িতে থাকিবে, r^n এর মান ততই কমিতে থাকিবে।

মনে কর, $r=\frac{3}{7}$. এখন যেহেতু কোন সংখ্যার $\frac{3}{7}$-তম অংশ স্পষ্টতঃ ঐ সংখ্যা অপেক্ষা ছোট; অতএব,

$(\frac{3}{7})^2$ এর মান $\frac{3}{7}$ অপেক্ষা ছোট; কারণ, $(\frac{3}{7})^2=\frac{3}{7}$ এর $\frac{3}{7}$;

$(\frac{3}{7})^3$ এর মান $(\frac{3}{7})^2$ অপেক্ষা ছোট; কারণ, $(\frac{3}{7})^3=(\frac{3}{7})^2$ এর $\frac{3}{7}$;

$(\frac{3}{7})^4$ এর মান $(\frac{3}{7})^3$ অপেক্ষা ছোট; কারণ, $(\frac{3}{7})^4=(\frac{3}{7})^3$ এর $\frac{3}{7}$;

সুতরাং, দেখা যাইতেছে যে, $\frac{3}{7}, (\frac{3}{7})^2, (\frac{3}{7})^3, (\frac{3}{7})^4,\ldots\ldots$ শ্রেণীতে, যে-কোন পদ উহার পূর্ব্ববর্ত্তী পদ অপেক্ষা ছোট; অর্থাৎ n এর মান যতই বাড়িতে থাকিবে, $(\frac{3}{7})^n$ এর মান ততই কমিতে থাকিবে।

এইপ্রকারে, যে-কোন প্রকৃত ভগ্নাংশের ক্ষেত্রে উপরিউক্ত সিদ্ধান্তের সত্যতা প্রতিপন্ন করা যাইতে পারে।

সুতরাং, r এর মান এক অপেক্ষা ছোট যে-কোন সংখ্যাই হউক না কেন, n এর মান যতই বড় হইতে থাকিবে, r^n এর মান ততই কমিতে থাকিবে।

টীকা। উপরিউক্ত দৃষ্টান্ত হইতে স্পষ্টই বুঝা যায় যে, r যে-কোন প্রকৃত ভগ্নাংশ সূচিত করিলে, n যদি অসীম হয়, তবে r^n এর মান নগণ্য হইবে।

4·3. কোন গুণোত্তর-শ্রেণীর পদ-সংখ্যা অসীম হইলে, ঐ শ্রেণীর পদসমূহের সমষ্টি নির্ণয়।

a, ar, ar^2, ar^3 ইত্যাদি শ্রেণীটির বিষয় বিবেচনা করা যাক। ইহার প্রথম n-সংখ্যক পদের সমষ্টি S দ্বারা সূচিত করিলে, স্পষ্টতঃ,

$$S=\frac{a(1-r^n)}{1-r}=\frac{a}{1-r}-\frac{ar^n}{1-r}.$$

এখন, r এক প্রকৃত ভগ্নাংশ হইলে, n এর মান যতই বাড়িতে থাকিবে, r^n $\left(\text{অতএব, } \frac{ar^n}{1-r}\right)$ এর মান ততই ক্ষুদ্রতর হইতে থাকিবে। সুতরাং, n (অর্থাৎ প্রদত্ত শ্রেণীর পদ-সংখ্যা) এর মান ক্রমশঃ বর্দ্ধিত করিয়া, $\frac{ar^n}{1-r}$ এর মানকে যে-কোন অতিক্ষুদ্র সংখ্যা অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর করা যায়। অতএব, n কে সীমাতীতরূপে বর্দ্ধিত করিতে থাকিলে, n-সংখ্যক পদের সমষ্টিকে $\frac{a}{1-r}$ এর যতদূর ইচ্ছা সন্নিকটবর্ত্তী করা যায়।

এই সিদ্ধান্তকেই সাধারণতঃ নিম্নলিখিতরূপে প্রকাশ করা হয়ঃ—যে-কোন গুণোত্তর-শ্রেণীর পদ-সংখ্যা অসীম হইলে, উক্ত পদসমূহের সমষ্টি $\frac{a}{1-r}$ এর সমান হয়। অথবা, সংক্ষেপে, **অসীম-সংখ্যক পদবিশিষ্ট গুণোত্তর-শ্রেণীর পদ-সমূহের সমষ্টি** $=\frac{a}{1-r}$, অর্থাৎ, $\frac{\text{প্রথম}}{1-(\text{সাধারণ অনুপাত})}$।

দৃষ্টান্তস্বরূপ, $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8},\ldots$ ইত্যাদি গুণোত্তর-শ্রেণীর বিষয় বিবেচনা করা যাক।

এক্ষেত্রে, $a=1, r=\frac{1}{2}$; $\therefore$ প্রথম n-সংখ্যক পদের সমষ্টি

$$=\frac{1}{1-\frac{1}{2}}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)=2-\frac{1}{2^{n-1}}.$$

এখন, n কে সীমাতীতরূপে বাড়াইতে থাকিলে, 2^{n-1} সীমাতীতরূপে বাড়িতে থাকিবে এবং কাজেই, $\frac{1}{2^{n-1}}$ ক্রমশঃ কমিতে কমিতে নগণ্য হইয়া যাইবে।

সুতরাং, উপরিউক্ত শ্রেণীর পদ-সংখ্যা অসীম হইতে থাকিলে, পদসমূহের সমষ্টি ক্রমশঃ 2 এর সন্নিকটবর্ত্তী হইতে থাকিবে ; অর্থাৎ,

উক্ত শ্রেণীর অসীম-সংখ্যক পদের সমষ্টি $=2$.

টীকা। লক্ষ্য করিবার বিষয় এই যে, কোন গুণোত্তর-শ্রেণীর n-সংখ্যক পদের সমষ্টি, n সীমাতীতরূপে বাড়িতে থাকিলে, ক্রমশঃ এক নির্দ্দিষ্ট সসীম সংখ্যার সন্নিকটবর্ত্তী হইতে থাকে, যদি উক্ত শ্রেণীর সাধারণ অনুপাত এক অপেক্ষা ছোট হয়। কিন্তু, সাধারণ অনুপাত যদি এক অপেক্ষা বড় হয়, তাহা হইলে উপরিউক্ত সমষ্টির কোন নির্দ্দিষ্ট সসীম মান থাকে না।

4·4. আবৃত্ত দশমিক (Recurring Decimals)। আবৃত্ত দশমিক অসীম গুণোত্তর-শ্রেণী দ্বারা উৎপন্ন রাশিমালার উৎকৃষ্ট দৃষ্টান্ত। যথা,

$$\cdot 2\dot{3}\dot{4} = \cdot 234343434\cdots\cdots$$

$$\left.\begin{array}{l} = \cdot 2 \\ + \cdot 034 \\ + \cdot 00034 \\ + \cdot 0000034 \\ + \cdots \text{ইত্যাদি} \end{array}\right\} = \frac{2}{10} + \frac{34}{10^3} + \frac{34}{10^5} + \frac{34}{10^7} + \cdots \text{ইত্যাদি।}$$

এক্ষেত্রে, $\frac{3}{10}$ এর পরবর্ত্তী পদসমূহ এরূপ এক গুণোত্তর-শ্রেণী উৎপন্ন করিয়াছে, যাহার প্রথম পদ $\frac{34}{10^3}$ এবং সাধারণ অনুপাত $\frac{1}{10^2}$.

$$\text{অতএব, } \cdot 2\dot{3}\dot{4} = \frac{2}{10} + \frac{34}{10^3} \div \left(1 - \frac{1}{10^2}\right) = \frac{2}{10} + \frac{34}{990} = \frac{232}{990},$$

$$\left[\text{অর্থাৎ, } \frac{234-2}{990}\right].$$

উদা. 1. অসীম-সংখ্যক পদবিশিষ্ট কোন গুণোত্তর-শ্রেণীর পদসমূহ ক্রমশঃ কমিতে থাকিলে, উহার যে-কোন পদ এবং উক্ত পদের পরবর্ত্তী পদসমূহের সমষ্টির অনুপাত এক ধ্রুবক-সংখ্যা হইবে।

মনে কর, উল্লিখিত গুণোত্তর-শ্রেণীটি $a, ar, ar^2, ar^3, \ldots\ldots$, ইত্যাদি দ্বারা সূচিত হইতেছে। এখন, ঐ শ্রেণীর n-তম পদ $= ar^{n-1}$;

এবং উক্ত n-তম পদের পরবর্তী পদসমূহের সমষ্টি

$$= ar^n (1 + r + r^2 + r^3 + \cdots\cdots \infty)$$

$$= ar^n \frac{1}{1-r},$$

$\therefore$ (n-তম পদ) : (উহার পরবর্তী পদসমূহের সমষ্টি) $\dfrac{ar^{n-1}}{ar^n \dfrac{1}{1-r}} = \dfrac{1-r}{r}$

= এক ধ্রুবক-সংখ্যা, কারণ, n এর মান যাহাই হউক না কেন, $\dfrac{1-r}{r}$ এর মান সকল ক্ষেত্রে একই থাকিবে।

[অসীম-সংখ্যক পদবিশিষ্ট গুণোত্তর-শ্রেণীকে সংক্ষেপে **অসীম গুণোত্তর-শ্রেণী** বলা হয়।]

উদা. 2. নিম্নলিখিত রাশিমালার মান নির্ণয় কর :

$\frac{3}{2} - \frac{2}{3} + \frac{8}{27} - \cdots\cdots$ অসীম-সংখ্যক পদ পর্যন্ত।

এক্ষেত্রে, $a = \frac{3}{2}$, এবং $r = -\frac{2}{3} \div \frac{3}{2} = -\frac{4}{9}$.

$\therefore$ নির্ণেয় মান $= \dfrac{\frac{3}{2}}{1-(-\frac{4}{9})} = \dfrac{\frac{3}{2}}{1+\frac{4}{9}} = \dfrac{3}{2} \times \dfrac{9}{13} = \dfrac{27}{26}$.

উদা. 3. If $x < 1$, sum the series $1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \&c.$ to infinity.

মনে কর, নির্ণেয় যোগফল $= S$; তাহা হইলে,

$$S = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots\cdots \infty \qquad \cdots \quad (1)$$

এবং $\therefore$ $Sx = \quad x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots\cdots \infty \qquad \cdots \quad (2)$

(1) হইতে (2) বিয়োগ করিয়া,

$$S(1-x) = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots\cdots \infty$$

$$= \frac{1}{1-x}.$$

$$\therefore \quad S = \frac{1}{(1-x)^2}.$$

প্রশ্নমালা 16

Sum to infinity each of the following series :

1. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots$

2. $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}-\frac{1}{8}+\cdots$

3. $\frac{5}{8}+\frac{1}{2}+\frac{2}{5}+\frac{8}{25}+\cdots$

4. $1-\frac{2}{3}+\frac{4}{9}-\cdots$

5. $3\frac{3}{8}+2\frac{1}{4}+1\frac{1}{2}+\cdots$

6. $\frac{2}{5}+\frac{3}{5^2}+\frac{2}{5^3}+\frac{3}{5^4}+\cdots$

7. $\frac{4}{7}+\frac{5}{7^2}+\frac{4}{7^3}+\frac{5}{7^4}+\cdots$

8. $\sqrt{3}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}+\cdots$

9. $(\sqrt{2}+1)+1+(\sqrt{2}-1)+\cdots$

10. Find the common ratio of a G.P., continued to infinity in which each term is ten times the sum of all the terms which follow it.

11. Find by the method of summation of infinite Geometric series the value of :

(i) $02\dot{7}$; (ii) $1{\cdot}1\dot{4}\dot{5}$; (iii) ${\cdot}21\dot{5}0\dot{1}$; (iv) ${\cdot}\dot{1}4285\dot{7}$.

12. Sum $1+3x+5x^2+7x^3+\cdots$ to infinity.

13. Sum $1.2x+2.4x^2+3.8x^3+\cdots$ to infinity.

14. Sum $1.3x+4.9x^2+7.27x^3+\cdots$ to infinity.

15. Sum $1-3x+5x^2-7x^3+\cdots$ to infinity.

16. Sum $\frac{1}{3}+\frac{3}{9}+\frac{5}{27}+\cdots$ to infinity.

17. Find the sum of the infinite series $1+(1+a)r+(1+a+a^2)\times r^2+(1+a+a^2+a^3)r^3+\cdots$, r and a being proper fractions.

4·5. অসীম শ্রেণীগুলিকে ইহাদের যোগফলের প্রকৃতি অনুসারে সাধারণতঃ তিনভাগে ভাগ করা যায় :

(ক) যে শ্রেণীর পদ-সংখ্যা (n) অসীম পর্য্যন্ত হইলেও উহার n পদসমূহের যোগফল (s_n) কোন নির্দ্দিষ্ট মান অতিক্রম করিতে পারে না, তাহাকে **অভিসারী** (convergent) **অসীম শ্রেণী** বলে। যথা,

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots\infty.$$

এই শ্রেণীর যোগফল 2 কে অতিক্রম করে না। এক্ষেত্রে দেখা যায় যে, n এর মান যতই বৃদ্ধি পায়, যোগফলও ততই 2 এর নিকটবর্তী হয়।

n এর মান অসীমের দিকে অগ্রসর হইতেছে বুঝাইবার জন্য '$n \to \infty$' প্রতীকটি ব্যবহৃত হয়।

r যদি অসীমের দিকে অগ্রসর হয় ($r \to \infty$), তবে $\frac{1}{r}$ এর সীমাস্থ মান শূন্য (0) হয়।

r এর মান 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইলে ($|r| < 1$), ঐ অসীম শ্রেণীটি অভিসারী হয়।

(খ) যে শ্রেণীর পদ-সংখ্যা (n) অনন্তের দিকে অগ্রসর হইলে, উহার n-তম পদ অসীম হইয়া পড়ে এবং S_n এর সীমাস্থ মানও অসীম হইয়া পড়ে—এরূপ শ্রেণীকে **অপসারী** (divergent) **অসীম শ্রেণী** বলে।

যথা, $1+2+3+4+\cdots\cdots\infty$, $1+2^2+2^3+\cdots\infty$. এরূপ শ্রেণীর যোগফল নির্ণয় করা সম্ভব নহে। এরূপ ক্ষেত্রে সাধারণ অন্তর বা অনুপাত কখনও 1 এর চেয়ে ক্ষুদ্রতর নহে।

(গ) উপরিউক্ত (ক) ও (খ) শ্রেণী ভিন্নও আর একপ্রকার অসীম শ্রেণী আছে, যাহার সমষ্টি বিভিন্ন ক্ষেত্রে বিভিন্ন হয়। এরূপ শ্রেণীকে **দোলায়মান** (oscillatory) **অসীম শ্রেণী** বলে। যথা,

$$1-1+1-1+1-\cdots\cdots\infty.$$

এক্ষেত্রে, শ্রেণীটিকে $(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots\cdots\infty$ ধরিলে, ইহার সমষ্টি $=0$.

আবার, শ্রেণীটিকে $1-(1-1)-(1-1)-\cdots\cdots\infty$ ধরিলে, ইহার যোগফল $=1$.

4·6. ঋণাত্মক অথবা ভগ্নাঙ্ক সূচক-বিশিষ্ট দ্বিপদ উপপাদ্য (Binomial Theorem for negative or fractional index).

x এর সাংখ্যমান 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইলে, ঋণাত্মক অথবা ভগ্নাঙ্ক n এর জন্য,

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{\lfloor 2}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{\lfloor 3}x^3 + \cdots\cdots$$
$$+ \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{\lfloor r}x^r \cdots\cdots \text{ অসীম পর্য্যন্ত।}$$

লক্ষণীয়

(1) 'x এর সাংখ্যমান 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইলে, শর্ত্তটিকে **'চিহ্ন-বর্জ্জিত x এর মান 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইলে',** এইরূপেও লেখা চলে।

আবার, কোন সংখ্যার সাংখ্যমান এবং পরম মান (absolute value) একই অর্থ-জ্ঞাপক বলিয়া পরম মানের চিহ্ন-সাহায্যে শর্ত্তটিকে '**$|x| < 1$ হইলে,** এইরূপেও লেখা চলে।

আবার, x এর সাংখ্যমান বা পরম মান 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইলে, x, -1 এবং 1 এর অন্তর্ব্বর্ত্তী (শূন্য ভিন্ন, কারণ x শূন্য হইলে, $1+x$ দ্বিপদ হইবে না) কোন সংখ্যা হইবে, -1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর বা 1 অপেক্ষা বৃহত্তর কোন সংখ্যা হইতে পারে না; অতএব, শর্ত্তটিকে '$-1 < x < 1$ হইলে', এইরূপেও লেখা চলে।

(2) দক্ষিণ-পক্ষস্থ শ্রেণীটির $(r+1)$-তম পদ হইতেছে

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{\underline{|r}}\,x^r\,;$$

স্পষ্টই, ইহার লব, n ঋণাত্মক অথবা ভগ্নাঙ্ক বলিয়া, r এর কোন ধনাত্মক পূর্ণ মানের জন্যই শূন্য হইতে পারে না; অতএব, শ্রেণীটির কোন পদই শূন্য হইবে না; সুতরাং, শ্রেণীটি **অসীম পর্য্যন্ত** বিস্তৃত হইবে। মনে রাখিতে হইবে, n ঋণাত্মক অথবা ভগ্নাঙ্ক না হইয়া ধনাত্মক এবং পূর্ণ সংখ্যা হইলেও $(1+x)^n$ এর বিস্তৃতির $(r+1)$-তম পদ হইবে

$$\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{\underline{|r}}\,x^r,$$

কিন্তু, এক্ষেত্রে, $(n+1)$, $(n+2)$, প্রভৃতি n অপেক্ষা বৃহত্তর r এর যে-কোন ধনাত্মক, পূর্ণ মানের জন্যই পদটির লব শূন্য হইবে বলিয়া, বিস্তৃতিটিতে $(n+1)$-তম পদের পরে আর কোন পদই থাকিবে না, অর্থাৎ, এক্ষেত্রে শ্রেণীটি **সসীম** (finite) এবং ইহার পদ-সংখ্যা $n+1$.

(3) কেবলমাত্র $-1 < x < 1$ হইলেই উপপাদ্যটি সত্য হয়, অন্যথা, $(1+x)^n$ দক্ষিণ-পক্ষস্থ বিস্তৃতিটির সমান হইবে না। যেমন,

x এর স্থলে $-x$ এবং n এর স্থলে -1 ধরিয়া বিস্তৃতিটির পদগুলি সরল করিয়া রাখিলে, নিম্নলিখিত বিস্তৃতিটি পাওয়া যায়:

$$(1-x)^{-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots \qquad \cdots (1)$$

x এর স্থলে 2 বসাইলে,

বাম পক্ষ $=(1-2)^{-1}=(-1)^{-1}=-1$;

দক্ষিণ পক্ষ $=1+2+2^2+2^3+\cdots$;

পূর্ব্বেই দেখানো হইয়াছে ইহা একটি অপসারী শ্রেণী ; ইহার সমষ্টি কখনই -1 হইতে পারে না। অতএব, দেখা গেল, যখন $x>1$, অর্থাৎ $-1<x<1$ নহে, তখন (1) এর বাম পক্ষ ও দক্ষিণ পক্ষ সমান হয় না।

4·7. সাধারণ পদ।

$(r+1)$-তম পদকে বিস্তৃতির সাধারণ পদ বলে এবং সাধারণতঃ ইহাকে t_{r+1} দ্বারা সূচিত করা হয়।

এখন, $$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{\lfloor 2}x^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{\lfloor 3}x^3+\cdots$$

$$\therefore \quad \mathbf{t_{r+1}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{\lfloor r}x^r.}$$

4·8. কতিপয় প্রয়োজনীয় বিস্তৃতি।

(1) $$\mathbf{(1-x)^n}=1+n(-x)+\frac{n(n-1)}{\lfloor 2}(-x)^2+\frac{n(n-1)(n-2)}{\lfloor 3}(-x)^3$$
$$+\cdots+\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{\lfloor r}(-n)^r+\cdots$$
$$\mathbf{=1-nx+\frac{n(n-1)}{\lfloor 2}x^2-\frac{n(n-1)(n-2)}{\lfloor 3}x^3+\cdots}$$
$$\mathbf{+(-1)^r\,\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{\lfloor r}x^r+\cdots.}$$

(2) $$\mathbf{(1+x)^{-n}}=1+(-n)x+\frac{-n(-n-1)}{\lfloor 2}x^2+$$
$$\frac{-n(-n-1)(-n-2)}{\lfloor 3}x^3+\cdots+$$
$$\frac{-n(-n-1)(-n-2)\cdots(-n-r+1)}{\lfloor r}x^r+\cdots$$
$$\mathbf{=1-nx+\frac{n(n+1)}{\lfloor 2}x^2-\frac{n(n+1)(n+2)}{\lfloor 3}x^3+\cdots}$$
$$\mathbf{+(-1)^r\frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+r-1)}{\lfloor r}x^r+\cdots}$$

(3) $(1-x)^{-n}$

$$=1+(-n)(-x)+\frac{(-n)(-n-1)}{\lfloor 2}(-x)^2+\cdots$$

$$+\frac{(-n)(-n-1)(-n-2)}{\lfloor 3}(-x)^3+\cdots$$

$$+\frac{(-n)(-n-1)(-n-2)\cdots(-n-r+1)}{\lfloor r}(-x)^r+\cdots$$

$$=1+nx+\frac{(n+1)}{\lfloor 2}x^2+\frac{n(n+1)(n+2)}{\lfloor 3}x^3+\cdots$$

$$+\frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+r-1)}{\lfloor r}x^r+\cdots$$

(4) $(1+x)^{-1}=1-x+x^2-x^3+\cdots+(-1)^r x^r+\cdots$

(5) $(1-x)^{-1}=1+x+x^2+x^3+\cdots+x^r+\cdots$

(6) $(1+x)^{-2}=1-2x+3x^2-4x^3+\cdots+(-1)^r(r+1)x^r+\cdots$

(7) $(1-x)^{-2}=1+2x+3x^2+4x^3+\cdots+(r+1)x^r+\cdots$

(8) $(1+x)^{-3}=1-3x+6x^2-10x^3$

$$+\cdots+(-1)^r\frac{(r+1)(r+2)}{\lfloor 2}x^r+\cdots$$

(9) $(1-x)^{-3}=1+3x+6x^2+10x^3+\cdots+\frac{(r+1)(r+2)}{\lfloor 2}x^r+\cdots$

অনুসি. (1) $(1-x)^n$ এর বিস্তৃতির পদ

$$t_{r+1}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{\lfloor r}(-x)^r$$

$$=(-1)^r\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{\lfloor r}x^r.$$

(2) $(1+x)^{-n}$ এর বিস্তৃতির সাধারণ পদ

$$t_{r+1}=\frac{-n(-n-1)(-n-2)\cdots(-n-r+1)}{\lfloor r}x^r$$

$$=(-1)^r\frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+r-1)}{\lfloor r}x^r.$$

(3) $(1-x)^{-n}$ এর বিস্তৃতির সাধারণ পদ

$$t_{r+1}=\frac{-n(-n-1)(-n-2)\cdots(-n-r+1)}{\lfloor r}(-x)^r$$

$$=(-1)^r \frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+r-1)}{\lfloor r}(-1)^r x^r$$

$$=(-1)^{2r} \frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+r-1)}{\lfloor r} x^r$$

$$=\frac{n(n+1)(n+2)\cdots(n+r-1)}{\lfloor r} x^r.$$

দ্রষ্টব্য। (3) এর সাধারণ পদের আকার হইতে বুঝা যায় $(1-x)^{-n}$ এর বিস্তৃতির সকল পদই ধনাত্মক।

4·9. ভগ্নাঙ্ক অথবা ঋণাত্মক সূচক-বিশিষ্ট (a+x) এর n-তম ঘাত : $(a+x)^n$ এর বিস্তৃতি।

(1) $x < a$ হইলে, $\frac{x}{a} < 1$;

$$\therefore \quad (a+x)^n = \left\{a\left(1+\frac{x}{a}\right)\right\}^n$$

$$= a^n\left(1+\frac{x}{a}\right)^n$$

$$= a^n\left\{1+\frac{nx}{a}+\frac{n(n-1)}{\lfloor 2}\left(\frac{x}{a}\right)^2+\cdots\right\}$$

$$= a^n + na^{n-1}x + \frac{n(n-1)}{\lfloor 2}a^{n-2}x^2+\cdots.$$

(2) $x > a$ হইলে, $\frac{a}{x} < 1$;

$$\therefore \quad (a+x)^n = \left\{x\left(1+\frac{a}{x}\right)\right\}^n$$

$$= x^n\left\{1+\frac{na}{x}+\frac{n(n-a)}{\lfloor 2}\left(\frac{a}{x}\right)^2+\cdots\right\}$$

$$= x^n + nx^{n-1}a + \frac{n(n-1)}{\lfloor 2}x^{n-2}a^2+\cdots$$

উদা. 1. Give the first four terms of the expansion of $\frac{1}{(2-3x^2)^{\frac{4}{5}}}$. [C. U. 1876]

$$\frac{1}{(2-3x^2)^{\frac{4}{5}}} = \frac{1}{2^{\frac{4}{5}}\left(1-\frac{3x^2}{2}\right)^{\frac{4}{5}}} = \frac{1}{2^{\frac{4}{5}}}\left(1-\frac{3x^2}{2}\right)^{-\frac{4}{5}}$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{4}{5}}}\left\{1 + (-\tfrac{4}{5}).\left(-\frac{3x^2}{2}\right) + \frac{(-\frac{4}{5})(-\frac{4}{5}-1)}{\underline{|2}}.\left(-\frac{3x^2}{2}\right)^2 + \frac{(-\frac{4}{5})(-\frac{4}{5}-1)(-\frac{4}{5}-2)}{1.2.3}\left(\frac{-3x^2}{2}\right)^3 + \cdots\right\}$$

$$= \frac{1}{2^{\frac{4}{5}}}\left\{1 + \frac{4}{5}.\frac{3x^2}{2} + \frac{4.9}{5^2.2}.\frac{9x^4}{4} + \frac{4.9.14}{5^3.2.3}.\frac{27x^6}{8} + \cdots\right.$$

$$= \frac{1}{\sqrt[5]{16}}\left\{1 + \frac{6}{5}x^2 + \frac{81}{50}x^4 + \frac{567}{250}x^6 + \cdots\right\}.$$

উদা. 2. Find the $(r+1)$th term in the expansion of $(1+x)^{\frac{1}{2}}$.

$$(r+1)\text{-তম পদ} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)\cdots(\frac{1}{2}-r+1)}{\underline{|r}}x^r$$

$$= \frac{1(-1)(-3)\cdots(-2r+3)}{2^r.\underline{|r}}x^r$$

$$= (-1)^{r-2}.\frac{1.3.5.\ \&c.\ (2r-3)}{2^r\ \underline{|r}}x^r.$$

[লব হইতে উহার $(r-1)$-সংখ্যক গুণকের প্রত্যেকটি হইতে -1 বাহির করিয়া লইয়া।]

উদা. 3. Find the $(r+1)$th term in the expansion of $(1-x)^{-4}$.
[C. U. 1912, '16]

$$(r+1)\text{-তম পদ} = \frac{(-4)(-4-1)(-4-2)\cdots(-4-r+1)}{\underline{|r}}.(-x)^r$$

$$= \frac{(-4)(-5)(-6)\cdots(-r-3)}{\underline{|r}}.(-x)^r$$

$$= (-1)^r.\frac{4.5.6.\ldots.(r+3)}{\underline{|r}}.(-1)^r.x^r$$

$$= (-1)^{2r}.\frac{4.5.6.\ldots.(r+3)}{1.2.3.\ldots.r}.x^r$$

$$= \frac{(r+1)(r+2)(r+3)}{1.2.3}.x^r.$$

(লব ও হর হইতে সমান পদগুলি অপসারণ করিয়া)

[মনে রাখিতে হইবে, n ভগ্নাঙ্ক, অথবা ঋণাত্মক হইলে $(r+1)$-তম পদের সহগ ^nC_r নহে।]

উদা. 4. Write down the rth term of the expansion of $(1-x)^{\frac{3}{2}}$. [C. U. 1878]

$$r\text{-তম পদ} = \frac{\frac{3}{2}(\frac{3}{2}-1)(\frac{3}{2}-2)\dots(\frac{3}{2}-r+2)}{\lfloor r-1}\cdot(-x)^{r-1}$$

$$= \frac{3.1.(-1)(-3)\dots(-2r+7)}{2^{r-1}\lfloor r-1}\cdot(-x)^{r-1}$$

$$= (-1)^{r-3}\cdot\frac{3.1.1.3.5\dots(2r-7)}{2^{r-1}\lfloor r-1}\cdot(-1)^{r-1}.x^{r-1}$$

[$r > 3$ ধরিয়া এবং লক্ষ্য করিয়া যে, লবের $(r-1)$-সংখ্যক গুণকের 2টি ভিন্ন সবগুলিই ঋণাত্মক]

$$= (-1)^{2r-4}\cdot\frac{3.1.1.3.5\dots\dots(2r-7)}{2^{r-1}\lfloor r-1}\cdot x^{r-1}$$

$$= 5\times\frac{1.3.5\dots(2r-7)}{2^{r-1}\lfloor r-1}\cdot x^{r-1}.$$

উদা. 5. Show that the coefficient of x^r in the expansion of $(1+x)^{\frac{5}{3}}$ is

$$\frac{10}{3^r}\cdot\frac{1.4.7\dots(3r-8)}{r\,!}(-1)^{r-2}.$$

$(1+x)^{\frac{5}{3}}$ এর বিস্তৃতিতে ইহার $(r+1)$-তম পদে x^r থাকিবে।

$$\therefore\ \text{নির্ণেয় সহগ} = \frac{\frac{5}{3}(\frac{5}{3}-1)(\frac{5}{3}-2)(\frac{5}{3}-3)\dots(\frac{5}{3}-r+1)}{r\,!}$$

$$= \frac{5.2.(-1)(-4)(-7)\dots(-3r+8)}{3^r\, r\,!}$$

$$= (-1)^{r-2}\cdot\frac{5.2.1.4.7\dots(3r-8)}{3^r.r\,!}$$

[লবের r-সংখ্যক গুণকের মাত্র 2টি ধনাত্মক, বাকী সবগুলিই ঋণাত্মক বলিয়া]

$$= \frac{10}{3^r}\cdot\frac{1.4.7\dots(3r-8)}{r\,!}(-1)^{r-2}.$$

উদা. 6. Show that the coefficient of the $(r+1)$th term in the expansion of $(1-2x)^{-\frac{1}{2}}$ is

$$\frac{\lfloor 2r}{2^r(\lfloor r)^2}. \qquad \text{[C. U. 1938]}$$

$$(r+1)\text{-তম পদ} = \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)(\frac{1}{2}+2)\ldots(\frac{1}{2}+r-1)}{\lfloor r}(2x)^r$$

$$= \frac{1.3.5\ldots(2r-1)}{2^r \lfloor r}.2^r.x^r$$

$$= \frac{1.3.5\ldots(2r-1)}{\lfloor r}x^r.$$

$$\therefore \quad (r+1)\text{-তম পদের সহগ} = \frac{1.3.5\ldots(2r-1)}{\lfloor r}$$

$$= \frac{1.3.5\ldots(2r-1).2.4.6\ldots 2r}{2.4.6\ldots 2r \lfloor r}$$

$$= \frac{\lfloor 2r}{2^r \lfloor r \lfloor r} = \frac{\lfloor 2r}{2^r(\lfloor r)^2}.$$

উদা. 7. Expand $\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ in ascending powers of x as far as x^4.

$$\sqrt{\frac{1+x}{1+x}} = \sqrt{\frac{(1+x)^2}{1-x^2}} = \frac{1+x}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} = (1+x)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= (1+x)(1+\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{3}{8}x^4+\cdots)$$

$$= 1+x+\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{2}x^3+\tfrac{3}{8}x^4.$$

প্রশ্নমালা 17

1. Find the expansion of:

(a) $\sqrt{1+x}$. (b) $\sqrt[3]{1-x}$. [C. U. 1911]

2. Expand to 5 terms:

(a) $(1-2x)^{-3}$. (b) $(1-x)^{-\frac{1}{2}}$. (c) $(1-3x)^{-\frac{1}{3}}$.

3. Expand $\left(1+\dfrac{2x}{3}\right)^{\frac{3}{2}}$ to 4 terms.

4. Expand $(9-6x)^{-\frac{3}{2}}$ to 4 terms.

5. Expand to 5 terms :

(*a*) $(3a^{-2}-2x)^{-1}$. (*b*) $\dfrac{1}{(1+\sqrt[3]{x})^6}$.

6. Expand $\sqrt{\dfrac{x-1}{1+x}}$ in ascending powers of x as far as x^6.

7. Find the coefficient of :

(*a*) x^7 in the expansion of $(1-5x)^{-\frac{3}{4}}$. (*b*) x^r in $(1-2x)^{-1}$.

8. Find the first four terms in the expansion of :

(*a*) $(1-4x)^{\frac{1}{2}}$. [C. U. 1923] (*b*) $(1-\frac{1}{2}x)^{-\frac{1}{2}}$.

9. Writing down the 11th term of $(2-2x)^{\frac{11}{2}}$.

10. Write down the $(r+1)$th term in the expansion of $(1-px)^{\frac{1}{p}}$.

11. Write down the $(r+1)$th term in the expansion of $\dfrac{1}{\sqrt[4]{x-1}}$.

12. Find the $(r+1)$th term in the expansion of $(1-2x)^{-\frac{7}{2}}$.

13. Find the rth term of $(a^2+x^2)^{-2}$ and of $(1-x^2)^{-\frac{1}{3}}$.

14. Find the coefficient of x^{12} in $(a^5-b^3x^2)^{\frac{5}{2}}$.

15. Find the 14th term of $(2^{10}-2^7.x)^{\frac{13}{2}}$.

16. Expand $\dfrac{3a}{(a^3-x^2)^{\frac{1}{3}}}$ to 5 terms and write down the $(r+1)$th term of the expansion.

17. Find (*a*) the rth term in the expansion of $(a-x)^{-\frac{1}{n}}$.
[C. U. 1885]

(*b*) the general term in the expansion of $(1-nx)^{-\frac{1}{n}}$.

18. Find the $(r+1)$th term in the expansion of $(1-2x)^{-\frac{2}{3}}$.

19. Show that the nth coefficient in the expansion of $(1-x)^{-n}$ is always the double of the $(n-1)$th.

20. (*a*) Show that the coefficient of x^r in the expansion of $(1-4x)^{-\frac{1}{2}}$ is $\dfrac{\lfloor 2r}{(\lfloor r)^2}$.

(*b*) Show that if t_r denote the middle term of $(1+x)^{2r}$, $t_0+t_1+t_2+\cdots=(1-4x)^{-\frac{1}{2}}$.

21. Show that the coefficient of x^r in the expansion of $(1-x)^{-\frac{p}{q}}$ is

$$\frac{p(p+q)(p+2q)\cdots\{p+(r-1)q\}}{\lfloor r.\, q^r}.$$

22. What term of $(1+2x)^{\frac{1}{2}}$ is $\frac{1}{8}$ of the same term of $(1-2x)^{-\frac{1}{2}}$?

4·10. বৃহত্তম পদ।

n ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা হইলে, যে পদ্ধতিতে বৃহত্তম পদ নির্ণয় করা হইয়াছে, ভগ্নাঙ্ক বা ঋণাত্মক n এর ক্ষেত্রেও সেই একই পদ্ধতিতে বৃহত্তম পদ নির্ণয় করা যায়। নিম্নে প্রদত্ত উদাহরণগুলি হইতে প্রক্রিয়া সুস্পষ্ট হইবে।

উদা. 1. Which is the greatest term in the expansion of $(1+x)^{\frac{21}{2}}$, when $x=\frac{2}{3}$?

$$T_{r+1}=\left(\frac{\frac{21}{2}-r+1}{r}\cdot x\right)\times T_r=\left(\frac{\frac{23}{2}-r}{r}\cdot\frac{2}{3}\right)\times T_r.$$

$\therefore\ T_{r+1}>,=,$ অথবা, $<T_r$ হইবে,

যদি $\dfrac{\frac{23}{2}-r}{r}\cdot\frac{2}{3}>,=,$ অথবা, <1 হয়,

অর্থাৎ, যদি $23-2r>,=,$ অথবা, $<3r$ হয়,

অর্থাৎ, যদি $23\quad >,=,$ অথবা, $<5r$ হয়,

অর্থাৎ, যদি $r\quad <,=,$ অথবা, $>4\frac{3}{5}$ হয়।

অতএব, r এর 4 পর্যন্ত সকল মানের জন্য $T_{r+1}<T_r$ এবং r এর 4 অপেক্ষা বৃহত্তর মানের জন্য $T_{r+1}<T_r$. অতএব, পঞ্চম পদটি বৃহত্তম পদ।

উদা. 2. Which is the greatest term in the expansion of $(1+x)^{-n}$, when $x=\frac{5}{7}$ and $n=3$?

$$T_{r+1}=\left(\frac{-n-r+1}{r}\cdot x\right)\times T_r=-\left(\frac{n+r-1}{r}\cdot x\right)\times T_r$$

$$=-\left(\frac{2+r}{r}\cdot\frac{5}{7}\right)\times T_r.$$

$\therefore\ |T_{r+1}|>,=,$ অথবা, $<|T_r|$,

যদি $\frac{2+r}{r}\cdot\frac{5}{7}>,=,$ অথবা, <1 হয়,

অর্থাৎ, যদি $10+5r>,=,$ অথবা, $<7r$ হয়,

অর্থাৎ, যদি $10>,=,$ অথবা, $<2r$ হয়,

অর্থাৎ, যদি $r<,=,$ অথবা, >5 হয়,

অতএব, r এর 4 পর্য্যন্ত মানের জন্য, $|T_{r+1}|>|T_r|$;

$r=5$ হইলে, $|T_{r+1}|=|T_r|$; r এর 5 অপেক্ষা বৃহত্তর মানের জন্য $|T_{r+1}|<|T_r|$.

অতএব, চিহ্ন-বর্জ্জিত পঞ্চম ও ষষ্ঠ পদ দুইটি পরস্পর সমান হইবে এবং উহারাই বৃহত্তম পদ হইবে।

উদা. 3. Show that the 11th term in the expansion of $(1+2x)^{\frac{26}{3}}$ is the first negative term.

মনে কর, $(1+2x)^{\frac{26}{3}}$ এর বিস্তৃতিতে উহার $(r+1)$-তম পদ প্রথম ঋণাত্মক চিহ্নযুক্ত পদ ; তাহা হইলে r-তম পদটি ধনাত্মক।

এখন, $T_{r+1}=\frac{n-r+1}{r}\cdot 2x\times T_r$

$$=\frac{\frac{26}{3}-r+1}{r}\cdot 2x\times T_r=\frac{9\frac{2}{3}-r}{r}\cdot 2x\times T_r.$$

x এবং T_r ধনাত্মক বলিয়া, $9\frac{2}{3}-r$ ঋণাত্মক হইলে, T_{r+1} ঋণাত্মক হইবে, অর্থাৎ $r>9\frac{2}{3}$ হইলেই T_{r+1} ঋণাত্মক পদ হইবে। অতএব, $r=10$ হইলে, T_{r+1} প্রথম ঋণাত্মক পদ হইবে।

$\therefore$ $(r+1)$-তম পদ, অর্থাৎ 11-তম পদটিই প্রথম ঋণাত্মক পদ।

প্রশ্নমালা 18

Which is the greatest term in each of the following expansions ?

1. $(1+x)^{-n}$, when $x=\frac{1}{5}$ and $n=12$.

2. $(1-7x)^{-\frac{11}{4}}$, when $x=\frac{1}{8}$. **3.** $(1+x)^{\frac{3}{2}}$, when $x=\frac{5}{6}$.

4. $(5-4x)^{-7}$, when $x=\frac{1}{2}$.

5. $(12+7x)^{-n}$, when $x=1$ and $n=\frac{8}{3}$.

6. What is the first negative term in the expansion of

(i) $(1+x)^{3\frac{1}{3}}$. (ii) $\left(1+\frac{7x}{2}\right)^{\frac{13}{3}}$. [P. U. 1947]

7. Find how many terms are positive in the expansion of $(1-x)^{\frac{7}{3}}$.

4·11. দ্বিপদ উপপাদ্যের প্রয়োগ।

উদা. 1. Evaluate $\sqrt{24}$ by means of the Binomial Theorem to 5 places of decimals. [C. U. 1872]

$$\sqrt{24}=(24)^{\frac{1}{2}}=(5^2-1)^{\frac{1}{2}}=5\left(1-\frac{1}{5^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=5\left[1+\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{5^2}\right)+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{1.2}\cdot\left(-\frac{1}{5^2}\right)^2+\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)(\frac{1}{2}-2)}{1.2.3}\cdot\left(-\frac{1}{5^2}\right)^3+\cdots\right]$$

$$=5\left[1-\frac{1}{2.5^2}-\frac{1}{2^3 5^4}-\frac{1}{2^4.5^6}-\cdots\right]$$

$$=5\left[1-\frac{2}{10^2}-\frac{2}{10^4}-\frac{2^2}{10^6}-\cdots\right]$$

$$=5\,[1-(\text{·}02+\text{·}0002+\text{·}000004)-\&c.]=5(1-\text{·}020204)$$

(দশমিক বিন্দুর পরে পাঁচটি স্থানেই শূন্য আসে বলিয়া অন্যান্য পদগুলি বিবেচনা না করিয়া)

$$=5\times\text{·}979796=4\text{·}89898.$$

উদা. 2. Find the value $\sqrt[5]{3128}$ to 5 places of decimals.

$$\sqrt[5]{3128}=(3125+3)^{\frac{1}{5}}=(5^5+3)^{\frac{1}{5}}=5\left(1+\frac{3}{5^5}\right)^{\frac{1}{5}}$$

$$=5\left[1+\frac{1}{5}\cdot\frac{3}{5^5}+\frac{\frac{1}{5}(\frac{1}{5}-1)}{1.2}\cdot\frac{9}{5^{10}}+\cdots\right]$$

$$=5\left[1+\frac{3}{5^6}-\frac{1.4}{1.2}\cdot\frac{9}{5^{12}}+\cdots\right]$$

$$=5\left[1+\frac{3.2^6}{10^6}-\frac{18.2^{12}}{10^{12}}+\cdots\right]=5\left(1+\frac{192}{1000,000}\right)$$

(দশমিক বিন্দুর পরে পাঁচটি স্থানেই শূন্য আসে বলিয়া পরবর্ত্তী পদগুলি বাদ দিয়া)

$$=5\times 1\cdot000192=5\cdot00096.$$

উদা. 3. If x be small compared with unity, show that

$$\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt[3]{(1-x)^2}}{1+x+\sqrt{1+x}}=1-\frac{5x}{6}, \text{ nearly.}$$

1 এর তুলনায় x এর মান ক্ষুদ্র বলিয়া, আসন্ন মান নির্ণয়ের সময় x^2, x^3, ... সংবলিত পদগুলিকে প্রত্যেকটি দ্বিপদের বিস্তৃতি হইতে বর্জ্জন করিয়া কেবলমাত্র ঐ বিস্তৃতির প্রথম দুইটি পদ রাখিলেই যথেষ্ট হইবে।

অতএব, প্রদত্ত রাশি

$$=\frac{(1+x)^{\frac{1}{2}}+(1-x)^{\frac{2}{3}}}{1+x+(1+x)^{\frac{1}{2}}}=\frac{(1+\frac{1}{2}x)+(1-\frac{2}{3}x)}{1+x+(1+\frac{1}{2}x)}=\frac{2-\frac{1}{6}x}{2+\frac{3}{2}x}=\frac{1-\frac{1}{12}x}{1+\frac{3}{4}x}$$

$$=(1-\tfrac{1}{12}x)(1+\tfrac{3}{4}x)^{-1}=(1-\tfrac{1}{12}x)(1-\tfrac{3}{4}x)$$

$$=1-\tfrac{1}{12}x-\tfrac{3}{4}x \qquad [\,x^2 \text{ সংবলিত পদটি বাদ দিয়া}\,]$$

$$=1-\tfrac{5}{6}x.$$

উদা. 4. If c be a quantity so small that c^3 may be neglected in comparison with l^3, show that $\sqrt{\frac{l}{l+c}}+\sqrt{\frac{l}{l-c}}$ is *very nearly* equal to $2+\frac{3c^2}{4l^2}$. [C. U. 1888]

$$\sqrt{\frac{l}{l+c}}=\sqrt{\frac{1}{1+\frac{c}{l}}}=\left(1+\frac{c}{l}\right)^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}\cdot\frac{c}{l}+\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})}{1.2}\cdot\frac{c^2}{l^2}$$

$$+\frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{3}{2})(-\frac{5}{2})}{1.2.3}\cdot\frac{c^3}{l^3}+\cdots\cdots$$

$$=1-\frac{1}{2}\cdot\frac{c}{l}+\frac{3}{8}\cdot\frac{c^2}{l^2}-\frac{c^3}{l^3}\times \text{একটি অভিসারী অসীম শ্রেণী}$$

(পরবর্ত্তী প্রত্যেক পদ হইতে $\frac{c^3}{l^3}$ সাধারণ গুণকটি বাহির করিয়া লইয়া)

$$=1-\frac{1}{2}\cdot\frac{c}{l}+\frac{3}{8}\cdot\frac{c^2}{l^2} \text{ (প্রায়)।}$$

[$\frac{c^3}{l^3}$ অতি ক্ষুদ্র একটি রাশি বলিয়া পরবর্ত্তী অংশ বর্জ্জন করিয়া]

অনুরূপ পদ্ধতিতে,

$$\sqrt{\frac{l}{l-c}}=\left(1-\frac{c}{l}\right)^{-\frac{1}{2}}=1+\frac{1}{2}\cdot\frac{c}{l}+\frac{3}{8}\cdot\frac{c^2}{l^2}.$$

$\therefore$ প্রদত্ত রাশিমালা $=2+\frac{3}{4}\cdot\frac{c^2}{l^2}$.

প্রশ্নমালা 19

1. Evaluate the seventh root of 127 to five places of decimals.

2. Extract the cube root of 1·03 to four places of decimals.

3. Evaluate correct to three places of decimals, by the Binomial Theorem :

(i) $\sqrt[7]{108}$. (ii) $\sqrt[3]{999}$. (iii) $\sqrt[3]{\frac{98}{101}}$.

Find to five places of decimals the values of :

4. $\sqrt[3]{31}$. **5.** $\sqrt[3]{126}$. **6.** $\sqrt[3]{998}$.

If x be so small that its square and higher powers may be neglected, find the value of :

7. $\dfrac{\sqrt{1-3x}+\sqrt[3]{(1-x)^5}}{\sqrt{4+x}}$. **8.** $\dfrac{(1-x)^{\frac{1}{3}}+(1-5x)^2}{\sqrt[4]{16-x}}$.

4·12. বিবিধ প্রশ্নের সমাধান।

উদা. 1. Write down the sum of $1+\frac{1}{4}+\frac{1.3}{4.8}+\frac{1.3.5}{4.8.12}+$ &c.

প্রদত্ত রাশিমালা $=1+\frac{1}{2}.(\frac{1}{2})+\frac{1.3}{2.4}\cdot(\frac{1}{2})^2+\frac{1.3.5}{2.4.6}\cdot(\frac{1}{2})^3+\cdots\cdots\cdots$

$$=1+\tfrac{1}{2}.(\tfrac{1}{2})+\frac{\frac{1}{2}.\frac{3}{2}}{1.2}(\tfrac{1}{2})^2+\frac{\frac{1}{2}.\frac{3}{2}.\frac{5}{2}}{1.2.3}(\tfrac{1}{2})^3+\cdots\cdots\cdots$$

$$=(1-\tfrac{1}{2})^{-\frac{1}{2}}=(\tfrac{1}{2})^{-\frac{1}{2}}=1\div(\tfrac{1}{2})^{\frac{1}{2}}=1\div\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}.$$

উদা. 2. Find the value of $1+\frac{3}{4}+\frac{3.5}{4.8}+\frac{3.5.7}{4.8.12}+\cdots\cdots\cdots$

প্রদত্ত রাশিমালা $=1+\frac{3}{2}.(\frac{1}{2})+\frac{3.5}{2.4}\cdot(\frac{1}{2})^2+\frac{3.5.7}{2.4.6}\cdot(\frac{1}{2})^3+\cdots\cdots\cdots$

$$=1+\tfrac{3}{2}.(\tfrac{1}{2})+\frac{\frac{3}{2}.\frac{5}{2}}{1.2}\cdot(\tfrac{1}{2})^2+\frac{\frac{3}{2}.\frac{5}{2}.\frac{7}{2}}{1.2.3}\cdot(\tfrac{1}{2})^3+\cdots\cdots\cdots$$

$$=(1-\tfrac{1}{2})^{-\frac{3}{2}}=(\tfrac{1}{2})^{-\frac{3}{2}}=1\div(\tfrac{1}{2})^{\frac{3}{2}}=2^{\frac{3}{2}}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}.$$

উদা. 3. Prove that

$$\sqrt{2}=\frac{7}{5}\left(1+\frac{1}{10^2}+\frac{1.3}{1.2}\cdot\frac{1}{10^4}+\frac{1.3.5}{1.2.3}\cdot\frac{1}{10^6}+\cdots\right).$$

$$1+\frac{1}{10^2}+\frac{1.3}{1.2}\cdot\frac{1}{10^4}+\frac{1.3.5}{1.2.3}\cdot\frac{1}{10^6}+\cdots$$

$$=1+\frac{1}{10^2}+\frac{\frac{1}{2}.\frac{3}{2}}{1.2}\cdot\frac{2^2}{10^4}+\frac{\frac{1}{2}.\frac{3}{2}.\frac{5}{2}}{1.2.3}\cdot\frac{2^3}{10^6}+\cdots\cdots$$

$$=1+\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{10^2}+\frac{\frac{1}{2}.\frac{3}{2}}{1.2}\cdot\left(\frac{2}{10^2}\right)^2+\frac{\frac{1}{2}.\frac{3}{2}.\frac{5}{2}}{1.2.3}\cdot\left(\frac{2}{10^2}\right)^3+\cdots\cdots$$

$$=\left(1-\frac{2}{10^2}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(1-\frac{1}{50}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(\frac{49}{50}\right)^{-\frac{1}{2}}=\left(\frac{50}{49}\right)^{\frac{1}{2}}=\frac{5\sqrt{2}}{7}.$$

অতএব, দক্ষিণ পক্ষ $=\frac{7}{5}(\frac{5}{7}\sqrt{2})=\sqrt{2}.$

উদা. 4. Prove that

$$\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^n=1+n\cdot\frac{2x}{1+x}+\frac{n(n+1)}{1.2}\cdot\frac{2^2x^2}{(1+x)^2}+\cdots$$

$$\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^n=\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-n}=\left(1-\frac{2x}{1+x}\right)^{-n}$$

$$=1+n\cdot\frac{2x}{1+x}+\frac{n(n+1)}{1.2}\cdot\left(\frac{2x}{1-x}\right)^2+\cdots$$

উদা. 5. What is the coefficient of x^r in the expansion of $\frac{1+4x^2+x^4}{(1-x)^4}$?

প্রদত্ত রাশিমালা

$$=(1+4x^2+x^4)(1-x)^{-4}$$
$$=(1+4x^2+x^4)(1+p_1x+p_2x^2+\cdots+p_rx^r+\cdots), \text{ মনে কর ;}$$

অতএব, x^r এর সহগ $=p_r+4p_{r-2}+p_{r-4}$.

কিন্তু, $pr=\frac{(r+3)(r+2)(r+1)}{1.2.3}$, [পৃ. 142, উদা. 3]

$\therefore$ নির্ণেয় সহগ

$$=\frac{(r+3)(r+2)(r+1)}{1.2.3}+4\frac{(r+1)r(r-1)}{1.2.3}+\frac{(r-1)(r-2)(r-3)}{1.2.3}$$
$$=\frac{(r^3+6r^2+11r+6)+4(r^3-r)+(r^3-6r^2+11r-6)}{6}$$
$$=\frac{6r^3+18r}{6}=r^3+3r.$$

উদা. 6. Find the coefficient of x^n in the expansion of $\frac{2+x+x^2}{(1+x)^3}$.

প্রদত্ত রাশিটি

$$=(2+x+x^2)(1+x)^{-3}$$
$$=(2+x+x^2)(1+p_1x+p_2x^2+\cdots+p_nx^n+\cdots), \text{ মনে কর ;}$$

$\therefore$ x^n এর সহগ $=2p_n+p_{n-1}+p_{n-2}$.

কিন্তু $p_n=(-1)^n\frac{(n+1)(n+2)}{2}$. [অনু. 4·8]

$$\therefore \text{ নির্ণেয় সহগ}=(-1)^n.2\cdot\frac{(n+1)(n+2)}{2}+(-1)^{n-1}.\frac{n(n+1)}{2}+(-1)^{n-2}.\frac{(n-1)n}{2}$$

$$\left[\because (-1)^{n-1}=\frac{(-1)^n}{-1}=-(-1)^n, \text{ and } (-1)^{n-2}=\frac{(-1)^n}{(-1)^2}=(-1)^n\right]$$

$$=\frac{(-1)^n}{2}(2n^2+4n+4)=(-1)^n.(n^2+2n+2).$$

উদা. 7. In the expansion of $\dfrac{3x-8}{4-4x+x^2}$ in ascending powers of x, prove that the coefficient of x^4 is $-\frac{1}{4}$, and find the coefficient of x^r.

প্রদত্ত রাশিটি

$$=\frac{3x-8}{(2-x)^2}=\frac{3x-8}{4\left(1-\frac{x}{2}\right)^2}=\frac{1}{4}\left(3x-8\right)\left(1-\frac{x}{2}\right)^{-2}$$

$$=\frac{1}{4}\left(3x-8\right)\left(1+2.\frac{x}{2}+3.\frac{x^2}{2^2}+4.\frac{x^3}{2^3}+\cdots\right.$$

$$\left.+r.\frac{x^{r-1}}{2^{r-1}}+(r+1)\cdot\frac{x^r}{2^r}+\cdots\right);$$

অতএব, x^r এর সহগ

$$=\frac{1}{4}\left[3\frac{r}{2^{r-1}}-8.\frac{r+1}{2r}\right]=\frac{3r}{2^{r+1}}-\frac{8(r+1)}{2^{r+2}}$$

$$=\frac{6r-8(r+1)}{2^{r+2}}=-\frac{2r+8}{2^{r+2}}=-\frac{r+4}{2^{r+1}}.$$

$\therefore\ x^4$ এর সহগ $=-\dfrac{4+4}{2^5}=-\dfrac{8}{32}=-\dfrac{1}{4}.$

উদা. 8. If $(1-x)^{-n}=p_0+p_1x+p_2x^2+\cdots+p_rx^r+\cdots$, find the value of $p_0+p_1+p_2+\cdots+p_r$.

$$(1-x)^{-n}=p_0+p_1x+p_2x^2+\cdots+p_rx^r+\cdots \quad\cdots\ (1)$$

এবং $(1-x)^{-1}=1+x+x^2+\cdots+x^r+\cdots \quad\cdots\ (2)$

$p_0+p_1+p_2+\cdots+p_r=$ (1) এবং (2) এর দক্ষিণ-পক্ষস্থ শ্রেণী দুইটির গুণফলের x^r সহগ

$=(1-x)^{-n}.(1-x)^{-1}$ এর x^r এর সহগ

$=(1-x)^{-(n+1)}$ এর x^r এর সহগ

$$=\frac{(n+1)(n+2)\cdots(n+r)}{\lfloor r}.$$

উদা. 9. If $p_r=\dfrac{1.3.5\cdots(2r-1)}{2.4.6\cdots 2r}$, prove that

$$p_{2n+1}+p_1p_{2n}+p_2p_{2n-1}+\cdots+p_{n-1}p_{n+2}+p_np_{n+1}=\tfrac{1}{2}.$$

$$p_r=\frac{\frac{1}{2}.\frac{3}{2}.\frac{5}{2}\cdots\frac{2r-1}{2}}{1.2.3\cdots r}=\frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}+1)(\frac{1}{2}+2)\cdots(\frac{1}{2}+r-1)}{\lfloor r}$$

$=(1-x)^{-\frac{1}{2}}$ এ x^r এর সহগ।

অতএব, $p_1, p_2, p_3, \ldots$ যথাক্রমে $(1-x)^{-\frac{1}{2}}$ এর বিস্তৃতির $x, x^2, x^3, \ldots$ $\ldots$ এর সহগ।

$$\therefore \quad (1-x)^{-\frac{1}{2}} = 1 + p_1 x + p_2 x^2 + \cdots + p_{2n}x^{2n} + p_{2n+1}x^{2n+1} + \cdots$$

দুই পক্ষ বর্গ করিলে, দক্ষিণ পক্ষের x^{2n+1} এর সহগ

$2(p_{2n+1} + p_1p_{2n} + p_2p_{2n-1} + \cdots + p_{n-1}p_{n+2} + p_np_{n+1})$

= বাম পক্ষের বর্গের x^{2n+1} এর সহগ, অর্থাৎ $\{(1-x)^{-\frac{1}{2}}\}^2$

$= (1-x)^{-1}$ এর x^{2n+1} এর সহগ

$= 1.$

$$\therefore \quad p_{2n+1} + p_1p_{2n} + p_2p_{2n-1} + \cdots + p_{n-1}p_{n+2} + p_np_{n+1} = \tfrac{1}{2}.$$

উদা. 10. If n be any positive integer, show that the integral part of $(3+\sqrt{5})^n$ in an *odd* number.

মনে কর, $(3+\sqrt{5})^n = I + f$, (I একটি পূর্ণ সংখ্যা এবং f একটি প্রকৃত ভগ্নাংশ)।

$$I + f = (3+\sqrt{5})^n$$
$$= 3^n + {}^nC_1.3^{n-1}.\sqrt{5} + {}^nC_2.3^{n-2}.5 + {}^nC_3 3^{n-3}(\sqrt{5})^3 + \cdots \qquad \cdots (1)$$

এখন, $3-\sqrt{5}$ ধনাত্মক এবং 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর ;

$\therefore$ $(3-\sqrt{5})^n$ একটি প্রকৃত ভগ্নাংশ ; ইহাকে f' দ্বারা সূচিত কর।
তাহা হইলে,

$$f = (3-\sqrt{5})^n = 3^n - {}^nC_1\, 3^{n-1}.\sqrt{5} + {}^nC_2\, 3^{n-2}.5 - {}^nC_3\, 3^{n-3}.(\sqrt{5})^3 + \cdots \qquad \cdots (2)$$

$\therefore$ (1) ও (2) যোগ করিলে, দক্ষিণ পক্ষের অমূলদ পদগুলির মান শূন্য হইয়া যায়, এবং

$$I + f + f' = 2\{3^n + {}^nC_2\, 3^{n-2}.5 + \cdots\}$$

= একটি যুগ্ম-সংখ্যা ;

$\therefore$ $f + f^1$ অবশ্যই একটি পূর্ণ সংখ্যা হইবে ; কিন্তু f একটি প্রকৃত ভগ্নাংশ ;

$\therefore$ $f < 1$; আবার f' প্রকৃত ভগ্নাংশ বলিয়া, $f' < 1$;

$\therefore$ $f + f' < 2$; $\therefore$ $f + f' = 1.$

অতএব, I = একটি যুগ্ম-সংখ্যা $- 1$ = একটি অযুগ্ম-সংখ্যা।

প্রশ্নমালা 20

1. Write down the coefficient of x^{11} in the expansion of
$$(1+x+x^2+x^3+\cdots \text{ to infinity})^{-11}.$$

2. Find the coefficient of x^7 in the expansion of
$$(1+2x+3x^2+4x^3+\cdots \text{ to infinity})^{-3}.$$

3. Find the coefficient of x^{24} in the expansion of
$$(1+3x+6x^2+10x^3+\cdots \text{ to infinity})^{\frac{2}{3}}.$$

4. Find the coefficient x^r in the expansion of
$$(1+2x+3x^2+\cdots \text{ to infinity})^2.$$

5. (i) Find the coefficient of x^{10} in the expansion of $\frac{1+x}{(1-x)^3}$.

[C. U. 1937]

(ii) Find the coefficient of x^7 in the expansion of $\frac{1-2x}{3+2x-x^2}$.

[C. U. 1909]

6. Find the coefficient of x^5 in $\frac{1+x}{1-x}$. [C. U. 1919]

7. (i) Calculate the coefficient of x^4 in $(1+x)^{-2}$. [C. U. 1915]

(ii) Find the coefficient of x^n in $(1+x+x^2+x^3+\cdots)^{-n}$.

[C. U. 1913]

(iii) Find the coefficient of x^r in $(1-x+x^2-x^3+\cdots\cdots)^3$.

8. (i) Show that $(1+x+x^2+x^3+\cdots\cdots)^2$
$$=1+2x+3x^2+4x^3+\cdots$$ [C. U. 1922]

(ii) Prove that $(1+2x+3x^2+4x^3+\cdots\cdots)\times(1+x+x^2+\cdots)$
$$=\tfrac{1}{2}(1.2+2.3x+3.4x^2+4.5x^3+\cdots\cdots).$$

9. (i) If $y=2x+3x^2+4x^3+\cdots\cdots$, express x in terms of a series in ascending powers of y.

(ii) If $y=3x-6x^2+10x^3-\cdots\cdots$,

prove that $x=\frac{1}{3}y+\frac{1.4}{\lfloor 2}\left(\frac{y}{3}\right)^2+\frac{1.4.7}{\lfloor 3}\left(\frac{y}{3}\right)^3+\cdots$

10. Find the value of $1+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2.5}{3.6}\cdot\frac{1}{2^2}+\frac{2.5.8}{3.6.9}\cdot\frac{1}{2^3}+\cdots$

11. Find the value of $1 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1.3}{2.4} \cdot \frac{1}{3^2} - \frac{1.3.5}{2.4.6} \cdot \frac{1}{3^3} + \cdots$

12. Show that $\sqrt{3} = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1.3}{3.6} + \frac{1.3.5}{3.6.9} + \frac{1.3.5.7}{3.6.9.12} + \cdots$

13. Prove that $1 + \frac{1}{6} + \frac{1.4}{6.12} + \frac{1.4.7}{6.12.18} + \frac{1.4.7.10}{6.12.18.24} + \cdots = \sqrt[3]{2}$.

14. Show that (a) $\sqrt{\frac{2}{3}} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1.3}{4.8} - \frac{1.3.5}{4.8.12} + \cdots$

(b) $\sqrt{8} = 1 + \frac{3}{4} + \frac{3.5}{4.8} + \frac{3.5.7}{4.8.12} + \cdots$

Find the sum to infinity of the following series :

15. $1 + 2 \cdot \frac{1}{3^2} + \frac{2.5}{1.2} \cdot \frac{1}{3^4} + \frac{2.5.8}{1.2.3} \cdot \frac{1}{3^6} + \cdots$

16. $1 + \frac{4}{6} + \frac{4.5}{6.9} + \frac{4.5.6}{6.9.12} + \cdots$ [Andhra, 1954]

17. $1 + \frac{5}{8} + \frac{5.8}{8.12} + \frac{5.8.11}{8.12.16} + \cdots$ [Annamalai, 1949]

18. $1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1.3}{1.2} \cdot \frac{1}{2^6} - \frac{1.3.5}{1.2.3} \cdot \frac{1}{2^9} + \cdots$

19. $1 - \frac{3}{4} + \frac{3.5}{4.8} - \frac{3.5.7}{4.8.12} + \cdots$ [Gujrat, 1952]

20. $2 + \frac{5}{2!\,3} + \frac{5.7}{3!\,3^2} + \frac{5.7.9}{4!\,3^3} + \cdots$ [Allahabad, 1946]

21. $1 + 3 \cdot \frac{3}{16} + 3^2 \cdot \frac{3.7}{16.32} + 3^3 \cdot \frac{3.7.11}{16.32.48} + \cdots$

22. Show that $(1+x)^{-n} = \frac{1}{2^n}\left[1 + n \cdot \frac{1-x}{1+x} + \frac{n(n-1)}{\lfloor 2}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{\lfloor 3}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^3 + \cdots\right]$. [C. U. 1914]

23. Show that

$$(a-b)^n = a^n\left\{1 - n\left(\frac{b}{a-b}\right) + \frac{n(n+1)}{1.2}\left(\frac{b}{a-b}\right)^2 - \cdots\right\}.$$

$$\left[(a-b)^n = \left(\frac{1}{a-b}\right)^{-n} = a^n \cdot \left(\frac{a}{a-b}\right)^{-n} = a^n \cdot \left(1 + \frac{b}{a-b}\right)^{-n}\right].$$

24. Show that

(i) $\left(\dfrac{1+2x}{1+x}\right)^n = 1 + n\left(\dfrac{x}{1+2x}\right) + \dfrac{n(n+1)}{1.2}\left(\dfrac{x}{1+2x}\right)^2 + \cdots$

(ii) $(1+x)^{-n} = (2x)^{-n}\left\{1 - n\cdot\dfrac{1-x}{1+x} + \dfrac{n(n-1)}{1.2}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^2 + \cdots\right\}.$

25. Prove that

$$1 + n\cdot\frac{2x}{1+x} + \frac{n(n+1)}{\lfloor 2}\cdot\left(\frac{2x}{1+x}\right)^2 + \cdots$$
$$= 1 + n\cdot\frac{2x}{1-x} + \frac{n(n-1)}{\lfloor 2}\cdot\left(\frac{2x}{1-x}\right)^2 + \cdots$$

26. Show that

$$\sqrt{x} = 1 + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{x}\right) + \frac{1.3}{2^2\lfloor 2}\left(1 - \frac{1}{x}\right)^2 + \cdots$$

27. Show that

$$\frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{2x}{1+x} + \frac{1}{2}\left(\frac{2x}{1+x}\right)^2 + \frac{1.3}{2.4}\left(\frac{2x}{1+x}\right)^3 + \cdots$$

28. Show that

$$1 - \frac{n+3x}{1+3x} + \frac{(n-1)(n+6x)}{(1+3x)^2\, 2} - \frac{(n-1)(n-2)(n+9x)}{(1+3x)^3 \lfloor 3} + \cdots = 0.$$

29. Prove that

$$2^n\left\{1 + \frac{1}{3}n + \frac{n(n+1)}{1.2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3 + \cdots\right\} = 3^n.$$

30. Prove that

$$3^n\left\{1 + \frac{2n}{5} + \frac{2n(2n+2)}{5.10} + \frac{2n(2n+2)(2n+4)}{5.10.15} + \cdots\right\}$$
$$= 2^n\left\{1 + \frac{3n}{5} + \frac{3n(3n+3)}{5.10} + \frac{3n(3n+3)(3n+6)}{5.10.15} + \cdots\right\}.$$

31. Find the coefficient of x^n in the expansion of

(*a*) $\dfrac{(1-2x)^2}{(1+x)^3}$.   (*b*) $\dfrac{x}{(1-3x)(1-4x)}$.

32. Show that the coefficient of x^n in the expansion of $\dfrac{(1-2x)^2}{(1-x)^4}$ is $\frac{1}{6}(n-6)(n^2-1)$.

33. Find the coefficient of x^n in $\dfrac{(1+x)^2}{(1-x)^2}$. [C. U. 1939]

34. Find the coefficient of x^{2n+1} in the expansion of

$$\frac{(1+x)^2}{(1-x^2)^3}.$$

35. Find the coefficient of x^{10} in the expansion of

$$(1+x+x^2)^{-1}.$$

36. Show that the coefficient of x^n in the expansion of $(1-2x+3x^2-4x^3+\cdots)^{-n}$ is $\dfrac{1.3.5....(2n-1)}{n\,!}.2^n$.

37. Show that the sum of the coefficient of the first $(r+1)$ terms in the expansion of $(1-x)^{-4}$ is

$$\frac{(r+1)(r+2)(r+3)(r+4)}{1.2.3.4}.$$

38. Find sum to infinity of the following series :

(a) $1+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1.6}{6.12}+\dfrac{1.6.11}{6.12.18}+\cdots$

(b) $1+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1.3}{1.2}\cdot\dfrac{1}{9^2}+\dfrac{1.3.5}{1.2.3}\cdot\left(\dfrac{1}{9}\right)^3+\cdots$

39. Show that

$$\frac{5}{3.6}+\frac{5.7}{3.6.9}+\frac{5.7.9}{3.6.9.12}+\cdots=\frac{1}{3}(3\sqrt{3}-2).$$

40. If n be a positive integer, show that the integral part of $(5+2\sqrt{6})^n$ is an odd number.

41. If $(\sqrt{10}+3)^{2n+1}=I+F$, where I is the integral part and F the fractional part, show that $F(I+F)=1$, n being a positive integer.

42. Find the coefficients of x^{2r} and x^{2r+1} in the expansion of $\sqrt{\dfrac{a+x}{a-x}}$.

$$\left[\text{ইঙ্গিত : } \left(\frac{a+x}{a-x}\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{a+x}{(a^2-x^2)^{\frac{1}{2}}} = (a+x)(a^2-x^2)^{-\frac{1}{2}}\right].$$

43. Prove that, if n be an even positive integer,

$$\frac{1}{\lfloor 1 \lfloor n-1} + \frac{1}{\lfloor 3 \lfloor n-3} + \frac{1}{\lfloor 5 \lfloor n-5} + \cdots + \frac{1}{\lfloor n-1 \lfloor 1} = \frac{2^{n-1}}{\lfloor n}.$$

$$\left[\text{ইঙ্গিত : দক্ষিণ পক্ষস্থ রাশিমালা} = \frac{1}{\lfloor n}\left\{n + \frac{n(n-1)(n-2)}{\lfloor 3} + \cdots\right\}.\right]$$

44. Identifying as a binomial expansion, show that

$\dfrac{1.3}{3.6} + \dfrac{1.3.5}{3.6.9} + \dfrac{1.3.5.7}{3.6.9.12} + \cdots = 0{\cdot}4$, nearly. [Rajputana, 1950]

45. Prove that the coefficient of x^n in the expansion of $\dfrac{1}{1+x+x^2}$ is 1, 0, or, -1, according as n is of the form $3m$, $3m-1$ or, $3m+1$. [Punjab, 1953]

পঞ্চম অধ্যায়

সূচক-শ্রেণী

(Exponential Series)

5·1. e দ্বারা সূচিত অসীম শ্রেণী।

$$1+\frac{1}{\lfloor 1}+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}+\cdots+\frac{1}{\lfloor r}+\cdots$$

অসীম শ্রেণীটিকে e দ্বারা সূচিত করা হয়।

5·2. e সসীম এবং 2 ও 3 এর অন্তর্বর্ত্তী মান-বিশিষ্ট।

$$e=1+\frac{1}{\lfloor 1}+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}+\cdots$$

$$=1+1+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}+\cdots=2+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}+\cdots$$

দক্ষিণ পক্ষস্থ সকল পদই ধনাত্মক বলিয়া, স্পষ্টই, e এর মান 2-অপেক্ষা বৃহত্তর।

আবার, $\lfloor 3=3.2.1$; $\therefore \lfloor 3>2.2.1$, অর্থাৎ 2^2 ;

$$\therefore \quad \frac{1}{\lfloor 3}<\frac{1}{2^2},$$

এইরূপে, $\frac{1}{\lfloor 4}<\frac{1}{2^3}$; $\frac{1}{\lfloor 5}<\frac{1}{2^4},\cdots$

অতএব, $e=1+1+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}+\frac{1}{\lfloor 4}+\frac{1}{\lfloor 5}+\cdots$

$$<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{2}{2^4}+\cdots$$

$$<1+\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}+\cdots\right)$$

$<1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}}$ (বন্ধনীমধ্যস্থ অসীম গুণোত্তর-শ্রেণীর সমষ্টি লইয়া)

$$<3.$$

অতএব, e সসীম এবং ইহার মান 2 ও 3 এর অন্তর্ব্বর্ত্তী।

দ্রষ্টব্য ঃ উচ্চতর গণিতে e এর ব্যবহার এবং প্রয়োজন অত্যন্ত অধিক। অধ্যাপক এ্যাডামস্ ইহার মান 260 দশমিক স্থান পর্য্যন্ত নির্ণয় করিয়াছেন। সাধারণতঃ ইহার 7 দশমিক স্থান পর্য্যন্ত শুদ্ধ মানই যথেষ্ট। ইহার 9 দশমিক স্থান পর্য্যন্ত শুদ্ধ মান নীচে দেওয়া হইল ঃ

$$e = 2\cdot718281828.$$

5·3. e একটি অমেয় সংখ্যা।

যে সংখ্যাকে দুইটি পূর্ণ সংখ্যার অনুপাত-রূপে প্রকাশ করা যায়, তাহাকে প্রমেয় (commensurable) সংখ্যা এবং যাহাকে দুইটি পূর্ণ সংখ্যার অনুপাত-রূপে প্রকাশ করা যায় না, তাহাকে অমেয় (incommensurable) সংখ্যা বলে।

যদি সম্ভব হয়, মনে কর, e অমেয় নয়, ইহা একটি প্রমেয় সংখ্যা এবং ইহা দুইটি ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা m এবং n এর অনুপাত $\frac{m}{n}$ এর সমান। e এর মান ধনাত্মক বলিয়া, এক্ষেত্রে m এবং n কে ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা ধরা হইল। তাহা হইলে,

$$\frac{m}{n} = 1 + 1 + \frac{1}{\lfloor 2} + \frac{1}{\lfloor 3} + \cdots + \frac{1}{\lfloor n} + \frac{1}{\lfloor n+1} + \cdots$$

উভয় পক্ষকে $\lfloor n$ দ্বারা গুণ করিলে,

$$m \lfloor n-1 = \lfloor n + \frac{\lfloor n}{\lfloor 2} + \frac{\lfloor n}{\lfloor 3} + \cdots + 1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots$$

স্পষ্টই, বাম-পক্ষস্থ $\lfloor n-1$ এবং সেইজন্য $m \lfloor n-1$ পূর্ণ সংখ্যা এবং দক্ষিণ-পক্ষস্থ প্রথম হইতে 1 পর্য্যন্ত সমস্ত পদই পূর্ণ সংখ্যা, এবং সেইজন্য উহাদের সমষ্টিও একটি পূর্ণ সংখ্যা। অতএব,

$$\text{একটি পূর্ণ সংখ্যা} = \text{একটি পূর্ণ সংখ্যা} + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots \quad (1)$$

এখন, $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} + \cdots$, স্পষ্টই ইহার প্রথম পদ $\frac{1}{n+1}$ অপেক্ষা বৃহত্তর এবং

$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} + \cdots$ অসীম-শ্রেণীটি অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর,

অর্থাৎ $\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots>\dfrac{1}{n+1}$

এবং $<\dfrac{1}{(n+1)}+\dfrac{1}{(n+1)^2}+\dfrac{1}{(n+1)^3}+\cdots$

$$=\frac{\frac{1}{n+1}}{1-\frac{1}{n+1}}=\frac{1}{n}.$$

অতএব, (1) এর দক্ষিণ-পক্ষস্থ $\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots$, $\dfrac{1}{n+1}$ এবং $\dfrac{1}{n}$ এর অন্তর্ব্বর্ত্তী, এবং সেইজন্য একটি প্রকৃত ভগ্নাংশ, কারণ, $\dfrac{1}{n+1}$ এবং $\dfrac{1}{n}$ এর প্রত্যেকটিই প্রকৃত ভগ্নাংশ। তাহা হইলে, (1) হইতে দেখা গেল,

একটি পূর্ণ সংখ্যা = একটি পূর্ণ সংখ্যা + একটি প্রকৃত ভগ্নাংশ ;

কিন্তু ইহা অসম্ভব ; অতএব, e অমেয় নয় প্রমেয়, এই কল্পনা ভুল।

$\therefore$ e একটি অমেয় সংখ্যা।

5·4. সূচক-উপপাদ্য ও সূচক-শ্রেণী।

(1) x এর সকল মানের জন্য

$$e^x=1+\frac{x}{\lfloor 1}+\frac{x^2}{\lfloor 2}+\frac{x^3}{\lfloor 3}+\cdots\cdots+\frac{x^r}{\lfloor r}+\cdots\cdots$$

(2) a > 0 হইলে, x এর সকল মানের জন্য

$$a^x=1+\frac{x}{1!}(\log_e a)+\frac{x^2}{2!}(\log_e a)^2+\frac{x^3}{3!}(\log_e a)^3+\cdots+\frac{x_r}{r!}(\log_e a)^r+\cdots$$

লক্ষ্য করিতে হইবে উভয় শ্রেণীই অসীম পর্য্যন্ত বিস্তৃত।

(1) এবং (2) কে **সূচক-উপপাদ্য** (Exponential Theorem) এবং (1) এবং (2) এর দক্ষিণ-পক্ষস্থ অভিসারী অসীম-শ্রেণীদ্বয়কে **সূচক-শ্রেণী** (Exponential Series) বলা হয়। e^x এবং a^x কে **সূচক-অপেক্ষক** (Exponential function) বলে।

দ্রষ্টব্য : উপপাদ্য দুইটির প্রমাণ পাঠ্যতালিকা-বহির্ভূত।

অনুসিদ্ধান্ত। e^x এর বিস্তৃতিতে, x এর স্থলে যথাক্রমে $-x$, 1, এবং -1 বসাইলে,

$$e^{-x}=1-x+\frac{x^2}{\lfloor 2}-\frac{x^3}{\lfloor 3}+\cdots+(-1)^r\frac{x^r}{\lfloor r}+\cdots$$

$$e\ =1+1+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}+\cdots+\frac{1}{\lfloor r}+\cdots$$

$$e^{-1}=1-1+\frac{1}{\lfloor 2}-\frac{1}{\lfloor 3}+\cdots+(-1)^r\frac{1}{\lfloor r}+\cdots$$

বিস্তৃতিগুলি পাওয়া যায়।

5·5. $\frac{1}{(-r)\,!}$ এর অর্থ।

অসীম-শ্রেণীর সমষ্টি-নির্ণয়ের সময়ে ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা r-সংবলিত $(-r)\,!$ প্রতীকটি অনেক সময় আসিয়া পড়ে। ফ্যাক্টরিয়ালের সংজ্ঞা-মতে ইহা অর্থহীন হইলেও, আমরা জানি

$$\frac{n\,!}{(n-r)\,!}=n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1).$$

উভয় পক্ষে $n=0$ বসাইলে,

$$\frac{0\,!}{(-r)\,!}=0\ ;\ \text{কিন্তু}\ 0\,!=1\ ;$$

$$\therefore\ \frac{1}{(-r)\,!}=0.$$

5·6. সূচক-উপপাদ্য-সম্বন্ধীয় বিবিধ প্রশ্নের সমাধান।

উদা. 1. Find the value of $\frac{1}{2}\left(e+\frac{1}{e}\right)$ and $\frac{1}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)$.

আমরা জানি, $e^x=1+x+\frac{x^2}{\lfloor 2}+\frac{x^3}{\lfloor 3}+\frac{x^4}{4}+\cdots$.

উভয় পক্ষে $x=1$ বসাইলে, $e=1+1+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}+\frac{1}{\lfloor 4}+\cdots\cdots$ (1)

$x=-1$ বসাইলে, $e^{-1}=\frac{1}{e}=1-1+\frac{1}{\lfloor 2}-\frac{1}{\lfloor 3}+\frac{1}{\lfloor 4}-\cdots\cdots$ (2)

(1) এবং (2) যোগ করিলে,

$$e+\frac{1}{e}=2\left(1+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 4}+\frac{1}{\lfloor 6}+\cdots\cdots\right).$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2}\left(e+\frac{1}{e}\right)=1+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 4}+\frac{1}{\lfloor 6}+\cdots\cdots.$$

আবার, (1) হইতে (2) বিয়োগ করিলে বিয়োগফলকে 2 দ্বারা ভাগ করিলে,

$$\frac{1}{2}\left(e-\frac{1}{e}\right)=1+\frac{1}{\lfloor 3}+\frac{1}{\lfloor 5}+\cdots\cdots.$$

উদা. 2. Find the value of $\frac{1}{\sqrt[5]{e}}$ correct to four places of decimals. [C. U. 1936]

e^x এর বিস্তৃতিতে $x=-\frac{1}{5}$ বসাইলে,

$$\frac{1}{\sqrt[5]{e}}=e^{-\frac{1}{5}}=1-\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2\lfloor 2}-\frac{1}{5^3\lfloor 3}+\frac{1}{5^4\lfloor 4}-\frac{1}{5^5\lfloor 5}+\cdots\cdots$$

$$=1-\frac{2}{10}+\frac{2^2}{10^2\lfloor 2}-\frac{2^3}{10^3\lfloor 3}+\frac{2^4}{10^4\lfloor 4}-\frac{2^5}{10^5\lfloor 5}+\cdots\cdots$$

$$=1-{\cdot}2+\frac{{\cdot}04}{2}-\frac{{\cdot}008}{5}+\frac{{\cdot}0002}{3}-\frac{{\cdot}00004}{15}+\cdots\cdots$$

$$=1-{\cdot}2+{\cdot}02-{\cdot}001\dot{3}+{\cdot}0000\dot{6}-{\cdot}000002\dot{6}+\cdots\cdots$$

$$=1{\cdot}020066-{\cdot}201335$$

$$={\cdot}818731$$

$$={\cdot}\mathbf{8187}.$$

উদা. 3. Show that

$$\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1+2}{\lfloor 3}+\frac{1+2+3}{\lfloor 4}+\frac{1+2+3+4}{\lfloor 5}+\cdots=\frac{e}{2}.$$

[C. U. 1942, '45]

প্রদত্ত শ্রেণীটির n-তম পদ

$$=\frac{1+2+3+\cdots+n}{\lfloor n+1}=\frac{n(n+1)}{2\lfloor n+1}=\frac{1}{2\lfloor n-1}.$$

ইহাতে, $n=1, 2, \ldots$ বসাইয়া,

$$\text{প্রথম পদ} = \frac{1}{2\lfloor 0}, \quad \text{দ্বিতীয় পদ} = \frac{1}{2\lfloor 1},$$

$$\text{তৃতীয় পদ} = \frac{1}{2\lfloor 2}, \quad \text{চতুর্থ পদ} = \frac{1}{2\lfloor 3}, \text{ ইত্যাদি।}$$

$$\therefore \quad \text{নির্ণেয় সমষ্টি} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\lfloor 1} + \frac{1}{\lfloor 2} + \frac{1}{\lfloor 3} + \cdots\right) = \frac{e}{2}.$$

উদা. 4. Prove that

(i) $\dfrac{2}{\lfloor 1} + \dfrac{4}{\lfloor 3} + \dfrac{6}{\lfloor 5} + \dfrac{8}{\lfloor 7} + \cdots = e.$ [C. U. 1936]

(ii) $\dfrac{2}{\lfloor 3} + \dfrac{4}{\lfloor 5} + \dfrac{6}{\lfloor 7} + \dfrac{8}{\lfloor 9} + \cdots = \dfrac{1}{e}.$ [C. U. 1937]

(i) শ্রেণীটির n-তম পদ $= \dfrac{2n}{\lfloor 2n-1} = \dfrac{(2n-1)+1}{\lfloor 2n-1}$

$$= \frac{2n-1}{\lfloor 2n-1} + \frac{1}{\lfloor 2n-1} = \frac{1}{\lfloor 2n-2} + \frac{1}{\lfloor 2n-1}.$$

$\therefore$ ইহাতে $n=1, 2, \ldots$ বসাইয়া,

$$\text{প্রথম পদ} = \frac{1}{\lfloor 0} + \frac{1}{\lfloor 1}, \quad \text{দ্বিতীয় পদ} = \frac{1}{\lfloor 2} + \frac{1}{\lfloor 3},$$

$$\text{তৃতীয় পদ} = \frac{1}{\lfloor 4} + \frac{1}{\lfloor 5}, \quad \text{চতুর্থ পদ} = \frac{1}{\lfloor 6} + \frac{1}{\lfloor 7}, \text{ ইত্যাদি।}$$

$$\therefore \quad \text{নির্ণেয় সমষ্টি} = 1 + \frac{1}{\lfloor 1} + \frac{1}{\lfloor 2} + \frac{1}{\lfloor 3} + \frac{1}{\lfloor 4} + \cdots = \mathbf{e}.$$

বিকল্প পদ্ধতি : প্রদত্ত শ্রেণী $= \dfrac{1+1}{\lfloor 1} + \dfrac{3+1}{\lfloor 3} + \dfrac{5+1}{\lfloor 5} + \dfrac{7+1}{\lfloor 7} + \cdots$

$$= 1 + \frac{1}{\lfloor 1} + \frac{1}{\lfloor 2} + \frac{1}{\lfloor 3} + \frac{1}{\lfloor 4} + \frac{1}{\lfloor 5} + \; = e.$$

(ii) শ্রেণীটির n-তম পদ $= \dfrac{2n}{\lfloor 2n+1} = \dfrac{(2n+1)-1}{\lfloor 2n+1} = \dfrac{2n+1}{\lfloor 2n+1} - \dfrac{1}{\lfloor 2n+1}$

$$= \frac{1}{\lfloor 2n} - \frac{1}{\lfloor 2n+1}.$$

$\therefore$ ইহাতে, $n=1, 2, 3, \ldots$ ইত্যাদি বসাইয়া,

প্রথম পদ $=\frac{1}{\lfloor 2}-\frac{1}{\lfloor 3}$, দ্বিতীয় পদ $=\frac{1}{\lfloor 4}-\frac{1}{\lfloor 5}$,

তৃতীয় পদ $=\frac{1}{\lfloor 6}-\frac{1}{\lfloor 7}$;

... ...

$$\therefore \text{ নির্ণেয় সমষ্টি}=\frac{1}{\lfloor 2}-\frac{1}{\lfloor 3}+\frac{1}{\lfloor 4}-\frac{1}{\lfloor 5}+\frac{1}{\lfloor 6}-\frac{1}{\lfloor 7}+\cdots$$

$$=1-1+\frac{1}{\lfloor 2}-\frac{1}{\lfloor 3}+\frac{1}{\lfloor 4}-\frac{1}{\lfloor 5}+\frac{1}{\lfloor 6}-\frac{1}{\lfloor 7}+\cdots$$

$$=e^{-1}=\frac{1}{e}.$$

বিকল্প পদ্ধতি ঃ প্রদত্ত শ্রেণীটি $=\frac{3-1}{\lfloor 3}+\frac{5-1}{\lfloor 5}+\frac{7-1}{\lfloor 7}+\frac{9-1}{\lfloor 9}+\cdots$

$$=\frac{1}{\lfloor 2}-\frac{1}{\lfloor 3}+\frac{1}{\lfloor 4}-\frac{1}{\lfloor 5}+\frac{1}{\lfloor 6}-\frac{1}{\lfloor 7}+\cdots$$

$$=1-1+\frac{1}{\lfloor 2}-\frac{1}{\lfloor 3}+\frac{1}{\lfloor 4}-\frac{1}{\lfloor 5}+\frac{1}{\lfloor 6}-\frac{1}{\lfloor 7}+\cdots$$

$$=e^{-1}=\frac{1}{e}.$$

উদা. 5. Sum the series

$$\frac{4}{\lfloor 1}+\frac{11}{\lfloor 2}+\frac{22}{\lfloor 3}+\frac{37}{\lfloor 4}+\frac{56}{\lfloor 5}+\cdots \text{ to infinity.}$$

মনে কর, $4+11+22+\cdots$ শ্রেণীটির n-তম পদ t_n এবং উহার প্রথম হইতে n-সংখ্যক পদের সমষ্টি S_n.

$\therefore \quad S_n=4+11+22+37+\cdots+t_n.$

আবার, $S_n= \quad 4+11+22+\cdots+t_{n-1}+t_n.$

$\therefore$ বিয়োগ করিয়া, $0=4+7+11+15+\cdots+(t_n-t_{n-1})-t_n$

$=4+\{7+11+15+\cdots(n-1)$-তম পদ পর্য্যন্ত $\}-t_n$;

$\therefore \quad t_n=1+(3+7+11+15+\cdots n$-তম পদ পর্য্যন্ত)

$$=1+\frac{n}{2}\left\{2.3+(n-1)4\right\}$$

$$=1+n+2n^2=2n^2+n+1.$$

$\therefore$ প্রদত্ত শ্রেণীটির n-তম পদ

$$=\frac{2n^2+n+1}{\lfloor n}=\frac{2n(n-1)+3n+1}{\lfloor n}$$

$$=\frac{2n(n-1)}{\lfloor n}+\frac{3n}{\lfloor n}+\frac{1}{\lfloor n}=\frac{2}{\lfloor n-2}+\frac{3}{\lfloor n-1}+\frac{1}{\lfloor n}.$$

$\therefore$ ইহাতে $n=1, 2, \ldots$ ইত্যাদি বসাইয়া,

প্রথম পদ $=\frac{2}{\lfloor -1}+\frac{3}{\lfloor 0}+\frac{1}{\lfloor 1}=0+3+\frac{1}{\lfloor 1}$,

দ্বিতীয় পদ $=\frac{2}{\lfloor 0}+\frac{3}{\lfloor 1}+\frac{1}{\lfloor 2}=2+\frac{3}{\lfloor 1}+\frac{1}{\lfloor 2}$,

তৃতীয় পদ $=\frac{2}{\lfloor 1}+\frac{3}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}$,

চতুর্থ পদ $=\frac{2}{\lfloor 2}+\frac{3}{\lfloor 3}+\frac{1}{\lfloor 4}$, ইত্যাদি।

$\therefore$ উল্লম্বভাবে (vertically) যোগ করিয়া,

$$\text{নির্ণেয় সমষ্টি}=2\left(1+\frac{1}{\lfloor 1}+\frac{1}{\lfloor 2}+\cdots\right)+3\left(1+\frac{1}{\lfloor 1}+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}+\cdots\right)$$
$$+\left(\frac{1}{\lfloor 1}+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}+\frac{1}{\lfloor 4}+\cdots\right)$$

$$=2e+3e+(e-1)=\mathbf{6e-1}.$$

উদা. 6. Sum to infinity the series

$$1+\frac{1+x}{\lfloor 2}+\frac{1+x+x^2}{\lfloor 3}+\frac{1+x+x^2+x^3}{\lfloor 4}+\cdots\cdots$$

শ্রেণীটির n-তম পদ $=\frac{1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}}{\lfloor n}=\frac{1}{\lfloor n}\cdot\frac{1-x^n}{1-x}$.

$\therefore$ প্রথম পদ $t_1=\frac{1}{\lfloor 1}\cdot\frac{1-x}{1-x}$, $t_2=\frac{1}{\lfloor 2}\cdot\frac{1-x^2}{1-x}$,

$t_3=\frac{1}{\lfloor 3}\cdot\frac{1-x^3}{1-x}$ ইত্যাদি।

$\therefore$ নির্ণেয় সমষ্টি

$$=\frac{1}{1-x}\left(\frac{1-x}{\lfloor 1}+\frac{1-x^2}{\lfloor 2}+\frac{1-x^3}{\lfloor 3}+\cdots\cdots\right)$$

$$\frac{1}{1-x}\left[\left(\frac{1}{\lfloor 1}+\frac{1}{\lfloor 2}+\frac{1}{\lfloor 3}+\cdots\right)-\left(\frac{x}{\lfloor 1}+\frac{x^2}{\lfloor 2}+\frac{x^3}{\lfloor 3}+\cdots\right)\right]$$

$$=\frac{1}{1-x}\left[(e-1)-(e^x-1)\right]=\frac{e-e^x}{1-x}.$$

উদা. 7. Expand $e^{e^{ax}}$ in ascending powers of x.

$$e^{e^{ax}}=e^{1+ax+\frac{a^2x^2}{\lfloor 2}+\frac{a^3x^3}{\lfloor 3}+\cdots}=e.e^{ax+\frac{a^2x^2}{\lfloor 2}+\frac{a^3x^3}{\lfloor 3}+\cdots}$$

$$=e.e^z\left(ax+\frac{a^2x^2}{\lfloor 2}+\cdots=z \text{ ধরিয়া}\right)$$

$$=e\left(1+z+\frac{z^2}{\lfloor 2}+\frac{z^3}{\lfloor 3}+\cdots\right)$$

$$=e\left\{1+\left(ax+\frac{a^2x^2}{\lfloor 2}+\frac{a^3x^3}{\lfloor 3}+\cdots\right)+\frac{1}{\lfloor 2}\left(ax+\frac{a^2x^2}{\lfloor 2}+\cdots\right)^2\right.$$

$$\left.+\frac{1}{\lfloor 3}\left(ax+\frac{a^2x^2}{\lfloor 2}+\cdots\right)^3+\cdots\right\}$$

$$=e\left(1+ax+a^2x^2+\frac{5}{6}a^3x^3+\frac{5}{8}a^4x^4+\cdots\right).$$

উদা. 8. Find the coefficient of x^r in the expansion of $(a+bx+cx^2)e^{nx}$.

প্রদত্ত রাশিমালা

$$=\left(a+bx+cx^2\right)\left(1+nx+\frac{n^2x^2}{\lfloor 2}+\frac{n^3x^3}{\lfloor 3}+\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{n^{r-2}x^{r-2}}{\lfloor r-2}+\frac{n^{r-1}x^{r-1}}{\lfloor r-1}+\frac{n^rx^r}{\lfloor r}+\cdots\right).$$

এই গুণফলের x^r-সংবলিত পদ

$$=\frac{a.n^r}{\lfloor r}x^r+\frac{b.n^{r-1}}{\lfloor r-1}x^r+\frac{c.n^{r-2}}{\lfloor r-1}x^r.$$

$\therefore$ নির্ণেয় সহগ $=\dfrac{an^r}{\lfloor r}+\dfrac{bn^{r-1}}{\lfloor r-1}+\dfrac{cn^{r-2}}{\lfloor r-2}.$

প্রশ্নমালা 21

Show that

1. $\left\{1+x+\dfrac{x^2}{\underline{|2}}+\dfrac{x^3}{\underline{|3}}+\cdots\right\}\left\{1-x+\dfrac{x^2}{\underline{|2}}-\dfrac{x^3}{\underline{|3}}+\cdots\right\}=1.$

2. $\left\{1+\dfrac{1}{\underline{|1}}+\dfrac{1}{\underline{|2}}+\dfrac{1}{\underline{|3}}+\cdots\right\}\left\{1-\dfrac{1}{\underline{|1}}+\dfrac{1}{\underline{|2}}-\dfrac{1}{\underline{|3}}+\cdots\right\}=1.$

3. $\left\{1+\dfrac{1}{\underline{|2}}+\dfrac{1}{\underline{|4}}+\cdots\right\}^2-\left\{1+\dfrac{1}{\underline{|3}}+\dfrac{1}{\underline{|5}}+\cdots\right\}^2=1.$

4. $\left\{1+\dfrac{a^2x^2}{\underline{|2}}+\dfrac{a^4x^4}{\underline{|4}}+\cdots\right\}^2-\left\{ax+\dfrac{a^3x^3}{\underline{|3}}+\dfrac{a^5x^5}{\underline{|5}}+\cdots\right\}^2=1.$

5. $\left\{1-\dfrac{x^2}{\underline{|1}}+\dfrac{x^4}{\underline{|4}}-\cdots\right\}^2+\left\{x-\dfrac{x^3}{\underline{|3}}+\dfrac{x^5}{\underline{|5}}-\cdots\right\}^2=1.$

6. $\dfrac{1+\dfrac{1}{\underline{|2}}+\dfrac{1}{\underline{|4}}+\dfrac{1}{\underline{|6}}+\cdots}{1+\dfrac{1}{\underline{|3}}+\dfrac{1}{\underline{|5}}+\dfrac{1}{\underline{|7}}+\cdots}=\dfrac{e^2+1}{e^2-1}.$

7. $\dfrac{\dfrac{1}{\underline{|2}}+\dfrac{1}{\underline{|4}}+\dfrac{1}{\underline{|6}}+\cdots}{1+\dfrac{1}{\underline{|3}}+\dfrac{1}{\underline{|5}}+\cdots}=\dfrac{e-1}{e+1}.$ [C. U. 1934]

8. $x=1+\log_e x+\dfrac{(\log_e x)^2}{\underline{|2}}+\dfrac{(\log_e x)^3}{\underline{|3}}+\cdots$

9. $\dfrac{1}{\underline{|2}}+\dfrac{3}{\underline{|4}}+\dfrac{5}{\underline{|6}}+\cdots=e^{-1}.$

10. $1+\dfrac{1+2}{\underline{|2}}+\dfrac{1+2+3}{\underline{|3}}+\dfrac{1+2+3+4}{\underline{|4}}+\cdots=\frac{3}{2}e.$ [C. U. 1935]

11. $1+\dfrac{3}{\underline{|1}}+\dfrac{5}{\underline{|2}}+\dfrac{7}{\underline{|3}}+\dfrac{9}{\underline{|4}}+\cdots=3e.$

12. $\dfrac{1^2}{\underline{|1}}+\dfrac{2^2}{\underline{|2}}+\dfrac{3^2}{\underline{|3}}+\dfrac{4^2}{\underline{|4}}+\dfrac{5^2}{\underline{|5}}+\cdots=2e.$

13. $1+\dfrac{1+2}{\underline{|2}}+\dfrac{1+2+2^2}{\underline{|3}}+\dfrac{1+2+2^2+2^3}{\underline{|4}}+\cdots=e^2-e.$

[C. U. 1929]

14. $1+\dfrac{1+3}{\lfloor\underline{2}}+\dfrac{1+3+3^2}{\lfloor\underline{3}}+\dfrac{1+3+3^2+3^3}{\lfloor\underline{4}}+\cdots=\frac{1}{2}e(e^2-1).$

[Madras, 1953]

15. $1+\dfrac{1+a}{\lfloor\underline{2}}+\dfrac{1+a+a^2}{\lfloor\underline{3}}+\dfrac{1+a+a^2+a^3}{\lfloor\underline{4}}+\cdots=\dfrac{e-e^a}{1-a}.$

16. $1+\dfrac{1+\dfrac{2^2}{\lfloor\underline{2}}+\dfrac{2^4}{\lfloor\underline{3}}+\dfrac{2^6}{\lfloor\underline{4}}+\cdots}{1+\dfrac{1}{\lfloor\underline{2}}+\dfrac{2}{\lfloor\underline{3}}+\dfrac{2^2}{\lfloor\underline{4}}+\cdots}=e^2.$

17. $\dfrac{1+\dfrac{1}{\lfloor\underline{2}}+\dfrac{2}{\lfloor\underline{3}}+\dfrac{2^2}{\lfloor\underline{4}}+\dfrac{2^3}{\lfloor\underline{5}}+\cdots}{1+\dfrac{1}{\lfloor\underline{2}}+\dfrac{1}{\lfloor\underline{4}}+\dfrac{1}{\lfloor\underline{6}}+\cdots}=\dfrac{e}{2}.$

18. $\dfrac{1^2.2^2}{\lfloor\underline{1}}+\dfrac{2^2.3^2}{\lfloor\underline{2}}+\dfrac{3^2.4^2}{\lfloor\underline{3}}+\cdots=27e.$ [Andhra, 1953]

19. $\dfrac{1^3}{\lfloor\underline{1}}+\dfrac{2^3}{\lfloor\underline{2}}+\dfrac{3^3}{\lfloor\underline{3}}+\dfrac{4^3}{\lfloor\underline{4}}+\cdots=5e.$ [C. U. 1939]

20. $\dfrac{1}{1.3}+\dfrac{1}{1.2.3.5}+\dfrac{1}{1.2.3.4.5.7}+\cdots=e^{-1}.$

21. Express in terms of e :

(a) $\left(1+\dfrac{1}{\lfloor\underline{2}}+\dfrac{1}{\lfloor\underline{3}}+\cdots\right)\left(1-\dfrac{1}{\lfloor\underline{2}}+\dfrac{1}{\lfloor\underline{3}}-\cdots\right).$ [C. U. 1922, '38]

(b) $\left(\dfrac{1}{\lfloor\underline{2}}+\dfrac{2}{\lfloor\underline{3}}+\dfrac{3}{\lfloor\underline{4}}+\cdots\right)\left(1+\dfrac{2}{\lfloor\underline{3}}+\dfrac{3}{\lfloor\underline{5}}+\dfrac{4}{\lfloor\underline{7}}+\cdots\right).$

(c) $(3^3-2^3)+\dfrac{1}{\lfloor\underline{2}}(3^6-2^6)+\dfrac{1}{\lfloor\underline{3}}(3^9-2^9)+\cdots$

22. Show that the sum to infinity of the series whose $(r+1)$th term is $\dfrac{(r+1)^3}{\lfloor\underline{r}}$ is $15e$.

Sum to infinity the following series :

23. $\dfrac{1.2}{\lfloor\underline{1}}+\dfrac{2.3}{\lfloor\underline{2}}+\dfrac{3.4}{\lfloor\underline{3}}+\cdots$ [Gauhati, 1948]

24. $1.3+\frac{2.4}{1.2}+\frac{3.5}{1.2.3}+\frac{4.6}{1.2.3.4}+\cdots$

25. $\frac{2.3}{\lfloor 3}+\frac{3.5}{\lfloor 4}+\frac{4.7}{\lfloor 5}+\frac{5.5}{\lfloor 6}+\cdots$ [Mysore, 1952]

26. $\frac{1}{\lfloor 1}+\frac{1+3}{\lfloor 2}+\frac{1+3+5}{\lfloor 3}+\cdots$

27. $\frac{9}{\lfloor 1}+\frac{19}{\lfloor 2}+\frac{35}{\lfloor 3}+\frac{57}{\lfloor 4}+\frac{85}{\lfloor 5}+\cdots$

28. $\frac{1.4}{\lfloor 0}+\frac{2.5}{\lfloor 1}+\frac{3.6}{\lfloor 2}+\frac{4.7}{\lfloor 3}+\frac{5.8}{\lfloor 4}+\cdots$

29. Find the coefficient of x^4 in the expansion of $(e^x-1)^2$.

30. Expand $\frac{e^{5x}+e^x}{e^{3x}}$ in a series of ascending powers of x.

31. Find the coefficient of x^r in

$$\frac{x+1}{\lfloor 1}+\frac{(x+1)^2}{\lfloor 2}+\frac{(x+1)^3}{\lfloor 3}+\cdots$$

32. Find the coefficient of x^r in the expansion of $\frac{a-ax-x^2}{e^x}$.

33. Find the coefficient of x^n in the expansion of

(*a*) $(1+x+x^2)e^{-x}$. [C. U. 1915] (*b*) $\frac{a+bx+cx^2}{e^x}$.

(*c*) $\sqrt{\frac{4x^2-12x+9}{e^x}}$.

34. Show that the coefficient of x^n in

$$1+\frac{1+x^2}{\lfloor 1}+\frac{(1+x^2)^2}{\lfloor 2}+\frac{(1+x^2)^3}{\lfloor 3}+\cdots,$$

where n is a positive integer, is $\frac{e}{\lfloor \frac{n}{2}}$, or, 0, according as n is even or odd.

35. (*a*) Expand (i) $\frac{1}{2}\left(e^{ix}+e^{-ix}\right)$ and (ii) $\frac{1}{2i}\left(e^{ix}-e^{-ix}\right)$ in ascending powers of x, assuming that $e^z=1+z+\frac{z^2}{\lfloor 2}+\frac{z^3}{\lfloor 3}+\cdots$, when z is imaginary.

(b) If $a = 1 + \frac{x^3}{\lfloor 3} + \frac{x^6}{\lfloor 6} + \cdots$, $\quad b = x + \frac{x^4}{\lfloor 4} + \frac{x^7}{\lfloor 7} + \cdots$,

$$c = \frac{x^2}{\lfloor 2} + \frac{x^5}{\lfloor 5} + \frac{x^8}{\lfloor 8} + \cdots,$$

show that $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 1$.

36. Expand in ascending powers of x :

(i) $\left(1 - x - \frac{x^2}{\lfloor 2} - \frac{x^2}{\lfloor 3} + \cdots\right)^2$. $\qquad$ (ii) $\left(x - \frac{x^2}{\lfloor 2} + \frac{x^3}{\lfloor 3} - \cdots\right)^2$.

(iii) $\left(x + \frac{x^3}{\lfloor 3} + \frac{x^5}{\lfloor 5} + \cdots\right)^2$.

37. Sum the series : $1 + \frac{2^3}{\lfloor 1}x + \frac{3^3}{\lfloor 2}x^2 + \frac{4^3}{\lfloor 3}x^3 + \cdots$

[Bombay, 1948]

38. Prove that : $\frac{2}{\lfloor 1} + \frac{5}{\lfloor 3} + \frac{8}{\lfloor 5} + \cdots = e + \frac{1}{2}e^{-1}$.

39. (a) Expand e^{e^x} in ascending powers of x up to x^4.

[C. U. 1938]

(b) Prove that the coefficient of x^r in the expansion of

$$e^{e^x} \text{ is } \frac{1}{\lfloor r}\left[\frac{1^r}{\lfloor 1} + \frac{2^r}{\lfloor 2} + \frac{3^r}{\lfloor 3} + \cdots\right].$$

Hence prove that $\frac{1^4}{\lfloor 1} + \frac{2^4}{\lfloor 2} + \frac{3^4}{\lfloor 3} + \cdots = 15e$.

40. Apply the exponential and the binomial theorems to show that

$$n^n - n(n-1)^n + \frac{n(n-1)}{\lfloor 2}(n-2)^n + \cdots = \lfloor n. \qquad \text{[Poona, 1952]}$$

[$\left(e^x - 1\right)^n = \left(x + \frac{x^2}{\lfloor 2} + \frac{x^3}{\lfloor 3} + \cdots\right)^n$; স্পষ্টই, বন্ধনী-মধ্যস্থ বিস্তৃতিটির n-তম ঘাতের x^n এর সহগ $= 1$. এখন $(e^x - 1)^n$ কে দ্বিপদ উপপাদ্য-সাহায্যে সম্প্রসারিত করিয়া, বিস্তৃতি হইতে x^n এর সহগ নির্ণয় করিয়া, পূর্ব্বের x^n এর সহগ 1 এর সহিত সমীত করিতে হইবে।]

ষষ্ঠ অধ্যায়

লগারিদম্-শ্রেণী

(Logarithmic Series)

6·1. লগারিদম্-শ্রেণী।

$-1 < x \leqslant 1$ হইলে,

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \cdots + (-1)^{r-1}\frac{x^r}{r} + \cdots \qquad (1)$$

$\log_e(1+x)$ এর বিস্তৃতি-জ্ঞাপক দক্ষিণ-পক্ষস্থ শ্রেণীটিকে **লগারিদম্-শ্রেণী** (Logarithmic Series) বলে। ইহা একটি অসীম-শ্রেণী ; x এর $-1 < x \leqslant 1$ মানসমূহের জন্যই কেবলমাত্র এই অসীম-শ্রেণীটি $\log_e(1+x)$ এর সমান হয়, অন্যথা নহে ; অর্থাৎ কেবলমাত্র x এর ঐ সকল মানের জন্যই (1) এর দক্ষিণ-পক্ষস্থ অসীম-শ্রেণীটি অভিসারী হয় এবং তখন উহার সমষ্টি হয় $\log_e(1+x)$.

দ্রষ্টব্য : লগারিদম্-শ্রেণী নির্ণয়-পদ্ধতি পাঠ্যতালিকা-বহির্ভূত।

অনুসিদ্ধান্ত 1. (i) $-1 < x \leqslant 1$ হইলে, (1) এর উভয় পক্ষ সমান বলিয়া, (1) এর উভয় পক্ষে $x=1$ লিখিয়া,

$$\log_e 2 = 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \cdots + \frac{(1)^{r-1}}{r} + \cdots$$

(ii) x এর $-1 < x \leqslant$ মানসমূহের জন্য (1) এর উভয় পক্ষ সমান। x এর স্থলে $-x$ লিখিলে, স্পষ্টই x এর সীমা পরিবর্তিত হইয়া $-1 \leqslant x < 1$ হইবে। অতএব,

$-1 \leqslant x < 1$ হইলে,

$$\log_e(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \cdots - \frac{x^r}{r} - \cdots.$$

অনুসিদ্ধান্ত 2. আমরা জানি, $\log_{10}(1+x) = \log_e(1+x).\log_{10}e$

$$= \frac{\log_e(1+x)}{\log_e 10} \quad [\because \log_e 10 \times \log_{10} e = 1]$$

$\therefore\ \log_{10}(1+x)=\mu\log_e(1+x),\ \mu\equiv\frac{1}{\log_e 10}$ ধরিয়া,

$$=\mu\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\right)$$

এইরূপে, $\log_{10}(1-x)=\mu\left(-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\cdots\right)$.

দ্রষ্টব্য : e নিধান-বিশিষ্ট লগারিদ্‌ম্‌কে, লগারিদ্‌মের আবিষ্কর্ত্তা নেপিয়ার (Napier)-এর নামানুসারে নেপিরীয় (Napierian) লগারিদ্‌ম্ বলা হয়। এই লগারিদ্‌ম্-গুলিকে প্রাকৃতিক (natural) লগারিদ্‌ম্‌ও বলে। সাধারণ লগারিদ্‌মে, 10 নিধানরূপে ব্যবহৃত হয়।

দ্বিতীয় অনুসিদ্ধান্ত হইতে দেখা যায়, নেপিরীয় (Napierian) লগারিদ্‌ম্‌কে সাধারণ (Common) লগারিদ্‌মে পরিবর্ত্তিত করিতে হইলে, নেপিরীয় লগারিদ্‌ম্‌কে μ, অর্থাৎ, $\frac{1}{\log_e 10}$ দ্বারা গুণ করিতে হয়। গুণক μ কে, এই কারণে, সাধারণ লগারিদ্‌মের মডিউল্যাস্ (modulus) বলা হয়। এই মডিউল্যাসের মান $\frac{1}{2{\cdot}30258509}$ বা **·43429448.**

6·2. কতিপয় প্রয়োজনীয় সিদ্ধান্ত।

$-1<x\leqslant 1$ হইলে, $\log_e(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\quad\cdots$ (1)

$-1\leqslant x<1$ হইলে, $\log_e(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\ \cdots$ (2)

$$\therefore\ \log_e\frac{1+x}{1-x}=\log_e(1+x)-\log_e(1-x)$$

$$=2\left(x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots\right)\qquad\cdots\ (3)$$

[C. U. 1911]

$-1<x\leqslant 1$ হইলে, (1) সিদ্ধ হয়, আর, $-1\leqslant x<1$ হইলে, (2) সিদ্ধ হয়। অতএব, $-1<x<1$ হইলে, অর্থাৎ $|x|<1$ হইলে, (3) সিদ্ধ হইবে।

(i) যদি $x = \frac{1}{n}$ হয়, তাহা হইলে, $x < 1$ হইলে, $n > 1$ হইবে ; অতএব, (1) এবং (2) এ $x = \frac{1}{n}$ লিখিয়া,

$$n > 1 \text{ হইলে, } \log_e\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \cdots$$

$$\text{বা, } \log_e(n+1) - \log_e n = \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \cdots \qquad (4)$$

$$\text{এবং } \log_e\left(1 - \frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{3n^3} - \cdots$$

$$\text{বা, } \log_e n - \log_e(n-1) = \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} + \cdots. \qquad (5)$$

(উভয় পক্ষের চিহ্ন পরিবর্ত্তন করিয়া)

(4) এবং (5) যোগ করিয়া, $n > 1$ হইলে,

$$\log_e(n+1) - \log_e(n-1) = 2\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{3n^3} + \frac{1}{5n^5} + \cdots\right) \cdots \qquad (6)$$

[C. U. 1946]

(4), (5) এবং (6) এর দক্ষিণ-পক্ষস্থ অসীম-শ্রেণীগুলি, n এর $n > 1$ মান-সমূহের জন্যই কেবলমাত্র অভিসারী হইবে এবং তখন স্ব স্ব দক্ষিণ-পক্ষস্থ রাশি উহাদের সমষ্টি হইবে।

দেখা যাইতেছে, কোন সংখ্যার লগারিদ্‌ম্‌ দেওয়া থাকিলে, (4) অথবা (5) এর সাহায্যে ঐ সংখ্যা অপেক্ষা 1-বড় সংখ্যার লগারিদ্‌ম্‌ নির্ণয় করা যায় ; আর (6) এর সাহায্যে, ঐ সংখ্যা অপেক্ষা 2-বড় সংখ্যার লগারিদ্‌ম্‌ নির্ণয় করা যায়। এখন, (4), (5) এবং (6) এর দক্ষিণ-পক্ষস্থ ক্রম-ক্ষীয়মাণ অভিসারী অসীম-শ্রেণীগুলি অতি মন্থরভাবে ক্ষীয়মাণ বলিয়া, উহাদের সাহায্যে কোন সংখ্যার লগারিদ্‌মের কোন নির্দ্দিষ্ট দশমিক স্থান পর্য্যন্ত শুদ্ধ আসন্ন মান নির্ণয় করিতে হইলে, ঐ সকল শ্রেণীর অনেকগুলি পদের প্রয়োজন হয়, এবং সেইজন্য লগারিদ্‌ম্‌-নির্ণয়ে ইহাদের ব্যবহার একটু অসুবিধাজনক। পরবর্ত্তী পৃষ্ঠার (7) এর অসীম-শ্রেণীটি দ্রুত-ক্ষীয়মাণ বলিয়া লগারিদ্‌ম্‌-নির্ণয়ে ইহার ব্যবহার (4), (5) বা (6) অপেক্ষা অধিকতর সুবিধাজনক।

(ii) (3)-এ x এর সীমা হইতেছে $-1 < x < 1$, অর্থাৎ $|x <| 1$;
(3)-এ x এর স্থলে $\frac{1}{2n+1}$ বসাইলে, $\frac{1}{2n+1}$ এরও সীমা হইবে

$$\left|\frac{1}{2n+1}\right| < 1 \text{ বা } |2n+1| > 1,$$

বা, $2n+1 > 1$ এবং $2n+1 < -1$,

বা, $n > 0$ এবং $n < -1$.

অতএব, (3)-এ $x = \frac{1}{2n+1}$ বসাইয়া, $n > 0$ বা < -1 হইলে,

$$\log_e \left(\frac{1+\frac{1}{2n+1}}{1-\frac{1}{2n+1}}\right) = 2\left\{\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \cdots\right\},$$

বা, $\mathbf{\log_e (n+1) - \log_e n}$

$$= 2\left\{\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \cdots\right\} \quad \cdots (7)$$

অনুসিদ্ধান্ত। স্পষ্টই, (7) হইতে,

$\mathbf{\log_{10} (n+1) - \log_{10} n}$

$$= \mu\{\log_e (n+1) - \log_e n\}$$

$$= 2\mu\left[\frac{1}{2n+1} + \frac{1}{3(2n+1)^3} + \frac{1}{5(2n+1)^5} + \cdots\right];$$

আবার (4) হইতে,

$\log_{10} (n+1) - \log_{10} n$

$$= \mu\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \cdots\right)$$

$$= \frac{\mu}{n} - \frac{\mu}{2n^2} + \frac{\mu}{3n^3} - \cdots$$

[C. U. 1924]

(iii) (3)-এ x এর সীমা হইতেছে $|x| < 1$;

(3)-এ $\frac{1+x}{1-x} = \frac{m}{n}$, অর্থাৎ $x = \frac{m-n}{m+n}$ বসাইলে, $\frac{m-n}{m+n}$ এরও সীমা হইবে

$$\left|\frac{m-1}{m+n}\right| < 1, \text{ বা, } \left(\frac{m-n}{m+n}\right)^2 < 1,$$

বা, $\left(\dfrac{m-n}{m+n}\right)^2 - 1 < 0$, বা, $\dfrac{-4mn}{(m+n)^2} < 0$,

বা, $\dfrac{-4mn}{(m+n)^2} > 0$, বা, $mn > 0$,

অর্থাৎ, m এবং n উভয়ই ধনাত্মক অথবা উভয়ই ঋণাত্মক হইবে।

অতএব, (3)-এ $\dfrac{1+x}{1-x} = \dfrac{m}{n}$, বা, $x = \dfrac{m-n}{m+n}$ বসাইয়া, $mn > 0$ হইলে,

অর্থাৎ m এবং n উভয়ই ধনাত্মক অথবা উভয়ই ঋণাত্মক হইলে,

$$\log_e \frac{\mathbf{m}}{\mathbf{n}} = 2\left\{\frac{\mathbf{m}-\mathbf{n}}{\mathbf{m}+\mathbf{n}} + \frac{1}{3}\left(\frac{\mathbf{m}-\mathbf{n}}{\mathbf{m}+\mathbf{n}}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{\mathbf{m}-\mathbf{n}}{\mathbf{m}+\mathbf{n}}\right)^5 + \cdots\right\} \quad \cdots \quad (8)$$

উদা. 1. Show that $\log_e 2 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{1.2.3} + \dfrac{1}{3.4.5} + \dfrac{1}{5.6.7} + \cdots$

[C. U. 1910]

$- < x \leqslant 1$ হইলে, $\log_e(1+x) = x - \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^4}{4} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^6}{6} + \cdots$

$\therefore$ উভয় পক্ষে $x = 1$ বসাইয়া,

$$\begin{aligned} \log_e 2 &= 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \cdots \\ &= (1 - \tfrac{1}{2}) + (\tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4}) + (\tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6}) + \cdots \\ &= \frac{1}{1.2} + \frac{1}{3.4} + \frac{1}{5.6} + \cdots \qquad \cdots \quad (1) \end{aligned}$$

আবার, $$\begin{aligned} \log_e 2 &= 1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{3} - \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{6} + \tfrac{1}{7} - \cdots \\ &= 1 - (\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{3}) - (\tfrac{1}{4} - \tfrac{1}{5}) - (\tfrac{1}{6} - \tfrac{1}{7}) - \cdots \\ &= 1 - \frac{1}{2.3} - \frac{1}{4.5} - \frac{1}{6.7} - \cdots \qquad \cdots \quad (2) \end{aligned}$$

(1) এবং (2) হইতে, যোগ করিয়া,

$$2\log_e 2 = 1 + \left(\frac{1}{1.2} - \frac{1}{2.3}\right) + \left(\frac{1}{3.4} - \frac{1}{4.5}\right) + \left(\frac{1}{5.6} - \frac{1}{6.7}\right) + \cdots$$

বা, $2\log_e 2 - 1 = \dfrac{2}{1.2.3} + \dfrac{2}{3.4.5} + \dfrac{2}{5.6.7} + \cdots$

$\therefore \log_e 2 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{1.2.3} + \dfrac{1}{3.4.5} + \dfrac{1}{5.6.7} + \cdots$

উদা. 2. To find the values of

(i) $\log_e 2$, [C. U. 1911]

(ii) $\log_e 10$,

(iii) $\log_{10} 2$.

(i) অনুচ্ছেদ 6·2 (6) এর উভয় পক্ষে $n=3$ বসাইয়া,

$$\log_e 4 - \log_e 2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} + \cdots\cdots\right).$$

কিন্তু, $\log_e 4 - \log_e 2 = \log_e \frac{4}{2} = \log_e 2.$

$$\therefore \quad \log_e 2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} + \cdots\cdots\right).$$

এখন, $\frac{2}{3} =$ ·66666667

$$\frac{2}{3.3^3} = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3^3} = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{9\times 3} = \cdot 02469136$$

$$\frac{2}{5.3^5} = \frac{1}{5}\cdot\frac{2}{3^5} = \frac{1}{5}\cdot\frac{2}{9\times 3^3} = \cdot 00164609$$

$$\frac{2}{7\cdot 3^7} = \frac{1}{7}\cdot\frac{2}{9\times 3^5} = \cdot 00013064$$

$$\frac{2}{9.3^9} = \frac{1}{9}\cdot\frac{2}{9\times 3^7} = \cdot 00001129$$

$$\frac{2}{11.3^{11}} = \frac{1}{11}\cdot\frac{2}{9\times 3^9} = \cdot 00000103$$

$$\frac{2}{13\cdot 3^{13}} = \frac{1}{13}\cdot\frac{2}{9\times 3^{11}} = \cdot 00000009$$

$$\frac{2}{15.3^{15}} = \frac{1}{15}\cdot\frac{2}{9\times 3^{13}} = \cdot 00000001$$

$$\therefore \quad \log_e 2 = \cdot 69314718$$

অনুচ্ছেদ 6·2. (ii) (6) এর উভয় পক্ষে $n=9$ বসাইয়া,

$$\log_e 10 - \log_e 8 = 2\left(\frac{1}{9} + \frac{1}{3\times 9^3} + \frac{1}{5\times 9^5} + \frac{1}{7\times 9^7} + \cdots\right).$$

এখন, $\log_e 8 = \log_e (2^3) = 3 \times \log_e 2 = 3 \times {}^{\cdot}693147180$
$= 2{\cdot}079441540.$

এবং $\dfrac{2}{9} = {}^{\cdot}222222222$

$$\frac{2}{3.9^3} = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{81.9} = {}^{\cdot}000914495$$

$$\frac{2}{5.9^5} = \frac{1}{5}\cdot\frac{2}{81 \times 9^3} = {}^{\cdot}000006774$$

$$\frac{2}{7.9^7} = \frac{1}{7}\cdot\frac{2}{81 \times 9^5} = {}^{\cdot}000000060$$

... ...

$\therefore \log_e 10 - 2{\cdot}079441540 = {}^{\cdot}223143551$

অতএব, $\mathbf{\log_e 10} = 2{\cdot}302585091 = \mathbf{2{\cdot}3025851}$ (আসন্ন)।

(iii) $\mathbf{\log_{10} 2} = \dfrac{\log_e 2}{\log_e 10} = \dfrac{{}^{\cdot}693147180}{2{\cdot}302585091} = {}^{\cdot}693147180 \times \dfrac{1}{2{\cdot}302585091}$
$= {}^{\cdot}693147180 \times {}^{\cdot}434294412 = \mathbf{{}^{\cdot}3010300}.$

দ্রষ্টব্য : উপরের (i)-এ $\log_e 2$ এর কয়েক দশমিক স্থান পর্য্যন্ত আসন্ন মান নির্ণয় করা হইয়াছে ; এই মানের সাহায্যে (7) এর উভয় পার্শ্বে $n = 2$ বসাইয়া, $\log_e 3$ এর মান নির্ণয় করা যায়। আবার, $\log_e 4 = \log_e 2^2 = 2 \log_e 2$ বলিয়া, $\log_e 2$ হইতেই $\log_e 4$ এর মান নির্ণয় করা যায়। আবার, (7) হইতে, $\log_e 4$ এর সাহায্যে $\log_e 5$, $\log_e 5$ এর সাহায্যে $\log_e 6$, ইত্যাদি নির্ণয় করা যায়। এইরূপে সমস্ত সংখ্যার e নিধান-যুক্ত লগারিদম্ নির্ণয় করা যায়। আবার, এই সকল লগারিদমের প্রত্যেককে μ, অর্থাৎ $1/\log_e 10$ দ্বারা গুণ করিয়া সংখ্যাসমূহের 10 নিধান-বিশিষ্ট লগারিদম্ নির্ণয় করা যায়।

উদা. 3. Show that the coefficient of x^n in the expansion of $\log_e (1 + x + x^2)$ in ascending powers of x is $\dfrac{1}{n}$ or $-\dfrac{2}{n}$, according as n is not or is a multiple of 3.

$$\log_e (1 + x + x^2) = \log_e \frac{1 - x^3}{1 - x} = \log_e (1 - x^3) - \log_e (1 - x) ;$$

এখন, $\log_e (1 - x^3) = -x^3 - \frac{1}{2}x^6 - \frac{1}{3}x^9 - \cdots$

এবং, $\log_e (1 - x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \cdots$

$\therefore\ \log_e(1+x+x^2)=\log_e(1-x^3)-\log_e(1-x)$

$$=(x+\tfrac{1}{2}x^2+\tfrac{1}{3}x^3+\cdots)-(x^3+\tfrac{1}{2}x^6+\tfrac{1}{3}x^9+\cdots)$$

স্পষ্টই, n, 3 এর কোন গুণিতক না হইলে, x^n এর সহগ $=\dfrac{1}{n}$;

আর, n, 3 এর গুণিতক হইলে, x^n এর সহগ $=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{\frac{n}{3}}$

$$=\frac{1}{n}-\frac{3}{n}=-\frac{2}{n}.$$

উদা. 4. If $y=x\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^4}{4}+\cdots$, show that

$$x=y+\frac{y^2}{\lfloor 2}+\frac{y^3}{\lfloor 3}+\frac{y^4}{\lfloor 4}+\cdots \qquad \text{[C. U. 1931]}$$

$$y=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots=\log_e(1+x);$$

$\therefore\ 1+x=e^y$;

$$\therefore\ x=e^y-1=\left(1+y+\frac{y^2}{\lfloor 2}+\frac{y^3}{\lfloor 3}+\frac{y^4}{\lfloor 4}+\cdots\right)-1$$

$$=y+\frac{y^2}{\lfloor 2}+\frac{y^3}{\lfloor 3}+\frac{y^4}{\lfloor 4}+\cdots.$$

উদা. 5. If α and β are the roots of the equation $ax^2+bx+c=0$, show that

$$\log_e(a-bx+cx^2)=\log_e a+(\alpha+\beta)x-\left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}\right)x^2$$
$$+\left(\frac{\alpha^3+\beta^3}{3}\right)x^3+\cdots$$

α এবং β, $ax^2+bx+c=0$ এর বীজ বলিয়া,

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\ \text{এবং}\ \alpha\beta=\frac{c}{a}.$$

এখন, $a-bx+cx^2=a\left(1-\dfrac{b}{a}x+\dfrac{c}{a}x^2\right)$

$$=a\{1+(\alpha+\beta)x+\alpha\beta x^2\}=a(1+\alpha x)(1+\beta x).$$

$\therefore \quad \log_e (a - bx + cx^2)$

$$= \log_e a + \log_e (1 + \alpha x) + \log_e (1 + \beta x)$$

$$= \log_e a + \left\{ \alpha x - \frac{\alpha^2 x^2}{2} + \frac{\alpha^3 x^3}{3} - \cdots \right\}$$

$$+ \left\{ \beta x - \frac{\beta^2 x^2}{2} + \frac{\beta^3 x^3}{3} - \cdots \right\}$$

$$= \log_e a + (\alpha + \beta)x - \left(\frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} \right) x^2 + \left(\frac{\alpha^3 + \beta^3}{3} \right) x^3 - \cdots.$$

উদা. 6. Show that

$$\log_e (x + 2h) = 2 \log_e (x + h)$$

$$- \log_e x - \left\{ \frac{h^2}{(x+h)^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{h^4}{(x+h)^4} + \frac{1}{3} \cdot \frac{h^6}{(x+h)^6} + \text{\&c.} \right\}.$$

দক্ষিণ পক্ষ $= \log_e (x + h)^2 - \log_e x + \log_e \left\{ 1 - \frac{h^2}{(x+h)^2} \right\}$

$$= \log_e \left\{ \frac{(x+h)^2}{x} \right\} - \log_e \left\{ \frac{x^2 + 2xh}{(x+h)^2} \right\}$$

$$= \log_e \left\{ \frac{(x+h)^2}{x} \times \frac{x(x+2h)}{(x+h)^2} \right\} = \log_e (x + 2h).$$

প্রশ্নমালা 22

Prove that

1. $\frac{1}{1.2} + \frac{1}{2.2^2} + \frac{1}{3.2^3} + \cdots = \log_e 2.$

2. $\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2.2} + \frac{1}{3^3.3} + \frac{1}{3^4.4} + \cdots = \log_e 3 - \log_e 2.$

3. $\frac{a-x}{a} + \frac{1}{2}\left(\frac{a-x}{a}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{a-x}{a}\right)^3 + \cdots = \log_e a - \log_e x.$

4. $\frac{1}{n+1} + \frac{1}{2(n+1)^2} + \frac{1}{3(n+1)^3} + \cdots$

$$= \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + \frac{1}{3n^3} - \cdots$$ [C. U. 1914, '45]

5. $\log_e (1 + x^2) = 2\left\{ \frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{6} x^6 - \cdots \right\}.$

6. $-2\left(\frac{1}{2.2^2}+\frac{1}{4.2^4}+\frac{1}{6.2^6}+\cdots\right)=\log_e 3-2\log_e 2.$

7. $\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{7}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{8^2}+\frac{1}{7^2}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{8^3}-\frac{1}{7^3}\right)+\cdots=0.$

8. $\log_e m-\log_e n=2\left[\frac{m-n}{m+n}+\frac{1}{3}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{m-n}{m+n}\right)^5+\cdots\right].$

9. $\log_e m=2\left\{\frac{m-1}{m+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{m-1}{m+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{m-1}{m+1}\right)^5+\cdots\right\}.$

[C. U. 1932]

10. $\frac{1}{2.3}+\frac{1}{4.5}+\frac{1}{6.7}+\cdots=1-\log_e 2.$ [C. U. 1913, '40]

11. $\frac{x-1}{x+1}+\frac{x^2-1}{2(x+1)^2}+\frac{x^3-1}{3(x+1)^3}+\cdots=\log_e x.$ [Madras, 1954]

12. $\log\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1-\frac{1}{1.2(n+1)}-\frac{1}{2.3(n+1)^2}-\frac{1}{3.4(n+1)^3}-\cdots$

13. (a) $2\log_e x-\log_e(x+1)-\log_e(x-1)$

$$=\frac{1}{x^2}+\frac{1}{2.x^4}+\frac{2}{3.x^6}+\cdots$$ [Agra, 1941]

(b) $\frac{1}{1.2}-\frac{1}{2.3}+\frac{1}{3.4}-\frac{1}{4.5}+\cdots=\log_e\frac{4}{e}\cdot$ [Andhra, 1950]

14. $\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4^3}+\frac{1}{6^3}+\frac{1}{8^3}\right)$

$$+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{4^5}+\frac{1}{6^5}+\frac{1}{8^5}\right)+\cdots=\log_e\sqrt{3}.$$

15. Expand $\log_e(1+x+x^2+x^3)$ in powers of x, and find the coefficient of x^{2n} and x^{2n+1}. [C. U. 1947]

16. If $\log_e\frac{1}{1-x-x^2+x^3}$ be expanded in a series of ascending powers of x, show that the coefficient of x^n is $\frac{3}{n}$ or $\frac{1}{n}$ according as n is even or odd.

17. If $\log_e \dfrac{1}{1+x+x^2+x^3}$ be expanded in a series of ascending powers of x, show that the coefficient of x^n is $\dfrac{3}{n}$, or, $-\dfrac{1}{n}$, according as n is or is not a multiple of 4.

18. Expand $\log_e \dfrac{1+x+x^2}{1-x+x^2}$.

19. (*a*) Expand $\log_e (1+x+x^2+x^3+\cdots)$ in ascending powers of x and show that the coefficient of x^n is $\dfrac{1}{n}$.

(*b*) Expand $\log_e (1+3x+6x^2+10x^3+\cdots)$ in ascending powers of x, when $|x| < 1$, and show that the coefficient of x^n is $\dfrac{3}{n}$.

20. Expand $\log_e \{x^2+(a+b)x+ab\} - 2\log_e x$ in a series in descending powers of x. [C. U. 1912]

Sum to infinity the following series :

21. $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2.2^2} + \dfrac{1}{3.2^3} - \dfrac{1}{4.2^4} + \cdots$ [C. U. 1953]

22. $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{9}x^9 + \frac{1}{12}x^{12} + \cdots \; (x^3 < 1)$

23. $2\left(\dfrac{1}{7} + \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{7^3} + \dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{1}{7^5} + \cdots\right)$. [Annamalai, 1949]

24. $1 + \dfrac{1}{3.2^2} + \dfrac{1}{5.2^4} + \dfrac{1}{7.2^6} + \cdots$ [C. U. 1943]

25. $1 + \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{3^2} + \dfrac{1}{5}\cdot\dfrac{1}{3^4} + \dfrac{1}{7}\cdot\dfrac{1}{3^6} + \cdots$ [C. U. 1949]

26. $\dfrac{x^2}{1.2} + \dfrac{x^3}{2.3} + \dfrac{x^4}{3.4} + \cdots$

27. $\frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 + \frac{3}{4}x^4 + \cdots \quad (|x| < 1)$ [C. U. 1944]

28. $1 + \dfrac{2}{1.2.3} + \dfrac{2}{3.4.5} + \dfrac{2}{5.6.7} + \cdots$

29. $\dfrac{5}{1.2.3} + \dfrac{7}{3.4.5} + \dfrac{9}{5.6.7} + \cdots$ [C. U. 1958]

Find the value of the following :

30. $(1+3)\log_e 3 + \dfrac{1+3^2}{\lfloor 2}(\log_e 3)^2 + \dfrac{1+3^3}{\lfloor 3}(\log_e 3)^3 + \cdots$

31. If α and β be the roots of $x^2 - px + q = 0$, show that

$$-\log_e(1 - px + qx^2) = (\alpha+\beta)x + \tfrac{1}{2}(\alpha^2+\beta^2)x^2 + \tfrac{1}{3}(\alpha^3+\beta^3)x^3 + \cdots + \frac{1}{n}(\alpha^n+\beta^n)x^n + \cdots$$

32. If α, β be the roots of the equation $ax^2 + bx + c = 0$, prove that

$$\log_e(ax^2+bx+c) = \log_e a + 2\log_e x - \frac{1}{x}(\alpha+\beta) - \frac{1}{2x^2}(\alpha^2+\beta^2) - \frac{1}{3x^3}(\alpha^3+\beta^3) - \cdots$$

33. (*a*) If $y = x + \dfrac{x^2}{2} + \dfrac{x^3}{3} + \cdots$, show that

$$x = 1 - e^{-y}$$
$$= y - \frac{y^2}{\lfloor 2} + \frac{y^3}{\lfloor 3} - \frac{y^4}{\lfloor 4} + \cdots$$ [C. U. 1950]

(*b*) If $y = 1 - x + \dfrac{x^2}{\lfloor 2} + \dfrac{x^3}{\lfloor 3} + \cdots$

and $z = -y - \dfrac{y^2}{2} - \dfrac{y^3}{3} - \cdots$,

show that $x = \log_e \dfrac{1}{1-e^z}$. [C. U. 1951]

34. If $x^2y = 2x - y$ and $x < 1$, show that

$$y + \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} + \cdots = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\right).$$

সপ্তম অধ্যায়

লেখ

(Graphs)

7·1. x^n এর লেখ (n যে-কোন ধনাত্মক পূর্ণ সংখ্যা)।
(Graphs of x^n for any positive integral value of n)

n পূর্ণ সংখ্যা বলিয়া যুগ্ম বা বিযুগ্ম হইবে, যুগ্ম এবং বিযুগ্ম প্রকার-ভেদে x^n এর লেখএর আকৃতিও বিভিন্ন হইবে। নিম্নে এ সম্বন্ধে আলোচনা করা হইল :

A. n দ্বারা 1, 3, 5, 7,..., (2m+1),... প্রভৃতি বিযুগ্ম-সংখ্যা-সমূহের যে-কোন একটি সূচিত হইলে, x^n এর লেখ।

মনে কর, $y=x^n$.

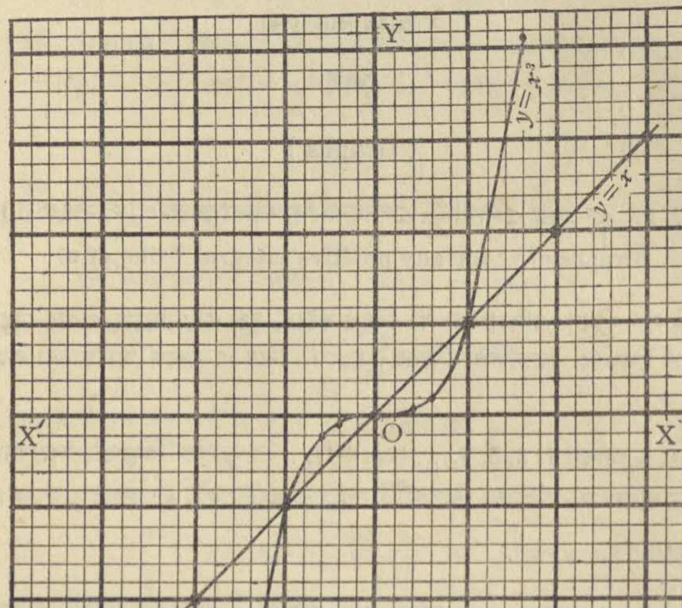
(i) $n=1$ হইলে, $y=x$ হইবে এবং এক্ষেত্রে x এর লেখ অঙ্কিত করিতে হইবে।

x এর কতিপয় মান এবং সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে y এর এইরূপ অনুরূপ মানসমূহ লইয়া নিম্নের তালিকাটি প্রস্তুত করা হইল :

x	-2	0	2	3
y	-2	0	2	3

x এর মানকে ভুজ ও y এর অনুরূপ মানকে কোটিরূপে ধরিয়া বিন্দুগুলিকে ছক-কাগজের উপর ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্যের 5 গুণ দৈর্ঘ্যকে অর্থাৎ, ·5″ কে দৈর্ঘ্যের একক ধরিয়া স্থাপন করা হইল। বিন্দুগুলিকে একটি হস্তাঙ্কিত সন্তত রেখা দ্বারা যুক্ত করিলে নির্ণেয় লেখ পাওয়া যাইবে। লেখটি প্রথম এবং তৃতীয় পাদে অবস্থিত একটি সরলরেখা (চিত্র 1 দ্রষ্টব্য)।

(ii) $n=3$ হইলে, $y=x^3$ হইবে এবং এক্ষেত্রে x^3 এর লেখ অঙ্কিত করিতে হইবে।



চিত্র 1

x এর কতিপয় মান এবং সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে y এর এইরূপ অনুরূপ মানসমূহ লইয়া নিম্নের তালিকাটি প্রস্তুত করা হইল :

x	0	·4	−·4	·6	−·6	1	−1	1·6	−1·6
y	0	·06	−·06	·2	−·2	1	−1	4·1	−4·1

x এর মানকে ভুজ ও y এর অনুরূপ মানকে কোটিরূপে ধরিয়া বিন্দুগুলিকে ছক-কাগজের উপর, ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্যের 5 গুণ দৈর্ঘ্যকে অর্থাৎ ·5″ কে দৈর্ঘ্যের একক ধরিয়া স্থাপন করা হইল। বিন্দুগুলিকে একটি হস্তাঙ্কিত সন্তত রেখা দ্বারা যুক্ত করিলে নির্ণেয় লেখ পাওয়া যাইবে (চিত্র 1 দ্রষ্টব্য)।

লেখ সম্বন্ধে লক্ষণীয় : লেখটি

(1) একটি সন্তত রেখা, (2) মূলবিন্দুগামী এবং প্রথম ও তৃতীয় পাদে প্রতিসমরূপে অবস্থিত এবং লেখটিকে (3) x-অক্ষ মূলবিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে।

(iii) $n=5$ হইলে, $y=x^5$ হইবে এবং এক্ষেত্রে x^5 এর লেখ অঙ্কিত করিতে হইবে।

x এর কতিপয় মান এবং সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে y এর এইরূপ অনুরূপ মানসমূহ লইয়া নিম্নের তালিকাটি প্রস্তুত করা হইল :

x	0	·4	−·4	·6	−·6	·8	−·8	1	−1	1·1	−1·1	1·2	−1·2	1·3	−1·3
y	0	·01	−·01	·07	−·07	·3	−·3	1	−1	1·6	−1·6	2·5	−2·5	3·7	−3·7

x এর মানকে ভুজ ও y এর অনুরূপ মানকে কোটিরূপে ধরিয়া বিন্দুগুলিকে ছক-কাগজের উপর ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্যের 5 গুণ দৈর্ঘ্যকে একক ধরিয়া স্থাপন করা হইল। বিন্দুগুলিকে একটি হস্তাঙ্কিত সন্তত রেখা দ্বারা যুক্ত করিলে নির্ণেয় লেখ পাওয়া যাইবে। (চিত্র 2 দ্রষ্টব্য)

লেখ-সম্বন্ধে লক্ষণীয় : লেখটি x^3 এর লেখএর ন্যায়,

(1) একটি সন্তত রেখা, (2) মূলবিন্দুগামী এবং প্রথম ও তৃতীয় পাদে প্রতিসমরূপে অবস্থিত এবং লেখটিকে (3) x-অক্ষ মূলবিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে।

এইরূপে x এর বিযুগ্ম সূচকবিশিষ্ট অপেক্ষকের লেখ অঙ্কিত করিয়া লেখগুলি পর্য্যবেক্ষণ করিলে দেখা যায় :

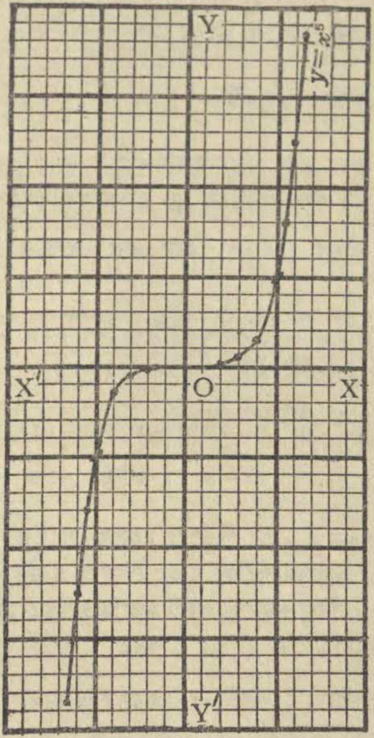
(1) লেখগুলির প্রত্যেকটিই মূলবিন্দু এবং $(-1, -1)$ ও $(1, 1)$ বিন্দুগামী ;

(2) লেখগুলি প্রথম ও তৃতীয় পাদে প্রতিসম ;

(3) x অক্ষ 1 ভিন্ন অপর সকল বিযুগ্ম সূচক-বিশিষ্ট অপেক্ষকগুলির লেখ-এর মূলবিন্দুতে স্পর্শক।

(4) n মান যতই বৃদ্ধি পাইতে থাকিবে,

$-1 < x < 1$ সীমার মধ্যে লেখটি ততই x-অক্ষের নিকটবর্ত্তী হইবে,



চিত্র 2

এবং এই সীমার বাহিরে, অর্থাৎ $x < -1$ বা $x > 1$ হইলে, লেখটি ততই $x = \pm 1$ রেখাদ্বয়ের নিকটবর্ত্তী হইবে।

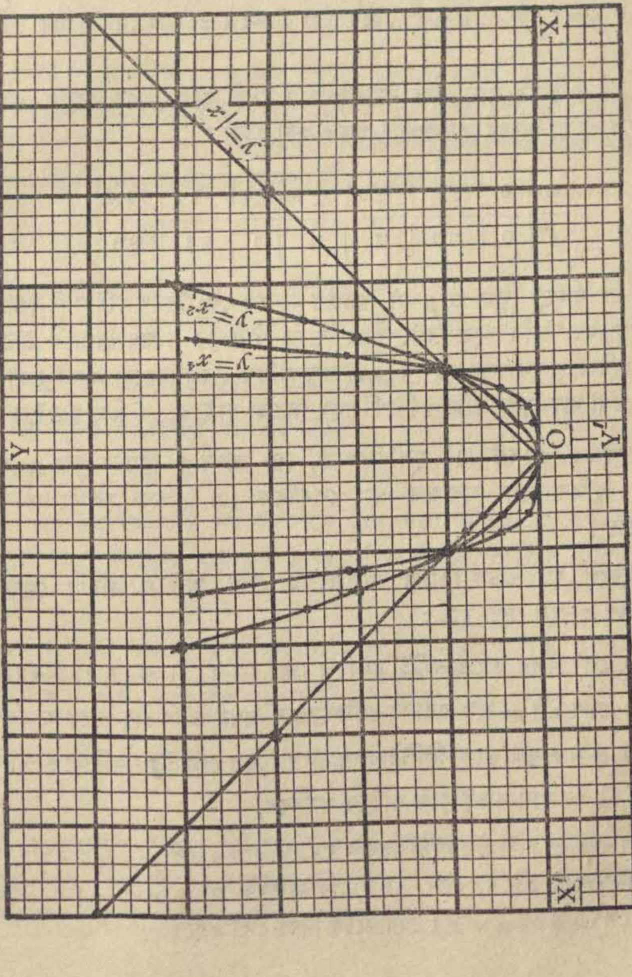
B. n দ্বারা 2, 4, 6,...2m,... প্রভৃতি যুগ্ম-সংখ্যাসমূহের যে-কোন একটি সূচিত হইলে, x^n এর লেখ।

(i) $n = 2$ হইলে, $y = x^2$ হইবে এবং এক্ষেত্রে x^2 এর লেখ অঙ্কিত করিতে হইবে।

x এর কতিপয় মান এবং সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে y এর এইরূপ অনুরূপ মানসমূহ লইয়া নিম্নের তালিকাটি প্রস্তুত করা হইল :

x	0	$\pm\cdot4$	$\pm\cdot6$	±1	$\pm1\cdot2$	$\pm1\cdot4$	$\pm1\cdot6$	±2
y	0	$\cdot2$	$\cdot4$	1	$1\cdot4$	2	$2\cdot6$	4

x এর মানকে ভুজ ও y এর অনুরূপ মানকে কোটিরূপে ধরিয়া বিন্দুগুলিকে ছক-কাগজের উপর, ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্যের 5 গুণ দৈর্ঘ্যকে অর্থাৎ



চিত্র 3

'5" কে দৈর্ঘ্যের একক ধরিয়া স্থাপন করা হইল। এইরূপে অঙ্কিত বিন্দুসমূহকে একটি হস্তাঙ্কিত সন্তত রেখা দ্বারা যুক্ত করিলে নির্ণেয় লেখ পাওয়া যাইবে (চিত্র 3 দ্রষ্টব্য)।

লক্ষণীয় : লেখটি (1) মূলবিন্দুগামী, (2) প্রথম ও দ্বিতীয় পাদে y-অক্ষরেখার প্রতিসমরূপে অবস্থিত এবং লেখটিকে (3) x-অক্ষ মূলবিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে।

(ii) $n=4$ হইলে, $y=x^4$ হইবে এবং এক্ষেত্রে x^4 এর লেখ অঙ্কিত করিতে হইবে।

x এর কতিপয় মান এবং সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে y এর এইরূপ অনুরূপ মানসমূহ লইয়া নিম্নের তালিকাটি প্রস্তুত করা হইল :

x	0	±·4	±·6	±·8	±1	±1·2	±1·4
y	0	·02	·1	·4	1	2·1	3·8

x এর মানকে ভুজ ও y এর অনুরূপ মানকে কোটিরূপে ধরিয়া বিন্দুগুলিকে ছক-কাগজের উপর ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্যের 5 গুণ দৈর্ঘ্যকে দৈর্ঘ্যের একক ধরিয়া স্থাপন করা হইল। এইরূপে অঙ্কিত বিন্দুসমূহকে একটি হস্তাঙ্কিত সন্তত রেখা দ্বারা যুক্ত করিলে নির্ণেয় লেখ পাওয়া যাইবে (চিত্র 3 দ্রষ্টব্য)।

লক্ষণীয় : লেখটি (1) মূলবিন্দুগামী, (2) প্রথম ও দ্বিতীয় পাদ y অক্ষ-রেখার প্রতিসমরূপে অবস্থিত এবং লেখটিকে (3) x-অক্ষ মূলবিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে।

এইরূপে যুগ্ম সূচক-বিশিষ্ট অপেক্ষকের লেখ অঙ্কিত করিয়া লেখগুলি পর্য্যবেক্ষণ করিলে দেখা যায় :

(1) লেখগুলির প্রত্যেকটিই মূলবিন্দু এবং $(-1, 1)$ ও $(1, 1)$ বিন্দুগামী ;

(1) লেখগুলি y-অক্ষ বরাবর প্রতিসমরূপে প্রথম ও দ্বিতীয় পাদে অবস্থিত ;

(3) x-অক্ষ যুগ্ম সূচক-বিশিষ্ট সকল অপেক্ষকের লেখএর মূলবিন্দুতে স্পর্শক ;

(4) n এর মান যতই বৃদ্ধি পাইতে থাকিবে,

$-1<x<1$ সীমার মধ্যে লেখটি ততই x অক্ষের এবং $x=\pm 1$ সরলরেখা-দ্বয়ের নিকটবর্ত্তী হইবে, এবং এই সীমার বাহিরে, অর্থাৎ $x<-1$ বা $x>1$ হইলে, লেখটি ততই $x=\pm 1$ রেখাদ্বয়ের নিকটবর্ত্তী হইবে।

(iii) $y = |x|$ এর লেখ

$|x|$ দ্বারা x এর মানসমূহের পরম মান সূচিত হয়।

x এবং অনুরূপ y এর মান লইয়া নিম্নের তালিকাটি প্রস্তুত করা হইল :

x	5	−5	3	−3	1	−1	0	·6	−·6	·8	−·8
y	5	5	3	3	1	1	0	·6	·6	·8	·8

x এর মানকে ভুজ ও y এর অনুরূপ মানকে কোটি ধরিয়া বিন্দুগুলিকে ছক-কাগজের উপর ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্যের 5 গুণ দৈর্ঘ্যকে দৈর্ঘ্যের একক ধরিয়া স্থাপন করা হইল। বিন্দুগুলিকে একটি হস্তাঙ্কিত সন্তত রেখা দ্বারা যুক্ত করিলে নির্ণেয় লেখ পাওয়া যাইবে (চিত্র 3 দ্রষ্টব্য)।

লক্ষণীয় : লেখটি

(1) একটি সন্তত রেখা, (2) মূলবিন্দু এবং $(-1, 1)$ ও $(1, 1)$ বিন্দুগামী, (3) y-অক্ষ বরাবর প্রতিসমরূপে প্রথম ও দ্বিতীয় পাদে অবস্থিত।

7·2. e^x এবং $\log_e x$ এর লেখ।

(i) সূচক-অপেক্ষক e^x এর লেখ।

মনে কর, $y = e^x$.

x এর কতিপয় মান সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে, মুদ্রিত তালিকা-সাহায্যে, y এর এইরূপ অনুরূপ মানসমূহ নির্ণয় করিয়া নিম্নের তালিকাটি প্রস্তুত করা হইল :

x	0	·5	−·5	·8	−·8	1·0	−1·0	1·5	−1·5	1·8	−1·8	−2·0
y	1	1·65	·61	2·2	·45	2·72	·37	4·48	·22	6·05	·17	·14

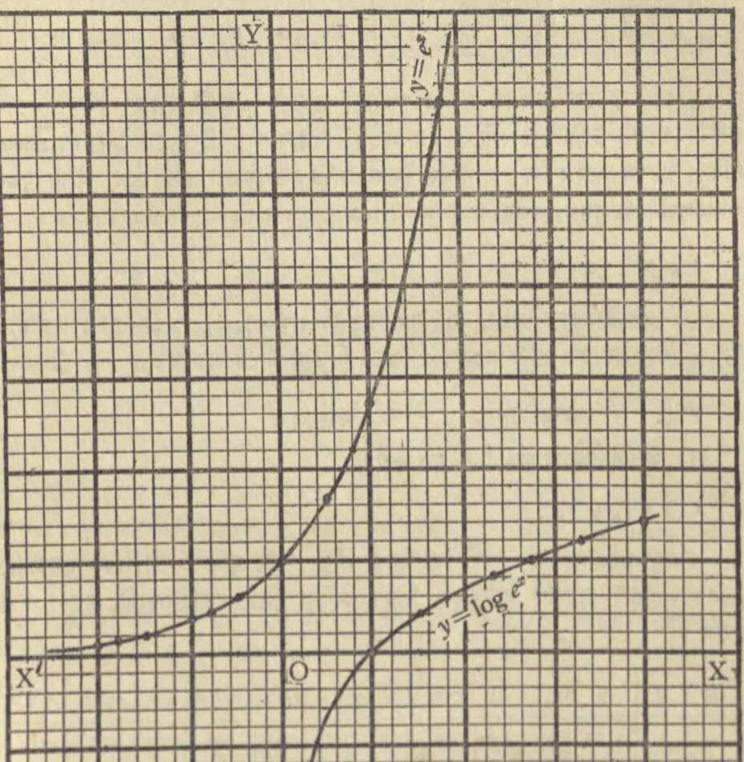
লক্ষ্য করিতে হইবে x এর ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক কোন মানের জন্যই y ঋণাত্মক নহে।

ছক-কাগজের ক্ষুদ্রতর বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্যের 5 গুণ দৈর্ঘ্যকে দৈর্ঘ্যের একক ধরিয়া বিন্দুগুলি ছক-কাগজের উপর স্থাপন করা হইল। হস্তাঙ্কিত সন্তত রেখা দ্বারা উক্ত বিন্দুগুলি যুক্ত করিয়া নির্ণেয় লেখ পাওয়া গেল (চিত্র 4 দ্রষ্টব্য)।

লক্ষণীয় :

(1) লেখটি সম্পূর্ণরূপে প্রথম ও দ্বিতীয় পাদে অবস্থিত, তৃতীয় ও চতুর্থ পাদে ইহার কোন অংশ নাই ;

(2) লেখটি উভয় দিকে অসীম পর্য্যন্ত বিস্তৃত একটি সন্তত রেখা ;



চিত্র 4

(3) লেখটির দ্বিতীয় পাদের অংশটি x-অক্ষকে অসীম পথ ধরিয়া ক্রমশঃ বামদিকে অসীমাভিমুখী হইয়াছে।

(ii) **লগারিদ্‌মিক অপেক্ষক $\log_e x$ এর লেখ ঃ**

মনে কর, $y = \log_e x$.

x এর কতিপয় মান এবং সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে, লগ-তালিকার সাহায্যে y এর এইরূপ অনুরূপ মানসমূহ নির্ণয় করিয়া নিম্নের তালিকাটি প্রস্তুত করা হইল ঃ

x	·08	·15	·25	·37	1	1·5	2·25	2·75	3·25	4
y	−2·5	−2	−1·4	−1	0	·4	·81	1	1·2	1·4

x এর 0 অথবা কোন ঋণাত্মক মান হইতে পারে না।

[লক্ষ্য করিতে হইবে, $\log_e \cdot 08 = \log_e \frac{8}{10^2} = \log_e 8 - 2 \log_e 10$

$= 2\cdot0794 - 2 \times 2\cdot3026$

(লগ-তালিকার সাহায্যে) $= -2\cdot5$.]

ছক-কাগজের ক্ষুদ্রতম বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্যের 5 গুণ দৈর্ঘ্যকে দৈর্ঘ্যের একক ধরিয়া বিন্দুগুলি ছক-কাগজের উপর স্থাপন করা হইল। হস্তাঙ্কিত সন্তত রেখা দ্বারা উক্ত বিন্দুগুলি যুক্ত করিয়া নির্ণেয় লেখ পাওয়া গেল। (চিত্র 4 দ্রষ্টব্য)।

লক্ষণীয় ঃ

(1) লেখটি সম্পূর্ণরূপে প্রথম ও চতুর্থ পাদে অবস্থিত, দ্বিতীয় ও তৃতীয় পাদে ইহার কোন অংশ নাই ;

(2) লেখটি উভয় দিকে অসীম পর্যন্ত বিস্তৃত একটি সন্তত রেখা ;

(3) লেখটির চতুর্থ পাদের অংশটি y-অক্ষকে অসীম পথ ধরিয়া ক্রমশঃ নিম্নদিকে অসীমাভিমুখী হইয়াছে।

দ্রষ্টব্য ঃ একই মূলবিন্দু এবং অক্ষ ধরিয়া অঙ্কন করিলে লেখ দুইটি $y = x$ সরলরেখা বরাবর প্রতিসম হইবে।

প্রশ্ন। লগ-তালিকার সাহায্যে $y = 10^x$ এবং, $y = \log_{10} x$ সমীকরণ দুইটিকে সিদ্ধ করে এইরূপ মূলবিন্দু সন্নিহিত স্থানাঙ্কসমূহ নির্ণয় করিয়া উহাদের লেখ অঙ্কিত কর। দেখাও যে, লেখ দুইটি $y = x$ রেখায় প্রতিসম।

ত্রিকোণমিতি

প্রথম অধ্যায়

ত্রৈকোণমিতিক সমীকরণ এবং সাধারণ মান

(Trigonometrical Equations and General Values)

1·1. দশম শ্রেণীতে দেখিয়াছ, নির্দ্দিষ্ট মানযুক্ত কোন ত্রৈকোণমিতিক অনুপাত-বিশিষ্ট অসংখ্য কোণ থাকিতে পারে। যেমন, $\sin\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$ হইলে, sine ধনাত্মক বলিয়া θ কোণটি প্রথম অথবা দ্বিতীয় পাদের হইবে। এখন, আমরা জানি $\sin 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}$; অতএব, θ র ক্ষুদ্রতম ধনাত্মক মান 45°, আর উহার দ্বিতীয় পাদের মান হইল, $(180^\circ-45^\circ)$ বা 135°. আবার, কোন কোণের সহিত 360° এর ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক যে-কোন গুণিতক যোগ করিলেও ত্রৈকোণমিতিক অনুপাত একই থাকে বলিয়া,

$$45^\circ, 135^\circ, 405^\circ, 495^\circ, \ldots, -315^\circ, -225^\circ, \ldots$$

ইত্যাদি অসংখ্য কোণসমূহের প্রত্যেকটিরই sine হইবে $\frac{1}{\sqrt{2}}$, এইরূপ $\cos\theta=\frac{1}{2}$ হইলে θ র মান 60°, 300°, 420°, $660^\circ, \ldots$, -300°, $-60^\circ, \ldots$ প্রভৃতি অসংখ্য কোণসমূহের যে-কোনটিই হইতে পারে ; $\tan\theta=\sqrt{3}$ হইলে, θ র মান $60^\circ, 240^\circ, 420^\circ, 600^\circ, \ldots, -300^\circ, -120^\circ, \ldots$ প্রভৃতি অসংখ্য কোণসমূহের যে-কোনটিই হইতে পারে।

ত্রৈকোণমিতিক সমীকরণ সমাধানে এবং অন্যান্য ক্ষেত্রেও এইরূপ যে সকল অসংখ্য কোণের কোন ত্রৈকোণমিতিক অনুপাত একই মানবিশিষ্ট তাহাদের নির্ণয়ের প্রয়োজন হয় বলিয়া ঐ সকল অসংখ্য কোণ-প্রকাশক সংক্ষিপ্ত সাধারণ সূত্র উদ্ভাবিত হইয়াছে। পরবর্ত্তী কতিপয় অনুচ্ছেদে উদ্ভাবন-প্রণালী-সমেত বিভিন্ন ক্ষেত্রানুরূপ সাধারণ সূত্রসমূহ প্রদত্ত হইল।

1·2. শূন্য ত্রৈকোণমিতিক অনুপাতবিশিষ্ট কোণসমূহের সাধারণ রূপ।

(i) যে-কোন কোণ θ র এক বাহুস্থিত কোন বিন্দু হইতে অপর বাহুর উপর লম্ব অঙ্কন করিলে, আমরা জানি $\sin\theta = \dfrac{\text{লম্ব}}{\text{অতিভুজ}}$;

$\therefore\ \sin\theta = 0$ হইলে লম্ব $= 0$.

এখন, লম্বের শূন্য হইতে হইলে, কোণটির বাহুদ্বয়কে একই সরলরেখায় অবস্থিত হইতে হইবে ; অতএব, তখন θ র মান হইবে

$$0,\ \pi,\ 2\pi,\ 3\pi \ldots,\ -\pi,\ -2\pi,\ -3\pi, \ldots$$

স্পষ্টই, এই অসংখ্য কোণগুলিকে n এর মান শূন্য অথবা যে-কোন ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যা লইলে, $n\pi$ দ্বারা প্রকাশ করা যায়। অতএব,

$$\sin\theta = 0 \text{ হইলে, } \boldsymbol{\theta = n\pi}.$$

এস্থলে, n শূন্য অথবা যে-কোন ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যা।

(ii) যে-কোন কোণ θ র এক বাহুস্থিত কোন বিন্দু হইতে অপর বাহুর উপর লম্ব অঙ্কন করিলে, আমরা জানি $\cos\theta = \dfrac{\text{ভূমি}}{\text{অতিভুজ}}$;

$\therefore\ \cos\theta = 0$ হইলে, ভূমি $= 0$.

এখন ভূমির মান শূন্য হইতে হইলে কোণের বাহুদ্বয়কে পরস্পর লম্ব হইতে হইবে ; অতএব, তখন θ র মান হইবে

$$\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2},\ \frac{5\pi}{2}, \ldots,\ -\frac{\pi}{2},\ -\frac{3\pi}{2},\ -\frac{5\pi}{2}, \ldots$$

স্পষ্টই, এই অসংখ্য কোণগুলিকে n এর মান শূন্য অথবা যে-কোন ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যা লইলে $(2n+1)\frac{\pi}{2}$ দ্বারা প্রকাশ করা যায়।

অতএব, $\cos\theta = 0$ হইলে, $\boldsymbol{\theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}}$.

এস্থলে, n শূন্য অথবা যে-কোন ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যা।

(iii) $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta} = 0$ হইলে, $\sin\theta = 0$;

$\therefore\ \boldsymbol{\theta = n\pi}.$

এস্থলে, n শূন্য অথবা যে-কোন ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যা।

(iv) $\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta} = 0$ হইলে, $\cos\theta = 0$;

$$\therefore \quad \theta = (2n+1)\frac{\pi}{2}.$$

এস্থলে, n শূন্য অথবা যে-কোন ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যা।

(v) $|\sin\theta| < 1$ এবং $|\cos\theta| < 1$;

$\therefore \ |\operatorname{cosec}\theta| > 1$ এবং $|\sec\theta| > 1$;

$\therefore \ \operatorname{cosec}\theta \neq 0$, এবং $\sec\theta \neq 0$.

1·3. একই sine (অথবা cosecant)-বিশিষ্ট অসংখ্য কোণ-প্রকাশক সূত্র।

a একটি নির্দ্দিষ্ট ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক সংখ্যা, এবং $a < 1$. যে অসীম-সংখ্যক কোণের প্রত্যেকটির sine a র সমান, সেই সকল কোণ-প্রকাশক সূত্র নির্ণয় করিতে হইবে। যে সকল কোণের sine a র সমান, মনে কর, তাহাদের মধ্যে ক্ষুদ্রতম ধনাত্মক কোণটি α, এবং θ যেন সেই অজ্ঞাত কোণসমূহের সাধারণ নাম। তাহা হইলে,

$$\sin\theta = \sin\alpha, \quad \text{বা}, \ \sin\theta - \sin\alpha = 0,$$

$$\text{বা} \quad 2\cos\frac{\theta+\alpha}{2}\sin\frac{\theta-\alpha}{2} = 0;$$

$$\therefore \quad \cos\frac{\theta+\alpha}{2} = 0, \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

$$\text{অথবা}, \ \sin\frac{\theta-\alpha}{2} = 0. \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

(1) হইতে, $\frac{\theta+\alpha}{2} = (2m+1)\frac{\pi}{2}$,

এস্থলে, m শূন্য অথবা যে-কোন ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যা,

$$\text{বা}, \ \theta = +(2m+1)\pi - \alpha \quad \cdots \quad \cdots \quad (3)$$

(2) হইতে, $\frac{\theta-\alpha}{2} = m\pi$,

এস্থলে, m শূন্য অথবা যে-কোন ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যা,

$$\text{বা}, \ \theta = 2m\pi + \alpha \quad \cdots \quad \cdots \quad (4)$$

(3) এবং (4) একত্র করিয়া,

$$\theta = n\pi + (-1)^n\alpha. \quad \cdots \quad \cdots \quad (5)$$

কেননা, n অযুগ্ম সংখ্যা $2m+1$ হইলে,

$$\theta = (2m+1)\pi + (-1)^{2m+1}\alpha = (2m+1)\pi - \alpha,$$

এবং n যুগ্ম সংখ্যা $2m$ হইলে,

$$\theta = 2m\pi + (-1)^{2m}\alpha = 2m\pi + \alpha.$$

এস্থলে, n শূন্য অথবা যে-কোন ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যা।

আবার, $\text{cosec}\ \theta = \text{cosec}\ \alpha$ হইলে, $\sin\theta = \sin\alpha$;

$\therefore$ এক্ষেত্রেও $\theta = n\pi + (-1)^n\alpha.$

অতএব, যে সকল কোণের sine অথবা cosecant α র sine অথবা cosec এর সমান, তাহাদিগকে n কে শূন্য অথবা যে-কোন ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যা ধরিয়া,

$$\mathbf{n\pi + (-1)^n\alpha}$$

রাশিটি হইতে পাওয়া যায়।

দ্রষ্টব্য : যে অসীম-সংখ্যক কোণের প্রত্যেকটির sine অথবা cosecant a র সমান তাহাদিগের ক্ষুদ্রতম ধনাত্মক কোণ α লইয়া সূত্র গঠন না করিয়া উহাদিগের যে-কোন একটিকেই লইয়া সূত্র গঠন করিলেও সেই সূত্র হইতে পূর্ব্বানুরূপ কোণসমূহই পাওয়া যাইবে।

1·4. একই cosine (অথবা secant)-বিশিষ্ট অসংখ্য কোণ-প্রকাশক সূত্র।

a একটি নির্দ্দিষ্ট ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক সংখ্যা, এবং $a < 1.$ যে অসীম-সংখ্যক কোণের প্রত্যেকটির cosine a র সমান, মনে কর, তাহাদের মধ্যে ক্ষুদ্রতম ধনাত্মক কোণটি α, এবং θ যেন সেই অজ্ঞাত কোণসমূহের সাধারণ নাম। তাহা হইলে,

$$\cos\theta = \cos\alpha,\ \text{বা},\ \cos\alpha - \cos\theta = 0,$$

$$\text{বা}\quad 2\sin\frac{\theta+\alpha}{2}\sin\frac{\theta-\alpha}{2} = 0,$$

$$\therefore\quad \sin\frac{\theta+\alpha}{2} = 0,\quad \cdots\quad \cdots\quad (1)$$

$$\text{অথবা},\ \sin\frac{\theta-\alpha}{2} = 0.\quad \cdots\quad \cdots\quad (2)$$

(1) হইতে $\frac{\theta+\alpha}{2} = n\pi$, এস্থলে n শূন্য অথবা যে-কোন ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যা,

$$\text{বা},\ \theta = 2n\pi - \alpha.\quad \cdots\quad \cdots\quad (3)$$

(2) হইতে, $\frac{\theta - a}{2} = n\pi$, এস্থলেও n শূন্য অথবা যে-কোন ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যা,

$$\text{বা, } \theta = 2n\pi + a \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad (4)$$

(3) এবং (4) একত্র করিয়া,

$\theta = 2n\pi \pm a$, এস্থলে n শূন্য অথবা যে-কোন ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যা।

আবার, $\sec\theta = \sec a$ হইলে, $\cos\theta = \cos a$;

$\therefore$ এক্ষেত্রেও $\theta = 2n\pi \pm a$.

অতএব, যে সকল কোণের cosine অথবা secant a র cosine অথবা secant এর সমান, তাহাদিগকে, n কে শূন্য অথবা যে-কোন ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যা ধরিয়া,

$$2n\pi \pm a$$

রাশি হইতে পাওয়া যায়।

দ্রষ্টব্য : যে অসীম-সংখ্যক কোণের প্রত্যেকটির cosine অথবা secant a, তাহাদিগের ক্ষুদ্রতম ধনাত্মক কোণ a কে লইয়া সূত্র গঠন না করিয়া তাহাদিগের যে-কোন একটিকেই লইয়া সূত্র গঠন করিলেও সেই সূত্র হইতে পূর্ব্বানুরূপ কোণসমূহই পাওয়া যাইবে।

1·5. একই tangent (অথবা cotangent)-বিশিষ্ট অসংখ্য কোণ-প্রকাশক সূত্র।

a একটি নির্দ্দিষ্ট ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক সংখ্যা। যে অসীম-সংখ্যক কোণের প্রত্যেকটির tangent a র সমান, মনে কর, তাহাদের মধ্যে ক্ষুদ্রতম ধনাত্মক কোণটি a, এবং θ যেন সেই অজ্ঞাত কোণসমূহের সাধারণ নাম। তাহা হইলে,

$$\tan\theta = \tan a, \text{ বা, } \tan\theta - \tan a = 0,$$

$$\text{বা, } \frac{\sin\theta}{\cos\theta} - \frac{\sin a}{\cos a} = 0,$$

$$\text{বা, } \frac{\sin\theta\cos a - \cos\theta\sin a}{\cos\theta\cos a} = 0,$$

$$\text{বা, } \frac{\sin(\theta - a)}{\cos\theta\cos a} = 0,$$

বা, $\sin(\theta-\alpha)=0\times\cos\theta\cos\alpha=0$,

কারণ, $\cos\theta$ অথবা $\cos\alpha$ র কোনটিই অসীম নহে ;

$\therefore\ \theta-\alpha=n\pi$, এস্থলে n শূন্য অথবা যে-কোন ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যা,

$\therefore\ \theta=n\pi+\alpha.$

আবার, $\cot\theta=\cot\alpha$ হইলে, $\tan\theta=\tan\alpha$;

$\therefore$ এক্ষেত্রেও $\theta=n\pi+\alpha.$

অতএব, যে সকল কোণের tangent অথবা cotangent α র tangent, অথবা cotangent এর সমান, তাহাদিগকে, n কে শূন্য অথবা যে-কোন ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যা ধরিয়া,

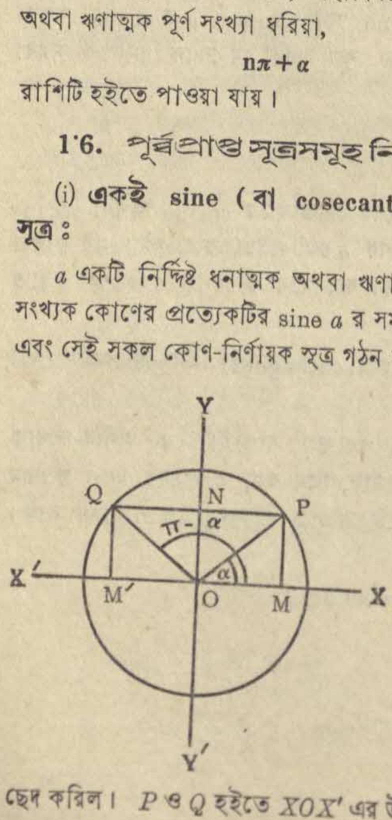
$$n\pi+\alpha$$

রাশিটি হইতে পাওয়া যায়।

1·6. পূর্বপ্রাপ্ত সূত্রসমূহ নির্ণয়ের জ্যামিতিক পদ্ধতি।

(i) একই sine (বা cosecant)-বিশিষ্ট অসংখ্য কোণ-প্রকাশক সূত্র :

a একটি নির্দ্দিষ্ট ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক সংখ্যা, এবং $a<1$. যে অসীম-সংখ্যক কোণের প্রত্যেকটির sine a র সমান, তাহাদিগকে অঙ্কন করিতে হইবে এবং সেই সকল কোণ-নির্ণায়ক সূত্র গঠন করিতে হইবে।



XOX', YOY' দুইটি পরস্পর লম্ব সরলরেখা O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। O কে কেন্দ্র করিয়া এবং একক ব্যাসার্দ্ধ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর। এখন, a ধনাত্মক হইলে, OY হইতে এবং ঋণাত্মক হইলে, OY' হইতে a র সাংখ্যমানের সমান করিয়া ON অংশ কাটিয়া লও এবং N বিন্দু দিয়া $PNQ \parallel XOX'$ আঁক। PNQ সরলরেখা বৃত্তটিকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করিল। P ও Q হইতে XOX' এর উপর যথাক্রমে PM ও QM' লম্ব টান।

এখন, $MP = ON = a$;

$\therefore \sin \angle POM = \frac{MP}{OP} = \frac{a}{1} = a.$

$\therefore$ যে সকল কোণের sine a র সমান, $\angle POM$ তাহাদের একটি। $\angle POM$ কে a দ্বারা সূচিত কর।

আবার, $M'Q - ON = a$;

$\therefore \sin \angle QOX = \frac{M'Q}{OQ} = \frac{a}{1} = a.$

$\therefore$ যে সকল কোণের sine a র সমান, $\angle QOX$ ও তাহাদের একটি।

এখন, POM ও QOM' ত্রিভুজদ্বয় সর্ব্বসম বলিয়া,

$\angle QOM' = \angle POM$, অর্থাৎ, a ;

$\therefore \angle QOX = \pi - a.$

তাহা হইলে, যে সকল কোণের sine a তাহাদের দুইটি হইল a এবং $\pi - a.$

N বিন্দুর অবস্থানটি সুনির্দ্দিষ্ট এবং এই N বিন্দুর সাহায্যে a ও $\pi - a$ কোণ দুইটি অঙ্কন করা হইয়াছে ; অতএব, OX হইতে আরম্ভ করিয়া ঘূর্ণ্যমান সরল-রেখাটির একবার ঘুরিয়া পুনরায় OX অবস্থানে আসার মধ্যে, অর্থাৎ, 0 হইতে 2π এর মধ্যে a ও $\pi - a$ ভিন্ন অন্য কোন কোণ নাই যাহাদের sine a র সমান।

এখন 2π বা 2π এর কোন গুণিতক কোন কোণের সহিত যোগ বা উহা হইতে বিয়োগ করিলেও লব্ধ কোণ বা কোণসমূহের ত্রৈকোণমিতিক অনুপাত একই থাকে ; অতএব, যে সকল কোণের sine a র সমান, তাহারা হইতেছে $2p\pi + a$ এবং $2p\pi + \pi - a$, অর্থাৎ, $(2p+1)\pi - a$, এস্থলে p শূন্য অথবা যে-কোন ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যা। এই দুইটি সূত্র একত্র করিয়া n এর শূন্য অথবা ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক যে-কোন পূর্ণ-সংখ্যক মানের জন্য

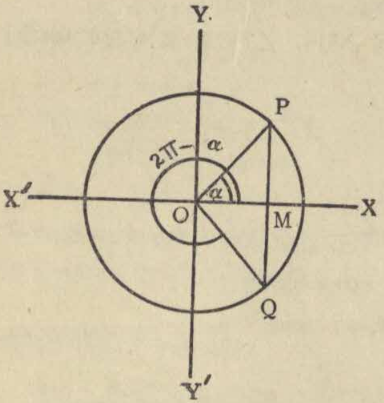
$$n\pi + (-1)^n a$$

সূত্র হইতে যে সকল কোণের sine a র সমান তাহাদিগকে পাওয়া যাইবে।

(ii) একই cosine (বা secant)-বিশিষ্ট অসংখ্য কোণ-প্রকাশক সূত্র :

a একটি নির্দ্দিষ্ট ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক সংখ্যা, এবং $a < 1$. a ধনাত্মক হইলে, OX হইতে এবং ঋণাত্মক হইলে, OX' হইতে aর সাংখ্যমানের সমান

করিয়া OM অংশ কাটিয়া লও এবং M বিন্দু হইতে $PMQ \perp XOX'$ আঁক ; PMQ সরলরেখা বৃত্তটিকে P ও Q বিন্দুতে ছেদ করিল।



এখন, $\cos \angle POM$

$$= \frac{OM}{OP} = \frac{a}{1} = a.$$

$\therefore$ যে সকল কোণের cosine a র সমান $\angle POM$ তাহাদের একটি। $\angle POM$ কে α দ্বারা সূচিত কর। আবার, প্রবৃদ্ধ কোণ QOM এর

$$\text{cosine} = \frac{OM}{OQ} = \frac{a}{1} = a.$$

$\therefore$ যে সকল কোণের cosine a র সমান, প্রবৃদ্ধ কোণ QOMও তাহাদের একটি।

এখন POM ও QOM ত্রিভুজদ্বয় সর্ব্বসম বলিয়া, $\angle QOM = \angle POM = \alpha$.

$\therefore$ প্রবৃদ্ধ $\angle QOM = 2\pi - \alpha$.

তাহা হইলে, যে সকল কোণের cosine a তাহাদের দুইটি হইল α এবং $2\pi - \alpha$. 0 এবং 2π এর মধ্যে মাত্র এই দুইটি কোণেরই cosine a র সমান। ইহাদের সহিত 2π বা 2π এর কোন গুণিতক যোগ বা উহা হইতে বিয়োগ করিয়া যে সকল কোণের cosine a র সমান, তাহারা হইতেছে

$2p\pi + \alpha$ এবং $2p\pi + 2\pi - \alpha$, অর্থাৎ, $2(p+1)\pi - \alpha$, এস্থলে p শূন্য অথবা যে-কোন ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যা। এই দুইটি সূত্র একত্র করিয়া n এর শূন্য অথবা ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক যে-কোন পূর্ণ-সংখ্যক মানের জন্য

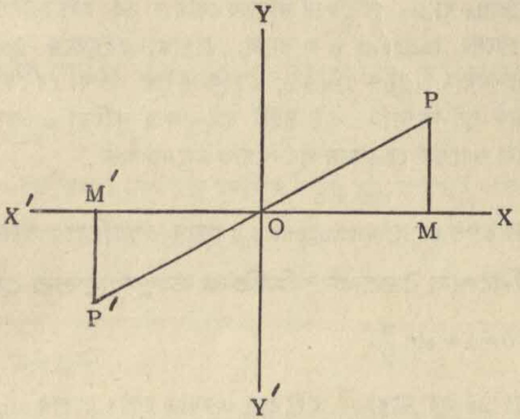
$$2n\pi \pm \alpha$$

সূত্র হইতে যে সকল কোণের cosine a র সমান তাহাদিগকে পাওয়া যায়।

(iii) একই tangent (বা cotangent)-বিশিষ্ট অসংখ্য কোণ-প্রকাশক সূত্র :

a একটি নির্দ্দিষ্ট ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক সংখ্যা। যে অসীম-সংখ্যক কোণের প্রত্যেকটির tangent a র সমান, তাহাদিগকে অঙ্কন করিতে হইবে এবং সেই সকল কোণ-নির্ণায়ক সূত্র গঠন করিতে হইবে।

XOX', YOY' দুইটি পরস্পর লম্ব সরলরেখা O বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। OX হইতে এককের সমান করিয়া OM কাটিয়া লও, এবং a ধনাত্মক হইলে,



প্রথম বা তৃতীয় পাদে (আর, ঋণাত্মক হইলে, দ্বিতীয় বা চতুর্থ পাদে) a র সমান করিয়া $MP \perp XOX'$ টান। OP যোগ কর।

এখন, $\tan \angle POM = \frac{a}{1} = a.$

$\therefore$ যে সকল কোণের tangent a র সমান, $\angle POM$ তাহাদের একটি। $\angle POM$ কে a দ্বারা সূচিত কর।

আবার, PO কে P' পর্য্যন্ত এরূপভাবে বর্দ্ধিত কর, যেন $PO = OP'$ হয়, এবং P' হইতে XOX' এর উপর $P'M'$ লম্ব টান। POM এবং $P'OM'$ ত্রিভুজদ্বয় সর্ব্বসম বলিয়া,

$$M'P' = PM = -MP = -a,$$

এবং $OM' = MO = -OM = -1$;

$\therefore$ প্রবৃদ্ধ $\angle P'OM$ এর tangent $= \frac{M'P'}{OM'} = \frac{-a}{-1} = a$;

$\therefore$ যে সকল কোণের tangent a র সমান, প্রবৃদ্ধ কোণ $P'OM$ও তাহাদের একটি।

এখন, POM ও $P'OM'$ ত্রিভুজদ্বয় সর্ব্বসম বলিয়া,

$$\angle P'OM' = \angle POM = a.$$

$\therefore$ প্রবৃদ্ধ কোণ $P'OM = \pi + a.$

তাহা হইলে, যে সকল কোণের tangent, a তাহাদের দুইটি হইল a এবং $\pi+a$. 0 এবং 2π এর মধ্যে মাত্র এই দুইটি কোণেরই tangent a র সমান। ইহাদের সহিত 2π বা 2π এর কোন গুণিতক যোগ বা উহা হইতে বিয়োগ করিয়া যে সকল কোণের tangent a র সমান, তাহারা হইতেছে $2p\pi+a$, এবং $2p\pi+\pi+a$, অর্থাৎ, $(2p+1)\pi+a$, এস্থলে p শূন্য অথবা যে-কোন ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যা। এই দুইটি সূত্র একত্র করিয়া n এর শূন্য অথবা ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক যে-কোন পূর্ণ-সংখ্যক মানের জন্য

$$\mathbf{n\pi+a}$$

সূত্র হইতে যে-সকল কোণের tangent a র সমান তাহাদিগকে পাওয়া যায়।

1·7. বিশেষ ত্রৈকোণমিতিক অনুপাতের ক্ষেত্র।

(i) $\sin\theta=1=\sin\frac{\pi}{2}$;

0 এবং 2π এর মধ্যে $\frac{\pi}{2}$ হইতেছে একমাত্র কোণ যাহার $\sin=1$.

$\therefore\quad \theta=2n\pi+\frac{\pi}{2}=(4n+1)\frac{\pi}{2}$.

এস্থলে, $n=0$, অথবা, যে-কোন ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যা।

(ii) $\sin\theta=-1=\sin\frac{3\pi}{2}$,

$\therefore\quad \theta=2n\pi+\frac{3\pi}{2}=(4n+3)\frac{\pi}{2}$.

এস্থলে $n=0$, অথবা, যে-কোন ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যা।

(iii) $\cos\theta=1=\cos 0^\circ$;

$\therefore\quad \theta=2n\pi$.

এস্থলে, $n=0$ অথবা যে-কোন ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যা।

(iv) $\cos\theta=-1=\cos\pi$;

$\therefore\quad \theta=2n\pi+\pi=(2n+1)\pi$.

এস্থলে, $n=0$ অথবা যে-কোন ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যা।

দ্রষ্টব্য : পূর্ব্বপ্রাপ্ত ত্রৈকোণমিতিক অনুপাতসমূহের সূত্র প্রয়োগ করিয়াও উপরের সিদ্ধান্তগুলিতে উপনীত হওয়া যায়; কিন্তু এক্ষেত্রে ফলগুলি অধিকতর সংক্ষিপ্ত।

1·8. উদাহরণমালা।

উদা. 1. Write down the general value of θ, when

(i) $\sin\theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$; (ii) $\cos\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}$; (iii) $\tan\theta = \sqrt{3}$.

(i) যে সকল কোণের sine $= \frac{1}{\sqrt{2}}$, তাহাদের মধ্যে ধনাত্মক ক্ষুদ্রতমটি $\frac{\pi}{4}$.

$\therefore\ \theta = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{4}$.

এস্থলে, n শূন্য অথবা যে-কোন ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যা।

(ii) যে সকল কোণের cosine $= -\frac{\sqrt{3}}{2}$, তাহাদের মধ্যে ধনাত্মক ক্ষুদ্রতমটি $\frac{5\pi}{6}$,

$\therefore\ \theta = 2n\pi \pm \frac{5\pi}{6}$.

এস্থলে, n শূন্য অথবা যে-কোন ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যা।

(iii) যে সকল কোণের tangent $= \sqrt{3}$, তাহাদের মধ্যে ধনাত্মক ক্ষুদ্রতমটি $\frac{\pi}{3}$,

$\therefore\ \theta = n\pi + \frac{\pi}{3}$.

এস্থলে, n শূন্য অথবা যে-কোন ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যা।

উদা. 2. Find the general value of θ which satisfies both the equations $\sec\theta = -2$ and $\cot\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

$\sec\theta$ ঋণাত্মক বলিয়া, θ অবশ্যই দ্বিতীয় অথবা তৃতীয় পাদের একটি কোণ। এখন, $\sec\frac{\pi}{3} = 2$;

$\therefore\ \theta$ অবশ্যই $\pi - \frac{\pi}{3}$, অথবা, $\pi + \frac{\pi}{3}$, অর্থাৎ, $\frac{2\pi}{3}$, অথবা, $\frac{4\pi}{3}$ হইবে। ... (1)

আবার $\cot\theta$ ধনাত্মক বলিয়া, θ অবশ্যই প্রথম পাদ অথবা তৃতীয় পাদের একটি কোণ। এখন, $\cot\frac{\pi}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$;

$\therefore$ θ অবশ্যই $\frac{\pi}{3}$, অথবা, $\pi+\frac{\pi}{3}$, অর্থাৎ, $\frac{\pi}{3}$, অথবা, $\frac{4\pi}{3}$ হইবে।…(2)

$\therefore$ (1) এবং (2) হইতে, θ র সাধারণ মান গ্রহণ করিয়া,

$$\theta=\frac{4\pi}{3}.$$

$\therefore$ θ র সাধারণ মান $=2n\pi+\frac{4\pi}{3}=2(3n+2)\frac{\pi}{3}\cdot$

এস্থলে, n শূন্য অথবা যে-কোন ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যা।

উদা. 3. Prove that the following equations are identical having the solutions as $\theta=n\pi\pm\alpha$:

$\sin^2\theta=\sin^2\alpha$, $\cos^2\theta=\cos^2\alpha$, $\tan^2\theta=\tan^2\alpha$ and hence solve $3\sin^2\theta+5\cos^2\theta=4$.

$\sin^2\theta=\sin^2\alpha$, $\quad\therefore\ 1-\sin^2\theta=1-\sin^2\alpha.$

অর্থাৎ, $\cos^2\theta=\cos^2\alpha$, $\quad\therefore\ \sec^2\theta=\sec^2\alpha.$

$\therefore\ 1+\tan^2\theta=1+\tan^2\alpha$, $\quad\therefore\ \tan^2\theta=\tan^2\alpha.$

এখন, $\cos^2\theta=\cos^2\alpha$, $\quad\therefore\ 2\cos^2\theta=2\cos^2\alpha.$

$\therefore\ 1+\cos 2\theta=1+\cos 2\alpha$, $\quad\therefore\ \cos 2\theta=\cos 2\alpha$,

$\therefore\ 2\theta=2n\pi\pm 2\alpha$, $\quad\therefore\ \boldsymbol{\theta=n\pi\pm\alpha}.$

$3\sin^2\theta+5\cos^2\theta=4.$

বা, $3(1-\cos^2\theta)+5\cos^2\theta=4$,

বা, $2\cos^2\theta=1$, বা, $\cos^2\theta=\frac{1}{2}$,

$$=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\cos^2\frac{\pi}{4}\cdot$$

$$\therefore\ \boldsymbol{\theta=n\pi\pm\frac{\pi}{4}}\cdot$$

উদা. 4. Solve the equation $\cot x-\tan x=2$.

[C. U. 1934, '37]

$\cot x-\tan x=2$, বা, $\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{\sin x}{\cos x}=2$,

বা, $\cos^2 x-\sin^2 x=2\sin x\cos x$, বা, $\cos 2x=\sin 2x$,

বা, $\frac{\sin 2x}{\cos 2x}=1$, বা, $\tan 2x=1=\tan\frac{\pi}{4}$;

$\therefore\ 2x=n\pi+\frac{\pi}{4}$, বা, $x=\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{8}=(4n+1)\frac{\pi}{8}\cdot$

উদা. 5. Solve $2\sin^2 x + \sin^2 2x = 2.$ [C. U. 1940]

$2\sin^2 x + \sin^2 2x = 2,$

বা, $2\sin^2 x + (2\sin x\cos x)^2 = 2,$

বা, $2\sin^2 x + 4\sin^2 x\cos^2 x = 2,$

বা, $\sin^2 x + 2\sin^2 x\cos^2 x = 1,$

বা, $2\sin^2 x\cos^2 x = 1 - \sin^2 x = \cos^2 x,$

বা, $\cos^2 x - 2\sin^2 x\cos^2 x = 0,$ বা, $\cos^2 x(1 - 2\sin^2 x) = 0,$

বা, $\cos^2 x.\cos 2x = 0$;

$\therefore$ $\cos x = 0,$ অর্থাৎ, $x = (2n+1)\frac{\pi}{2},$

অথবা, $\cos 2x = 0,$ অর্থাৎ, $2x = (2n+1)\frac{\pi}{2}$; $\therefore$ $x = (2n+1)\frac{\pi}{4}\cdot$

উদা. 6. Solve $\sin x + \cos x = \sqrt{2}$ [C.U., 1935 ; B.H.U., 1946]

উভয় পক্ষ $\sqrt{1^2+1^2}$, অর্থাৎ, $\sqrt{2}$ দ্বারা ভাগ করিয়া,

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sin x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos x = 1,$$

বা, $\sin\frac{\pi}{4}\sin x + \cos\frac{\pi}{4}\cos x = 1,$

বা, $\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$; $\therefore$ $x - \frac{\pi}{4} = 2n\pi$;

$\therefore$ $x = 2n\pi + \frac{\pi}{4} = (8n+1)\frac{\pi}{4}\cdot$

দ্রষ্টব্য 1. একই প্রশ্ন অনেক সময়ে বিভিন্ন পদ্ধতিতে সমাধান করিয়া বিভিন্ন আকারের ফল পাওয়া যায় ; কিন্তু প্রকৃতপক্ষে আকার বিভিন্ন হইলেও এই সকল ফল একই কোণ-শ্রেণী সূচিত করে।

দ্রষ্টব্য 2. অবান্তর বীজ : কোন ত্রৈকোণমিতিক সমীকরণের সমাধান বিভিন্ন পদ্ধতিতে নিষ্পন্ন করা সম্ভব হইলেও এরূপ ত্রুটিপূর্ণ পদ্ধতিও আছে, যাহাতে সমীকরণের আসল বীজের সহিত এরূপ কতকগুলি ফল আসিয়া পড়ে যাহারা ঐ সমীকরণের বীজ নহে, অর্থাৎ, যাহাদের দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয় না ; এইজাতীয় ফলকে **অবান্তর বীজ** (extraneous solution) বলে। যেমন, বর্তমান উদাহরণে, উভয় পক্ষ বর্গ করিলে,

$\sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x\cos x = 2,$

বা, $1+\sin 2x=2$, বা, $\sin 2x=1$;

$\therefore\ 2x=(4n+1)\frac{\pi}{2}$, বা, $x=(4n+1)\frac{\pi}{4}$.

এস্থলে, n শূন্য বা যে-কোন ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যা।

$n=0$ হইলে, $x=\frac{\pi}{4}$; ইহা দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয়।

n যে-কোন ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক যুগ্ম পূর্ণ সংখ্যা, মনে কর, $2m$ হইলে,

$$x=(8m+1)\frac{\pi}{4};$$

m এর 0 বা ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক সকল পূর্ণ-সংখ্যক মানের জন্যই ইহাদের দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয়।

n যে-কোন ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক অযুগ্ম পূর্ণ সংখ্যা, মনে কর, $2m+1$ হইলে,

$$x=(8m+5)\frac{\pi}{4},$$

এস্থলে m শূন্য বা ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যা। কিন্তু ইহাদের দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয় না। ইহারা সমীকরণটির অবান্তর বীজ। এই সকল অবান্তর বীজ সম্বন্ধে সর্ব্বদাই সাবধান হইতে হয়, এবং সমাধানান্তে পরীক্ষা করিয়া দেখিতে হয় প্রাপ্ত বীজসমূহ দ্বারা মূল সমীকরণটি সিদ্ধ হয় কিনা ; যেটি দ্বারা সিদ্ধ হয় না, তাহাকে অবান্তর বলিয়া পরিত্যাগ করিতে হয়।

এখন, এই অবান্তর বীজগুলি আসিল কিরূপে? আসিবার হেতু, মূল সমীকরণটি সমাধান না করিয়া সমাধান করা হইয়াছে

$$\sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x=2$$

সমীকরণটিকে। এই সমীকরণ যেরূপ মূল সমীকরণের উভয় পক্ষ বর্গ করিয়া পাওয়া গিয়াছে, সেইরূপ

$$\sin x+\cos x=-\sqrt{2} \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad (1)$$

সমীকরণের উভয় পক্ষ বর্গ করিয়াও উহাকে পাওয়া যায়। মূল সমীকরণের অবান্তর বীজগুলি সমীকরণ (1) এর বীজ।

উদা. 7. Solve $2\cos^2\theta-\sin\theta\cos\theta=1$.

এস্থলে, $2\cos^2\theta-1=\sin\theta\cos\theta$.

বা, $\cos 2\theta=\sin\theta\cos\theta$.

বা, $2\cos 2\theta=2\sin\theta\cos\theta=\sin 2\theta$;

$\therefore \quad \dfrac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = 2$, বা, $\tan 2\theta = 2 = \tan \alpha$, মনে কর ;

$\therefore \quad 2\theta = n\pi + \alpha$, বা, $\theta = n\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\alpha}{2}$,

এস্থলে, $n = 0$ বা যে-কোন ধনাত্মক অথবা ঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যা,

এবং $\tan \alpha = 2$.

উদা. 8. Solve $\cos 4x + \cos 3x + \cos 2x = 0$.

$\cos 4x + \cos 3x + \cos 2x = 0$,

বা, $(\cos 4x + \cos 2x) + \cos 3x = 0$,

বা, $2 \cos 3x \cos x + \cos 3x = 0$,

বা, $\cos 3x\,(2 \cos x + 1) = 0$,

$\therefore \quad \cos 3x = 0$, অর্থাৎ, $3x = (2n+1)\dfrac{\pi}{2}$; $\therefore \quad x = (2n+1)\dfrac{\pi}{6}$;

অথবা, $2 \cos x = -1$, অর্থাৎ, $\cos x = -\frac{1}{2} = \cos \dfrac{2\pi}{3}$;

$\therefore \quad x = 2n\pi \pm \dfrac{2\pi}{3}$.

উদা. 9. Solve $a \cos \theta + b \sin \theta = c$, where $c \leqslant \sqrt{a^2+b^2}$.

উভয় পক্ষকে $\sqrt{a^2+b^2}$ দ্বারা ভাগ করিয়া,

$$\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \cos \theta + \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \sin \theta = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}. \quad \cdots (1)$$

স্পষ্টই, $a \leqslant \sqrt{a^2+b^2}$ এবং $b \leqslant \sqrt{a^2+b^2}$;

অতএব, মনে করা যাইতে পারে $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos \alpha$

এবং $\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin \alpha$.

$\therefore$ (1) হইতে, $\cos \theta \cos \alpha + \sin \theta \sin \alpha = \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos \beta$,

মনে কর। $c \leqslant \sqrt{a^2+b^2}$ হইলেই এইরূপ মনে করা যায়।

$\therefore \quad \cos(\theta - \alpha) = \cos \beta$;

$\therefore \quad \theta - \alpha = 2n\pi \pm \beta$, বা, $\theta = 2n\pi \pm \beta + \alpha$,

এস্থলে, $n = 0$ বা যে-কোন পূর্ণ সংখ্যা, ধনাত্মক বা ঋণাত্মক।

উদা. 10. Solve $4\cos x+3\sin x=3$, given $\tan 36^\circ 50'=\frac{3}{4}$.

সমীকরণটির উভয় পক্ষ $\sqrt{4^2+3^2}$, অর্থাৎ, 5 দ্বারা ভাগ করিয়া,

$$\tfrac{4}{5}\cos x+\tfrac{3}{5}\sin x=\tfrac{3}{5}. \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

$\tan 36^\circ 50'=\frac{3}{4}$; $\therefore$ $\sin 36^\circ 50'=\frac{3}{5}$, এবং $\cos 36^\circ 50'=\frac{4}{5}$.

$\therefore$ (1) হইতে, $\cos x\cos 36^\circ 50'+\sin x\sin 36^\circ 50'=\sin 36^\circ 50'$,

বা, $\cos(x-36^\circ 50')=\sin 36^\circ 50'=\cos(90^\circ-36^\circ 50')$

$=\cos 53^\circ 10'$;

$\therefore$ $x-36^\circ 50'=2n\pi\pm 53^\circ 10'$; $\therefore$ $x=2n\pi\pm 53^\circ 10'+36^\circ 50'$,

অর্থাৎ, $x=2n\pi+90^\circ$, বা, $x=2n\pi-16^\circ 10'$.

উদা. 11. Solve $\tan 4\theta=\cot 5\theta$.

$$\tan 4\theta=\cot 5\theta=\tan\left(\frac{\pi}{2}-5\theta\right);$$

$$\therefore\quad 4\theta=n\pi+\frac{\pi}{2}-5\theta\ ;$$

$$\therefore\quad 9\theta=(2n+1)\frac{\pi}{2},\ \text{বা},\ \theta=\frac{2n+1}{9}\cdot\frac{\pi}{2}.$$

উদা. 12. Solve

(i) $\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta=1$, for $-2\pi<\theta<2\pi$;

(ii) $6\cos^2\theta-13\cos\theta+5=0$, for $-\pi<\theta<\pi$.

(i) উভয় পক্ষ $\sqrt{1+3}$, অর্থাৎ, 2 দ্বারা ভাগ করিয়া,

$$\cos\theta.\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta=\frac{1}{2},$$

বা, $$\cos\theta.\cos\frac{\pi}{3}+\sin\theta\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2},$$

বা, $$\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}\ ;$$

$$\therefore\quad \theta-\frac{\pi}{3}=2n\pi\pm\frac{\pi}{3},$$

বা, $$\theta=2n\pi+\frac{2\pi}{3} \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

অথবা, $$\theta=2n\pi. \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

(1) হইতে, $n=-1, 0$ হইলে, θ র মান -2π হইতে 2π এর মধ্যে থাকিবে ;

$$\therefore\quad \theta=-\frac{4\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}.$$

(2) হইতে, কেবলমাত্র $n=0$ হইলে, θ র মান -2π হইতে 2π এর মধ্যে থাকিবে ;

$\therefore \quad \theta=0.$

$\therefore$ -2π হইতে 2π এর মধ্যে অবস্থিত θ এর $-\frac{4\pi}{3}$, 0 এবং $\frac{2\pi}{3}$ মান তিনটি দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয়।

(ii) $6\cos^2\theta-13\cos\theta+5=0$;

বা, $(2\cos\theta-1)(3\cos\theta-5)=0.$

কিন্তু $\cos\theta\neq\frac{5}{3}$, $\quad (\because \frac{5}{3}>1)$

$\therefore \quad \cos\theta=\frac{1}{2}=\cos\frac{\pi}{3}; \qquad \therefore \theta=2n\pi\pm\frac{\pi}{3},$

অর্থাৎ, $\theta=2n\pi+\frac{\pi}{3}$ $\quad\cdots\quad\cdots\quad$ (1)

অথবা, $\theta=2n\pi-\frac{\pi}{3}$ $\quad\cdots\quad\cdots\quad$ (2)

(1) হইতে, কেবলমাত্র $n=0$ হইলে, θ এর মান $-\pi$ হইতে π এর মধ্যে থাকে ; $\therefore \quad \theta=\frac{\pi}{3}.$

(2) হইতে, কেবলমাত্র $n=0$ হইলে, θ র মান $-\pi$ হইতে π এর মধ্যে থাকে ; $\therefore \quad \theta=-\frac{\pi}{3}.$

$\therefore$ $-\pi$ হইতে π এর মধ্যে অবস্থিত θ র $-\frac{\pi}{3}$ এবং $\frac{\pi}{3}$ মান দুইটি দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয়।

উদা. 13. Solve $\tan x+\tan 2x+\tan 3x=0.$

[A. I. 1941 ; B. H. U. 1946]

$\tan x+\tan 2x+\tan 3x=0,$

বা, $\tan 3x=-(\tan x+\tan 2x),$

বা, $\tan(x+2x)=-(\tan x+\tan 2x),$

বা, $\frac{\tan x+\tan 2x}{1+\tan x\tan 2x}+\tan x+\tan 2x=0,$

বা, $(\tan x+\tan 2x)\left(\dfrac{1}{1-\tan x \tan 2x}+1\right)=0$;

$\therefore \quad \tan x+\tan 2x=0 \quad \cdots\cdots \quad (1)$

অথবা, $\dfrac{1}{1-\tan x \tan 2x}+1=0 \quad \cdots \quad (2)$

(1) হইতে, $\tan x=-\tan 2x=\tan(-2x)$;

$\therefore \quad x=n\pi-2x$, বা, $3x=n\pi$, বা, $x=\dfrac{n\pi}{3}$.

(2) হইতে, $1+1-\tan x \tan 2x=0$, বা, $\tan x \tan 2x=2$,

বা, $\tan x . \dfrac{2 \tan x}{1-\tan^2 x}=2$,

বা, $\tan^2 x=1-\tan^2 x$, বা, $2 \tan^2 x=1$,

বা, $\tan^2 x=\dfrac{1}{2}$, বা, $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=\tan^2 \alpha$

$\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\tan \alpha\right.$, মনে করিয়া$\left.\right)$

$\therefore \quad x=n\pi \pm \alpha$.

প্রশ্নমালা 1

1. Write down the general value of θ satisfying the equations :

(i) $\sin \theta=\frac{1}{2}$; (ii) $\cos \theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; (iii) $\tan \theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$;

(iv) $\sin \theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; (v) $\cos \theta=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$; (vi) $\tan \theta=-\sqrt{3}$;

(vii) $\operatorname{cosec} \theta=\sqrt{2}$; (viii) $\sec \theta=-\dfrac{2}{\sqrt{3}}$; (ix) $\cot \theta=-1$.

2. Write down the general value of θ satisfying the equations :

(i) $\cos \theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}, \tan \theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$;

(ii) $\sin \theta=-\frac{1}{2}, \cot \theta=-\sqrt{3}$.

3. Find an expression which includes all the angles which have the same sine as A has cosine.

Solve the following equations :

4. $2\sin^2\theta - 2\cos^2\theta + 1 = 0$.

5. (i) $\sec^2\theta + \tan^2\theta = 3$. (ii) $2\tan^2\theta = \sec^2\theta$.

6. $\tan^2\theta = 3\operatorname{cosec}^2\theta - 1$. [C. U. 1939]

7. $2\cos^2\theta + \sqrt{2}\sin\theta = 2$.

8. $\operatorname{cosec}^2\theta + \cot^2\theta = 3\cot\theta$. [C. U. 1913]

9. $\tan^2\theta + \cot^2\theta = 2$. [Patna, 1942]

10. (i) $\tan x + \cot x = 4$. [C. U. 1913]

(ii) $\tan 5\theta = \cot 2\theta$. [A. U. 1943]

11. $\cot 2x + \tan x = 2$. **12.** $\cos\theta + \cos 5\theta = 0$.

13. $\sin 4x - \sin 2x = \cos 3x$.

14. $\cos 3\theta - \cos 5\theta = \sin\theta$. [A. U. 1939]

15. (i) $\sin 2\theta = \cos\theta$. [C. U. 1953]

(ii) $\sin 4\theta = \sin\theta$. [B. H. U. 1949]

16. $\sin m\theta + \sin n\theta = 0$.

17. $\cos 3x + \cos 2x + \cos x = 0$. [C. U. 1946]

18. $\sin 7\theta - \sin 3\theta - \sin\theta = 0$. [P. U. 1939]

19. (i) $\cos\theta + \cos 2\theta + \cos 3\theta + \cos 4\theta = 0$.

(iii) $\cos x + \cos 3x + \cos 5x + \cos 7x = 0$. [C. U. 1959]

20. $\cos x + \sin x = \cos 2x + \sin 2x$. [C. U. 1943]

21. $\cos x - \sin x = \cos\alpha + \sin\alpha$. [B. H. U. 1938]

22. $\sin^2 2\theta = \sin^2\theta$.

23. $\sin^2 n\theta - \sin^2 (n-1)\theta = \sin^2\theta$.

24. $\sin 5x \cos 3x = \sin 9x \cos 7x$. [B. H. U. 1946]

25. $2\sin 2x \tan x - 1 = \tan x - 2\sin 2x$.

26. $\sin x + \cos x = \frac{1}{\sqrt{2}}$. [B. H. U. 1948]

27. $\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta = 2$. [C. U. 1936]

28. $\sin x + \sqrt{3}\cos x = \sqrt{2}$. [C. U. 1938, '47]

29. $\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta = \sqrt{2}$. [C. U. 1944]

30. $\sin\theta + 2\cos\theta = 1$. [C. U. 1934]

31. $2\cos\theta + 3\sin\theta = 2$, given $\tan 56^\circ\ 20' = 1\frac{1}{2}$.

32. $\tan x + \tan 2x + \tan x \tan 2x = 1$. [C. U. 1941, '45, '48]

33. $\tan x + \tan 2x + \tan 3x = \tan x \tan 2x \tan 3x$. [C. U. 1956]

34. $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \theta\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4} - \theta\right) = 4$. [C. U. 1949]

35. $\tan 2x + \tan 4x = 2 \tan 3x$.

36. $\tan \theta + \tan 2\theta = \tan 3\theta$. [C. U. B. Sc., 1926]

37. $\cos \theta - \sin 3\theta = \cos 2\theta$. [U. P. B. 1947]

38. $\tan \theta + \tan 2\theta + \sqrt{3} \tan \theta \tan 2\theta = \sqrt{3}$. [B. H. U. 1954]

39. $\sin \frac{n+1}{2}\theta = \sin \frac{n-1}{2}\theta + \sin \theta$. [U. P. B. 1953]

40. $\cos 3\theta + 3 \cos \theta = \frac{1}{2}$.

41. $4 \sin 4\theta + 1 = \sqrt{5}$. [C. U. B. Sc., 1935]

42. If $\sin A = \sin B$, $\cos A = \cos B$, prove that either A and B are equal or they differ by some multiple of four right angles. [C. U. 1935]

43. Solve : $\dfrac{\sin \alpha}{\sin 2x} + \dfrac{\cos \alpha}{\cos 2x} = 2$. [C. U. 1958]

Solve :

44. (i) $\cos \theta + \sqrt{3} \sin \theta = 2$, in $0 < \theta < 2\pi$. [C. U. 1936]

(ii) $\cos \theta - \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{2}}$, in the interval $-\pi < \theta < +\pi$. [C. U. 1952]

(iii) $\sin \theta + \sqrt{3} \cos \theta = \sqrt{2}$, in $0 < \theta < 2\pi$. [C. U. 1938]

45. $\sin 3A + \sin 2A + \sin A = 0$, in $0 < A < 2\pi$. [Patna, 1944]

46. $\cot \theta - \tan \theta = 2$, in $0 < \theta < 2\pi$. [C. U. 1937]

47. $\sin 4\theta = \cos 3\theta + \sin 2\theta$, in $0 < \theta < \pi$. [C. U. 1951]

48. $4 \sin \theta \cos \theta = 1 - 2 \sin \theta + 2 \cos \theta$, in $0 < \theta < \pi$. [C. U. 1950]

49. $\sin (\theta + \phi) = \frac{1}{2}$ and $\cos (\theta - \phi) = \frac{1}{2}$.

50. Solve the equation (general solution is not required)

$$\left.\begin{array}{l}\tan x + \tan y = 2,\\ 2 \cos x \cos y = 1\end{array}\right\}$$ [C. U. 1955]

দ্বিতীয় অধ্যায়

বিপরীত-বৃত্তীয় অপেক্ষক

(Inverse Circular Functions)

2·1. অপেক্ষক ও বিপরীত অপেক্ষক।

যদি দুইটি বাস্তব চলরাশি x এবং y এরূপ সম্বন্ধযুক্ত হয় যে, কোন নির্দ্দিষ্ট সীমার মধ্যে অবস্থিত x এর প্রত্যেকটি (বাস্তব) মানের জন্য y এর অনুরূপ একটিমাত্র নির্দ্দিষ্ট বাস্তব মান থাকে, তাহা হইলে y কে উক্ত নির্দ্দিষ্ট সীমার মধ্যে অবস্থিত x এর **অপেক্ষক** (function) বলে, এবং x কে বলা হয় মুক্ত বা নিরপেক্ষ (independent) চলরাশি এবং y কে বলা হয় **বদ্ধ** বা **অপেক্ষক** (dependent) চলরাশি। যেমন, x এর সকল বাস্তব মানের জন্য

$$y = 2x + 5 \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad (1)$$

x এর একটি অপেক্ষক।

(1) হইতে প্রাপ্ত $x = \frac{1}{2}(y - 5) \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad (2)$

y এর সকল বাস্তব মানের জন্য, y এর একটি অপেক্ষক।

দেখা যাইতেছে, একটির মুক্ত এবং বদ্ধ চলরাশির যথাক্রমে অপরটির বদ্ধ এবং মুক্ত চলরাশি এবং গাণিতিক প্রক্রিয়ায় একটি হইতে অপরটি পাওয়া যায়, সুতরাং, উহারা সমার্থ-জ্ঞাপক। এইরূপ সম্বন্ধ-যুক্ত দুইটি অপেক্ষকের একটিকে অপরটির **বিপরীত** (inverse) বলা হয়। $f(x)$, $\phi(x)$, $\psi(x)$, প্রভৃতি দ্বারা x এর অপেক্ষককে সূচিত করা হয়, এবং $y = f(x)$ হইলে, $f(x)$ এর বিপরীত অপেক্ষকটিকে $f^{-1}(y)$ দ্বারা সূচিত করা হয়।

2·2. বৃত্তীয় এবং বিপরীত-বৃত্তীয় অপেক্ষক ও তাহার অর্থ।

x এর কোণ-জ্ঞাপক সকল মানের জন্য,

$$y = \sin x \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad (3)$$

x এর এক অপেক্ষক।

ইহাকে এবং $\cos x$, $\tan x$ প্রভৃতি ত্রৈকোণমিতিক অনুপাত-প্রকাশক অপেক্ষক-সমূহকে **ত্রৈকোণমিতিক** (trigonometrical) বা **বৃত্তীয়** (circular) অপেক্ষক বলে।

এই অপেক্ষক-সমূহের বিপরীত অপেক্ষক-সমূহকে **বিপরীত-বৃত্তীয় অপেক্ষক** (inverse circular functions) বলে।

$y=f(x)$ দ্বারা সূচিত হইলে, $f(x)$ এর বিপরীত অপেক্ষককে $x=f^{-1}(y)$ দ্বারা সূচিত করা হয়।

এইরূপ, $y=\sin x$ হইলে, $\sin x$ এর বিপরীত অপেক্ষককে $x=\sin^{-1}y$ দ্বারা সূচিত করা হয় এবং ইহাকে 'সাইন ইন্‌ভার্স y' (sine inverse y)-রূপে পড়া হয়। $\sin^{-1}y$ কে 'arc sin y'-রূপেও লেখা হয়।

অতএব, $\sin^{-1}y$, $\cos^{-1}y$, ইত্যাদি বিপরীত-বৃত্তীয় অপেক্ষক।

তাহা হইলে, $y=\sin x$ হইলে, $x=\sin^{-1}y$,
$y=\cos x$ হইলে, $x=\cos^{-1}y$,
$y=\tan x$ হইলে, $x=\tan^{-1}y$,
$y=\sec x$ হইলে, $x=\sec^{-1}y$, ইত্যাদি।

এইরূপ, $\frac{1}{2}=\sin\frac{\pi}{6}$; $\therefore$ $\frac{\pi}{6}=\sin^{-1}\frac{1}{2}$,

$$\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{6};\quad \therefore\quad \frac{\pi}{6}=\cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2},$$

$$1=\tan\frac{\pi}{4};\quad \therefore\quad \frac{\pi}{4}=\tan^{-1}1$$ ইত্যাদি।

দেখা যাইতেছে, বিপরীত-বৃত্তীয় অপেক্ষকগুলি কোণ-প্রকাশক।

$\sin^{-1}\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}$, একটি কোণ যাহার sine $=\frac{1}{2}$.

$\cos^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{6}$, একটি কোণ যাহার cosine $=\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\tan^{-1}1=\frac{\pi}{4}$, একটি কোণ যাহার tangent $=1$, ইত্যাদি ;

এইরূপ, যে কোণের sine $=y$, তাহাকে $\sin^{-1}y$ দ্বারা, যে কোণের cosine $=y$, তাহাকে $\cos^{-1}y$ দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

তাহা হইলে, $\sin^{-1}\frac{1}{2}$ এর অর্থ হইল একটি কোণ যাহার sine $=\frac{1}{2}$; কিন্তু আমরা জানি, $\frac{\pi}{6}$ ই একমাত্র কোণ নয় যাহার sine $=\frac{1}{2}$; পরন্তু, n শূন্য বা যে-কোন

ধনাত্মক বা ঋণাত্মক পূর্ণ-সংখ্যক মানের জন্য $n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}$ অসংখ্য কোণ-সমূহের প্রত্যেকটি কোণের $\text{sine} = \frac{1}{2}$. অতএব, $\sin^{-1}\frac{1}{2} = n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}$.

এইরূপ, $\cos^{-1} \frac{\sqrt{3}}{2} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{6}$; $\tan^{-1} 1 = n\pi + \frac{\pi}{4}$, ইত্যাদি।

দেখা যাইতেছে, বিপরীত-বৃত্তীয় অপেক্ষক-সমূহ বহু-মানবিশিষ্ট (multiple-valued). এই অসংখ্য কোণ-প্রকাশক মানসমূহের মধ্যে যে কোণটির সাংখ্য-মান ক্ষুদ্রতম, ধনাত্মক হউক বা ঋণাত্মক হউক তাহাকে বিপরীত-বৃত্তীয় অপেক্ষকটির **মুখ্য মান** (principal value) বলে। যেমন,

$\sin^{-1}\frac{1}{2}$ এর মুখ্য মান $30°$, বা, $\frac{\pi}{6}$. একই সাংখ্যমান, কিন্তু বিপরীত চিহ্ন-বিশিষ্ট দুইটি কোণের একই ত্রৈকোণমিতিক অনুপাত থাকিলে, ধনাত্মক চিহ্ন-যুক্ত কোণটিকেই বিপরীত-বৃত্তীয় অপেক্ষকের মুখ্য মানরূপে ধরা হয়।

যেমন, $\cos^{-1} \frac{\sqrt{3}}{2}$ এর মুখ্য মান $30°$, $-30°$ নয়, যদিও $\cos(-30°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

অনেক সময়ে, মুখ্য মানগুলিকে বড় হাতের অক্ষর দ্বারা প্রকাশ করা হয়। যেমন,

$\sin^{-1}\frac{1}{2}$ এর মুখ্য মান $= \text{Sin}^{-1}\frac{1}{2} =$ কেবলমাত্র $\frac{\pi}{6}$;

$\cos^{-1} \frac{\sqrt{3}}{2}$ এর মুখ্য মান $= \text{Cos}^{-1} \frac{\sqrt{3}}{2} =$ কেবলমাত্র $\frac{\pi}{6}$;

$\tan^{-1} 1$ এর মুখ্য মান $= \text{Tan}^{-1} 1 =$ কেবলমাত্র $\frac{\pi}{4}$ ইত্যাদি।

$\therefore \sin^{-1} \frac{1}{2} = n\pi + (-)^n \text{Sin}^{-1} \frac{1}{2}$;

$\cos^{-1} \frac{\sqrt{3}}{2} = 2n\pi \pm \text{Cos}^{-1} \frac{\sqrt{3}}{2}$; ইত্যাদি।

কিন্তু, বিপরীত-বৃত্তীয় অপেক্ষক-সংবলিত প্রশ্নসমূহে অথবা উহাদের সমাধানে, মুখ্য মান-প্রকাশক এই সকল চিহ্ন ব্যবহার না করিয়া, $\sin^{-1}$, $\cos^{-1}$, $\tan^{-1}$ ইত্যাদি চিহ্ন দ্বারাই মুখ্য মান প্রকাশ করা হইয়াছে। এই সকল চিহ্নযুক্ত প্রশ্নে, উহাদের সাধারণ মান না ধরিয়া মুখ্য মান ধরিয়াই সমাধান করিতে হইবে।

দ্রষ্টব্য ঃ $\sin^{-1}x = (\sin x)^{-1}$ নয়, কেননা $(\sin x)^{-1} = \frac{1}{\sin x}$ মনে রাখিতে হইবে।

2·3. বিবিধ প্রয়োজনীয় তথ্য।

(1) $\sin\theta = x$ হইলে, $\sin^{-1}x = \theta$;

$\therefore \quad \sin^{-1}\sin\theta = \theta.$

এইরূপে, $\cos^{-1}\cos\theta = \theta$, $\tan^{-1}\tan\theta = \theta$, ইত্যাদি।

(2) $\sin\theta = x$ হইলে, $\theta = \sin^{-1}x$;

$\therefore \quad \sin\sin^{-1}x = x.$

এইরূপে, $\cos\cos^{-1}x = x$, $\tan\tan^{-1}x = x$, ইত্যাদি।

(3) To prove that

$$\operatorname{cosec}^{-1}x = \sin^{-1}\frac{1}{x}\,;\ \sec^{-1}x = \cos^{-1}\frac{1}{x}\,;\ \cot^{-1}x = \tan^{-1}\frac{1}{x}.$$

মনে কর, $\operatorname{cosec}^{-1}x = \theta$; $\therefore \ x = \operatorname{cosec}\theta$;

$$\therefore \quad \frac{1}{x} = \sin\theta\,; \quad \therefore \quad \sin^{-1}\frac{1}{x} = \theta = \operatorname{cosec}^{-1}x.$$

এইরূপে, প্রমাণ করা যায়, $\sec^{-1}x = \cos^{-1}\frac{1}{x}$ এবং $\cot^{-1}x = \tan^{-1}\frac{1}{x}$.

আবার, অনুরূপ প্রক্রিয়ায় প্রমাণ করা যায় যে,

$$\sin^{-1}x = \operatorname{cosec}^{-1}\frac{1}{x}\,;\ \cos^{-1}x = \sec^{-1}\frac{1}{x} \text{ এবং } \tan^{-1}x = \cot^{-1}\frac{1}{x}.$$

(4) বৃত্তীয় অপেক্ষককে যেরূপ একটিকে অপরটির সাহায্যে প্রকাশ করা যায়। যথা—

$$\sin\theta = \sqrt{1-\cos^2\theta} = \frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} = \frac{1}{\operatorname{cosec}\theta}$$
$$= \frac{\sqrt{\sec^2\theta-1}}{\sec\theta} = \frac{1}{\sqrt{1+\cot^2\theta}},$$

সেইরূপ, বিপরীত-বৃত্তীয় অপেক্ষকের যে-কোনটিকে অপর একটির সাহায্যে প্রকাশ করা যায়। যথা—

$$\sin\theta = x \text{ হইলে}, \ \cos\theta = \sqrt{1-x^2},\ \tan\theta = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$\operatorname{cosec}\theta=\frac{1}{x},\ \sec\theta=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\ \cot\theta=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

$$\therefore\quad \theta=\sin^{-1}x=\cos^{-1}\sqrt{1-x^2}=\tan^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=\operatorname{cosec}^{-1}\frac{1}{x}$$

$$=\sec^{-1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=\cot^{-1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}.$$

$\sin^{-1}x$, $\cos^{-1}\sqrt{1-x^2}$, প্রভৃতি বিপরীত-বৃত্তীয় অপেক্ষকসমূহের প্রত্যেকটি অসংখ্য মানবিশিষ্ট। উপরের ফল হইতে ধারণা হইতে পারে, অসংখ্য মানগুলি সব ক্ষেত্রেই এক, কিন্তু তাহা নহে। ঐ সকল বিপরীত-বৃত্তীয় অপেক্ষকগুলির মুখ্য মানগুলি কেবলমাত্র পরস্পর সমান।

(5) To prove that

(i) $\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\frac{\pi}{2}$;

(ii) $\tan^{-1}x+\cot^{-1}x=\frac{\pi}{2}$;

(iii) $\operatorname{cosec}^{-1}x+\sec^{-1}x=\frac{\pi}{2}$.

(i) মনে কর, $\sin^{-1}x=\theta$; ... (1)

তাহা হইলে, $x=\sin\theta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$;

$\therefore\quad \cos^{-1}x=\frac{\pi}{2}-\theta.$ ... (2)

(1) এবং (2) হইতে, $\sin^{-1}x+\cos^{-1}x=\theta+\frac{\pi}{2}-\theta=\frac{\pi}{2}$.

(ii) মনে কর, $\tan^{-1}x=\theta$; ... (3)

$\therefore\quad x=\tan\theta=\cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$;

$\therefore\quad \cot^{-1}x=\frac{\pi}{2}-\theta.$ ... (4)

(3) এবং (4) হইতে, $\tan^{-1}x+\cot^{-1}x=\theta+\frac{\pi}{2}-\theta=\frac{\pi}{2}$.

(iii) মনে কর, $\operatorname{cosec}^{-1}x=\theta$; ... (5)

$\therefore\quad x=\operatorname{cosec}\theta=\sec\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$;

$\therefore \quad \sec^{-1}x = \frac{\pi}{2} - \theta. \qquad \cdots \qquad (6)$

$\therefore$ (5) এবং (6) হইতে, $\operatorname{cosec}^{-1}x + \sec^{-1}x = \theta + \frac{\pi}{2} - \theta = \frac{\pi}{2}$.

দ্রষ্টব্য 1. এস্থলে, বিপরীত-বৃত্তীয় অপেক্ষকগুলির মুখ্য মান ধরা হইয়াছে।

দ্রষ্টব্য 2. x ধনাত্মক হইলেই কেবলমাত্র উপরের ফলগুলি সত্য হয়। x ঋণাত্মক হইলে, (i) এবং (iii) এর ফল দুইটি সত্য হয়; কিন্তু (ii) এর ফলটি x ঋণাত্মক হইলে,

$$\tan^{-1}x + \cot^{-1}x = -\frac{\pi}{2} \text{ হয়।}$$

(6) To prove that

(i) $\mathbf{\tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}}$;

(ii) $\mathbf{\tan^{-1}x - \tan^{-1}y = \tan^{-1}\frac{x-y}{1+xy}}$.

মনে কর, $\tan^{-1}x = \alpha$, এবং $\tan^{-1}y = \beta$;

তাহা হইলে, $x = \tan\alpha$ এবং $y = \tan\beta$.

(ii) এখন, $\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta}$

$$= \frac{x+y}{1-xy};$$

$$\therefore \quad \alpha + \beta = \tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy},$$

অর্থাৎ, $\tan^{-1}x + \tan^{-1}y = \tan^{-1}\frac{x+y}{1-xy}$.

(ii) এইরূপে, $\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta} = \frac{x-y}{1+xy}$;

$$\therefore \quad \alpha - \beta = \tan^{-1}\frac{x+y}{1+xy},$$

অর্থাৎ, $\tan^{-1}x - \tan^{-1}y = \tan^{-1}\frac{x-y}{1+xy}$.

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে,

(i) $\cot^{-1}x+\cot^{-1}y=\cot^{-1}\dfrac{xy-1}{y+x}$;

(ii) $\cot^{-1}x-\cot^{-1}y=\cot^{-1}\dfrac{xy+1}{y-x}$.

(7) To prove that

$$\tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z=\tan^{-1}\frac{x+y+z-xyz}{1-yz-zx-xy}.$$

মনে কর, $\tan^{-1}x=\alpha$, $\tan^{-1}y=\beta$, $\tan^{-1}z=\gamma$;

তাহা হইলে, $x=\tan\alpha$, $y=\tan\beta$, $z=\tan\gamma$.

$$\therefore\quad \tan(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma-\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma}{1-\tan\beta\tan\gamma-\tan\gamma\tan\alpha-\tan\alpha\tan\beta}$$

$$=\frac{x+y+z-xyz}{1-yz-zx-xy};$$

$$\therefore\quad \alpha+\beta+\gamma=\tan^{-1}\frac{x+y+z-xyz}{1-yz-zx-xy},$$

অর্থাৎ, $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z$

$$=\tan^{-1}\frac{x+y+z-xyz}{1-yz-zx-xy}.$$

(8) To prove that

(i) $\sin^{-1}x+\sin^{-1}y=\sin^{-1}\{x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\}$;

(ii) $\sin^{-1}x-\sin^{-1}y=\sin^{-1}\{x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2}\}$;

(iii) $\cos^{-1}x+\cos^{-1}y=\cos^{-1}\{xy-\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\}$;

(iv) $\cos^{-1}x-\cos^{-1}y=\cos^{-1}\{xy+\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\}$;

মনে কর, $\sin^{-1}x=\alpha$ এবং $\sin^{-1}y=\beta$;

তাহা হইলে, $x=\sin\alpha$ এবং $y=\sin\beta$.

$\therefore\quad \cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-x^2}$

এবং $\cos\beta=\sqrt{2-\sin^2\beta}=\sqrt{1-y^2}$.

(i) এখন, $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$$=x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\cdot$$

$\therefore \quad \alpha+\beta=\sin^{-1}\{x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\},$

অর্থাৎ, $\sin^{-1}x+\sin^{-1}y=\sin^{-1}\{x\sqrt{1-y^2}+y\sqrt{1-x^2}\}.$

(ii) আবার, $\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$$=x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2}\;;$$

$\therefore \quad \alpha-\beta=\sin^{-1}\{x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2}\},$

অর্থাৎ, $\sin^{-1}x-\sin^{-1}y=\sin^{-1}\{x\sqrt{1-y^2}-y\sqrt{1-x^2}\}.$

(iii) মনে কর, $\cos^{-1}x=\alpha$ এবং $\cos^{-1}y=\beta$;

তাহা হইলে, $x=\cos\alpha$ এবং $y=\cos\beta$;

$\therefore \quad \sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-x^2}$

এবং $\sin\beta=\sqrt{1-\cos^2\beta}=\sqrt{1-y^2}.$

এখন, $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$$=xy-\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\;;$$

$\therefore \quad \alpha+\beta=\cos^{-1}\{xy-\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\},$

অর্থাৎ, $\cos^{-1}x+\cos^{-1}y=\cos^{-1}\{xy-\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\}.$

(iv) আবার, $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$$=xy+\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\;;$$

$\therefore \quad \alpha-\beta=\cos^{-1}\{xy+\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\},$

অর্থাৎ, $\cos^{-1}x-\cos^{-1}y=\cos^{-1}\{xy+\sqrt{(1-x^2)(1-y^2)}\}.$

(9) To prove that

(i) $2\sin^{-1}x=\sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2})$;

(ii) $2\cos^{-1}x=\cos^{-1}(2x^2-1)$;

(iii) $2\tan^{-1}x=\tan^{-1}\dfrac{2x}{1-x^2}.$

(i) মনে কর, $\sin^{-1}x=\alpha$; তাহা হইলে, $x=\sin\alpha$;

$\therefore \quad \cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-x^2}.$

এখন, $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2x\sqrt{1-x^2}$;

$\therefore \quad 2\alpha=\sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2}),$

অর্থাৎ, $2\sin^{-1}x=\sin^{-1}(2x\sqrt{1-x^2}).$

(ii) মনে কর, $\cos^{-1}x=\alpha$; তাহা হইলে, $\cos\alpha=x.$

এখন, $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 = 2x^2 - 1$;

$\therefore$ $2a = \cos^{-1}(2x^2-1)$, অর্থাৎ, $2\cos^{-1}x = \cos^{-1}(2x^2-1)$.

(iii) মনে কর, $\tan^{-1}x = a$; তাহা হইলে, $\tan a = x$.

এখন, $\tan 2a = \dfrac{2\tan a}{1-\tan^2 a} = \dfrac{2x}{1-x^2}$;

$\therefore$ $2a = \tan^{-1}\dfrac{2x}{1-x^2}$, অর্থাৎ, $2\tan^{-1}x = \tan^{-1}\dfrac{2x}{1-x^2}$.

(10) To prove that

(i) $3\sin^{-1}x = \sin^{-1}(3x-4x^3)$;

(ii) $3\cos^{-1}x = \cos^{-1}(4x^3-3x)$;

(iii) $3\tan^{-1}x = \tan^{-1}\dfrac{3x-x^3}{1-3x^2}$.

(i) মনে কর, $\sin^{-1}x = a$; তাহা হইলে, $\sin a = x$.

এখন, $\sin 3a = 3\sin a - 4\sin^3 a = 3x - 4x^3$;

$\therefore$ $3a = \sin^{-1}(3x-4x^3)$, অর্থাৎ, $3\sin^{-1}x = \sin^{-1}(3x-4x^3)$.

(ii) মনে কর, $\cos^{-1}x = a$; তাহা হইলে, $\cos a = x$.

এখন, $\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a = 4x^3 - 3x$;

$\therefore$ $3a = \cos^{-1}(4x^3-3x)$,

অর্থাৎ, $3\cos^{-1}x = \cos^{-1}(4x^3-3x)$.

(ii) মনে কর, $\tan^{-1}x = a$; তাহা হইলে, $\tan a = x$.

এখন, $\tan 3a = \dfrac{3\tan a - \tan^3 a}{1-3\tan^2 a} = \dfrac{3x-x^3}{1-3x^2}$;

$\therefore$ $3a = \tan^{-1}\dfrac{3x-x^3}{1-3x^2}$, অর্থাৎ, $3\tan^{-1}x = \tan^{-1}\dfrac{3x-x^3}{1-3x^2}$.

(11) Show that

$$\mathbf{2\tan^{-1}x = \sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2} = \cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2} = \tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}}.$$

মনে কর, $\tan^{-1}x = \theta$; $\therefore$ $\tan\theta = x$.

এখন, $\sin 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1+\tan^2\theta} = \dfrac{2x}{1+x^2}$;

$$\therefore \quad 2\tan^{-1}x = 2\theta = \sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2}. \qquad \cdots \text{(i)}$$

আবার, $\cos 2\theta = \dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$;

$$\therefore \quad 2\tan^{-1}x = 2\theta = \cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2}, \qquad \cdots \text{(ii)}$$

আবার, $\tan 2\theta = \dfrac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} = \dfrac{2x}{1-x^2}$;

$$\therefore \quad 2\tan^{-1}x = 2\theta = \tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}. \qquad \cdots \text{(iii)}$$

(i), (ii) এবং (iii) হইতে,

$$2\tan^{-1}x = \sin^{-1}\frac{2x}{1+x^2} = \cos^{-1}\frac{1-x^2}{1+x^2} = \tan^{-1}\frac{2x}{1-x^2}.$$

2·4. বিবিধ উদাহরণ।

উদা. 1. Find the principal and the general values of $\cos^{-1}(-\frac{1}{2})$.

$\frac{1}{2} = \cos 60°$; $\therefore \quad -\frac{1}{2} = \cos(180° - 60°)$,

বা, $\cos(180° + 60°)$, অর্থাৎ, $\cos 120°$, বা, $\cos 240°$;

$\therefore$ 0 হইতে 360° এর মধ্যে 120° এবং 240° কোণ দুইটির cosine $-\frac{1}{2}$. $\cdots$ (1)

$\therefore$ 0 হইতে $-360°$ এর মধ্যে $-(360° - 120°)$ এবং $-(360° - 240°)$, অর্থাৎ, $-240°$ এবং $-120°$ কোণ দুইটির cosine $-\frac{1}{2}$. $\cdots$ (2)

(1) এবং (2) হইতে দেখা যাইতেছে, যে সকল কোণের cosine $-\frac{1}{2}$, তাহাদের মধ্যে ক্ষুদ্রতম সাংখ্যমান-বিশিষ্টটি হইতেছে 120° বা $\frac{2\pi}{3}$, একই সাংখ্যমান-বিশিষ্ট $-120°$ গ্রহণ না করিয়া।

$\therefore \quad \cos^{-1}\left(-\dfrac{1}{2}\right)$ এর মুখ্য মান $= \dfrac{2\pi}{3}$;

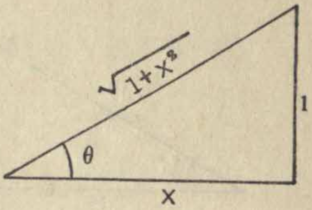
এবং সাধারণ মান $= 2n\pi \pm \dfrac{2\pi}{3}$,

এস্থলে, $n = 0$ অথবা যে-কোন ধনাত্মক বা ঋণাত্মক পূর্ণ সংখ্যা।

উদা. 2. Express $\cot^{-1}x$ in terms of other inverse circular functions.

মনে কর, $\cot^{-1}x=\theta$;

$\therefore\ \cot\theta=x$;



$\therefore$ পার্শ্ববর্তী চিত্রে, ভূমি $=x$,

বিপরীত বাহু $=1$

এবং অতিভুজ $=\sqrt{1+x^2}$.

$\therefore\quad \sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$; $\therefore\ \theta$, অর্থাৎ, $\cot^{-1}x=\sin^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

আবার, $\cos\theta=\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$; $\therefore\ \theta$, অর্থাৎ, $\cot^{-1}x=\cos^{-1}\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

এইরূপে, $\tan\theta=\dfrac{1}{x}$; $\therefore\ \theta$, অর্থাৎ, $\cot^{-1}x=\tan^{-1}\dfrac{1}{x}$;

$\operatorname{cosec}\theta=\sqrt{1+x^2}$; $\therefore\ \theta$, অর্থাৎ, $\cot^{-1}x=\operatorname{cosec}^{-1}\sqrt{1+x^2}$;

$\sec\theta=\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$; $\therefore\ \theta$, অর্থাৎ, $\cot^{-1}x=\sec^{-1}\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$.

উদা. 3. Show that $\cos^{-1}\frac{40}{41}=\tan^{-1}\frac{9}{40}$.

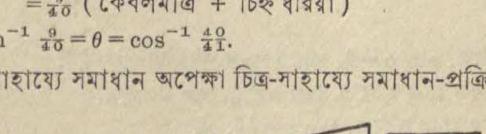
মনে কর, $\cos^{-1}\frac{40}{41}=\theta$; $\therefore\ \cos\theta=\frac{40}{41}$;

$\therefore\ \tan\theta=\sqrt{\sec^2\theta-1}=\sqrt{\dfrac{1}{\cos^2\theta}-1}=\sqrt{\left(\dfrac{41}{40}\right)^2-1}$

$=\frac{9}{40}$ (কেবলমাত্র + চিহ্ন ধরিয়া)

$\therefore\ \tan^{-1}\frac{9}{40}=\theta=\cos^{-1}\frac{40}{41}$.

সূত্রের সাহায্যে সমাধান অপেক্ষা চিত্র-সাহায্যে সমাধান-প্রক্রিয়াই প্রশস্ত।



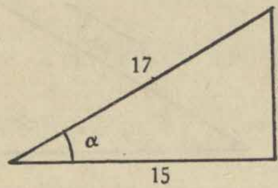
উপরস্থ চিত্র হইতে, স্পষ্টই, ভূমি $=40$, অতিভুজ $=41$;

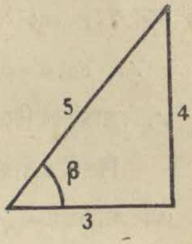
$\therefore$ বিপরীত বাহু $=\sqrt{41^2-40^2}=9$.

$\therefore\ \tan\theta=\frac{9}{40}$; $\therefore\ \theta$, অর্থাৎ, $\cos^{-1}\frac{40}{41}=\tan^{-1}\frac{9}{40}$.

উদা. 4. Show that $\sin^{-1}\frac{8}{17}+\cos^{-1}\frac{3}{5}=\cos^{-1}\frac{13}{85}$.

মনে কর, $\sin^{-1}\frac{8}{17}=\alpha$ এবং $\cos^{-1}\frac{3}{5}=\beta$,





তাহা হইলে, $\sin\alpha=\frac{8}{17}$ এবং $\cos\beta=\frac{3}{5}$;

$\therefore$ উপরস্থ চিত্র হইতে, $\cos\alpha=\frac{15}{17}$ এবং $\sin\beta=\frac{4}{5}$.

এখন, $\cos(\sin^{-1}\frac{8}{17}+\cos^{-1}\frac{3}{5})=\cos(\alpha+\beta)$

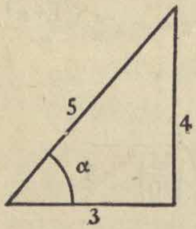
$=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta=\frac{15}{17}\cdot\frac{3}{5}-\frac{8}{17}\cdot\frac{4}{5}=\frac{13}{85}$;

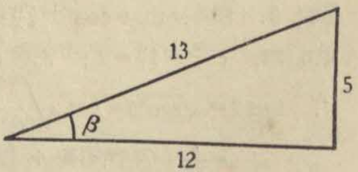
$\therefore\ \sin^{-1}\frac{8}{17}+\cos^{-1}\frac{3}{5}=\cos^{-1}\frac{13}{85}$.

উদা. 5. Prove that $\sin^{-1}\frac{4}{5}+\sin^{-1}\frac{5}{13}+\sin^{-1}\frac{16}{65}=\frac{\pi}{2}$.

[C. U. 1941]

মনে কর, $\sin^{-1}\frac{4}{5}=\alpha$, $\sin^{-1}\frac{5}{13}=\beta$ এবং $\sin^{-1}\frac{16}{65}=y$;

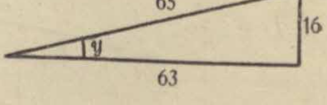




তাহা হইলে, $\sin\alpha=\frac{4}{5}$, $\sin\beta=\frac{5}{13}$ এবং $\sin y=\frac{16}{65}$.

$\therefore$ উপরস্থ চিত্র হইতে, $\tan\alpha=\frac{4}{3}$, $\tan\beta=\frac{5}{12}$,

এবং পার্শ্বস্থ চিত্র হইতে, $\tan y=\frac{16}{63}$.



$\therefore$ বামপক্ষ $=\alpha+\beta+y$

$=\tan^{-1}\frac{4}{3}+\tan^{-1}\frac{5}{12}+\tan^{-1}\frac{16}{63}$

$$=\tan^{-1}\frac{\frac{4}{3}+\frac{5}{12}}{1-\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{12}}+\tan^{-1}\frac{16}{63}$$

$$=\tan^{-1}\frac{63}{16}+\cot^{-1}\frac{63}{16}=\frac{\pi}{2}.$$ [*Art.* 2·3(5)]

উদা. 6. Prove that $\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{7}+\tan^{-1}\frac{1}{8}$

$$=\frac{\pi}{4}.$$ [C. U. 1952, '40, '42]

প্রথম ও দ্বিতীয় পদ একসঙ্গে এবং তৃতীয় ও চতুর্থ পদ একসঙ্গে লইয়া

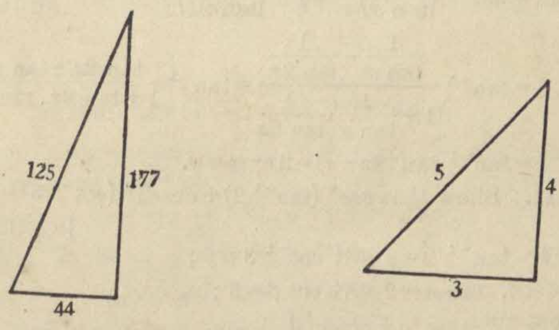
$$\text{বাম পক্ষ}=\tan^{-1}\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{3}.\frac{1}{5}}+\tan^{-1}\frac{\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{7}.\frac{1}{8}}$$

$$=\tan^{-1}\tfrac{4}{7}+\tan^{-1}\tfrac{3}{11}=\tan^{-1}\frac{\frac{4}{7}+\frac{3}{11}}{1-\frac{4}{7}.\frac{3}{11}}$$

$$=\tan^{-1}1=\frac{\pi}{4}.$$

উদা. 7. Prove that $2\tan^{-1}\frac{1}{7}+\sin^{-1}\frac{4}{5}=\cos^{-1}\frac{44}{125}$.

$$\tan(2\tan^{-1}\tfrac{1}{7})=\frac{2.\frac{1}{7}}{1-\frac{1}{49}}=\tfrac{7}{24};\quad \therefore\ 2\tan^{-1}\tfrac{1}{7}=\tan^{-1}\tfrac{7}{24}.$$



উপরস্থ চিত্র হইতে, $\sin^{-1}\frac{4}{5}=\tan^{-1}\frac{4}{3}$,

এবং $\cos^{-1}\frac{44}{125}=\tan^{-1}\frac{117}{44}$. $\cdots$ (1)

$$\therefore\ \text{বাম পক্ষ}=(\tan^{-1}\tfrac{7}{24}+\tan^{-1}\tfrac{4}{3})$$

$$=\tan^{-1}\frac{\frac{7}{24}+\frac{4}{3}}{1-\frac{7}{24}.\frac{4}{3}}$$

$$=\tan^{-1}\tfrac{117}{44}=\cos^{-1}\tfrac{44}{125}.$$ [(1) হইতে]

উদা. 8. Prove that $2\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{7}+2\tan^{-1}\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$.

বাম পক্ষ $=2(\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{8})+\tan^{-1}\frac{1}{7}$

$$= 2\tan^{-1}\frac{\frac{1}{5}+\frac{1}{8}}{1-\frac{1}{5}.\frac{1}{8}} + \tan^{-1}\tfrac{1}{7} = 2\tan^{-1}\tfrac{1}{3} + \tan^{-1}\tfrac{1}{7}$$

$$= \tan^{-1}\frac{2.\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{9}} + \tan^{-1}\tfrac{1}{7}$$

$$= \tan^{-1}\tfrac{3}{4} + \tan^{-1}\tfrac{1}{7} = \tan^{-1}\frac{\frac{3}{4}+\frac{1}{7}}{1-\frac{3}{4}.\frac{1}{7}} = \tan^{-1}1 = \frac{\pi}{4}.$$

উদা. 9. Prove that $\tan^{-1}x + \cot^{-1}(x+2) = \tan^{-2}\frac{1}{2}(x+1)^2$.

বাম পক্ষ $= \tan^{-1}x + \tan^{-1}\dfrac{1}{x+2}$

$$= \tan^{-1}\frac{x+\dfrac{1}{x+2}}{1-x\cdot\dfrac{1}{x+2}} = \tan^{-1}\tfrac{1}{2}(x+1)^2.$$ (সরল করিয়া)

উদা. 10. Prove that $\cot^{-1}(\tan x) - \cot^{-1}(\tan 2x) = x$.

বাম পক্ষ $= \tan^{-1}\left(\dfrac{1}{\tan x}\right) - \tan^{-1}\left(\dfrac{1}{\tan 2x}\right)$

$$= \tan^{-1}\frac{\dfrac{1}{\tan x}-\dfrac{1}{\tan 2x}}{1+\dfrac{1}{\tan x}\cdot\dfrac{1}{\tan 2x}} = \tan^{-1}\frac{\tan 2x - \tan x}{1+\tan 2x.\tan x}$$

$$= \tan^{-1}\tan(2x-x) = 2x - x = x.$$

উদা. 11. Show that $\sec^2(\tan^{-1}2) + \text{cosec}^2(\cot^{-1}3) = 15$.

[C. U. 1956]

মনে কর, $\tan^{-1}2 = \alpha$ এবং $\cot^{-1}3 = \beta$;

তাহা হইলে, $\tan\alpha = 2$ এবং $\cot\beta = 3$;

$\therefore$ বাম পক্ষ $= \sec^2\alpha + \text{cosec}^2\beta$

$= 1 + \tan^2\alpha + 1 + \cot^2\beta$

$= 1 + 2^2 + 1 + 3^2 = 2 + 4 + 9 = 15.$

উদা. 12. Prove that $\tan^{-1}\dfrac{a-b}{1+ab} + \tan^{-1}\dfrac{b-c}{1+bc} + \tan^{-1}c$

$= \tan^{-1}a.$ [C. U. 1946, '55]

বাম পক্ষ $= (\tan^{-1}a - \tan^{-1}b) + (\tan^{-1}b - \tan^{-1}c) + \tan^{-1}c$

$= \tan^{-1}a.$

উদা. 13. Prove that $\cos\tan^{-1}\sin\cot^{-1}x = \left(\dfrac{x^2+1}{x^2+2}\right)^{\frac{1}{2}}$.

[A. U. 1947 ; U. P. B. 1950]

মনে কর, $\cot^{-1}x=\theta$; $\therefore$ $\cot\theta=x$;

$\therefore$ $\sin\cot^{-1}x=\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{1+\cot^2\theta}}=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

$\therefore$ $\tan^{-1}\sin\cot^{-1}x=\tan^{-1}\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}=\phi$, মনে কর ; $\cdots$ (1)

$\therefore$ $\tan\phi=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$; $\therefore$ $\cos\phi=\dfrac{1}{\sec\phi}=\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2\phi}}$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{1+x^2}}}=\frac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{2+x^2}}. \qquad \cdots \quad (2)$$

$\therefore$ (1) হইতে, বাম পক্ষ $=\cos\phi=\dfrac{\sqrt{1+x^2}}{\sqrt{2+x^2}}$ [(2) হইতে]

$$=\left(\frac{1+x^2}{2+x^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

উদা. 14. If $\tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z=\pi$, show that $x+y+z=xyz$. [C. U. 1954]

প্রদত্ত শর্ত হইতে,

$\tan(\tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z)=\tan\pi$,

বা, $\dfrac{x+y+z-xyz}{1-yz-zx-xy}=0$;

$\therefore$ $x+y+z-xyz=0$, বা, $x+y+z=xyz$.

উদা. 15. Solve $\cos^{-1}x=2\sin^{-1}x$.

মনে কর, $\sin^{-1}x=\theta$; তাহা হইলে, $\sin\theta=x$. $\cdots$ (1)

এখন, $\cos^{-1}x=2\sin^{-1}x$;

$\therefore$ $x=\cos(2\sin^{-1}x)=\cos 2\theta$

$=1-2\sin^2\theta=1-2x^2$. [(1) হইতে]

বা, $2x^2+x-1=0$;

$\therefore$ $x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+4.2.1}}{2\cdot 2}=\dfrac{-1\pm 3}{4}=\frac{1}{2},\ -1$.

কিন্তু $x=-1$ দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয় না ; কারণ $\cos^{-1}(-1)=\pi$

এবং $2\sin^{-1}(-1)=2\times\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)=-\pi$.

$\therefore$ -1 একটি অবান্তর বীজ ; উহাকে বর্জ্জন করিয়া, $x=\frac{1}{2}$.

উদা. 16. Solve $\tan^{-1} 3x + \tan^{-1} \frac{4x}{7} = \frac{\pi}{4}$.

$$\tan^{-1} \frac{25x}{7-12x^2} = \frac{\pi}{4}\ ;\quad \therefore\ \frac{25x}{7-12x^2} = \tan\frac{\pi}{4} = 1,$$

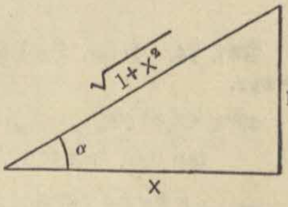
বা, $25x = 7 - 12x^2$, বা, $12x^2 + 25x - 7 = 0$,

$$\therefore\ x = \frac{-25 \pm \sqrt{625+336}}{24} = \frac{-25 \pm \sqrt{961}}{24} = \frac{-25 \pm 31}{24}$$

$$= \tfrac{1}{4}, -\tfrac{7}{3}.$$

কিন্তু $x = -\frac{7}{3}$ দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয় না ; কারণ $x = \frac{3}{7}$ বসাইলে, $\tan^{-1} 3x$ এবং $\tan^{-1} \frac{4x}{7}$ উভয়ের মুখ্য মানই ঋণাত্মক হয় এবং দুইটি ঋণাত্মক কোণের সমষ্টি কখনই দক্ষিণ-পক্ষস্থ $+ \frac{\pi}{4}$ এর সমান হইতে পারে না। অতএব, $x = -\frac{7}{3}$ বর্জ্জন করিয়া, $x = \frac{1}{4}$.

উদা. 17. Solve : $\cos \cot^{-1} x = \tan (\sin^{-1} \frac{1}{3})$.

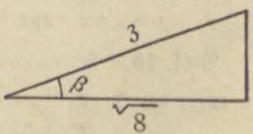


মনে কর, $\cot^{-1} x = \alpha$; $\therefore\ \cot \alpha = x$.

$\therefore$ বাম পক্ষ $= \cos \alpha = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

আবার মনে কর, $\sin^{-1} \frac{1}{3} = \beta$;

$\therefore\ \sin \beta = \frac{1}{3}$.



$\therefore$ দক্ষিণ পক্ষ $= \tan \beta = \frac{1}{\sqrt{8}}$.

$$\therefore\ \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{1}{\sqrt{8}}\ ; \qquad \cdots\ (1)$$

উভয় পক্ষ বর্গ করিয়া, $\frac{x^2}{1+x^2} = \frac{1}{8}$ বা $8x^2 = 1 + x^2$,

বা, $7x^2 = 1$; $\therefore\ x = \pm \frac{1}{\sqrt{7}}$.

কিন্তু $x = -\frac{1}{\sqrt{7}}$ দ্বারা (1) এবং সেইজন্য মূল সমীকরণটিও সিদ্ধ হয় না। ইহা অবান্তর বীজ ; ইহাকে বর্জ্জন করিয়া, নির্ণেয় সমাধান

$$x = \frac{1}{\sqrt{7}}.$$

প্রশ্নমালা 2

1. Find the principal and the general values of :

(i) $\sin^{-1}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; (ii) $\sin^{-1}(-\frac{1}{2})$; (iii) $\cos^{-1} 1$;

(iv) $\cos^{-1}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$; (v) $\tan^{-1}\sqrt{3}$; (vi) $\cot^{-1}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

2. Express in terms of other inverse circular functions :

(i) $\cos^{-1}x$; (ii) $\text{cosec}^{-1}x$; (iii) $\tan^{-1}x$.

3. Find the value of : (i) $\sin(\sin^{-1}\frac{1}{2}+\cos^{-1}\frac{1}{2})$; [C. U. 1917, '35]

(ii) $\cos(\tan^{-1} 3+\cot^{-1} 3)$.

Prove that

4. $\cos^{-1}\frac{15}{17}=\tan^{-1}\frac{8}{15}$.

5. (i) $2\tan^{-1}\frac{3}{5}=\tan^{-1}\frac{15}{8}$. (ii) $\cos^{-1}(-\frac{7}{25})=2\tan^{-1}\frac{4}{3}$.

6. $\text{cosec}(\cot^{-1}x)=\sqrt{1+x^2}$.

7. $\sin^{-1}\frac{3}{5}+\sin^{-1}\frac{8}{17}=\sin^{-1}\frac{77}{85}$. [B. H. U. 1948]

8. $\cos^{-1}\frac{24}{25}+\cos^{-1}\frac{3}{5}=\cos^{-1}\frac{44}{125}$.

9. $\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3}=\dfrac{\pi}{4}$.

10. $\tan^{-1} 7-\tan^{-1} 1=\tan^{-1}\frac{3}{4}$.

11. $\tan^{-1}\dfrac{1+x}{1-x}-\tan^{-1}x=\dfrac{\pi}{4}$.

12. $\sin^{-1}\frac{5}{13}+\cos^{-1}\frac{3}{5}=\cos^{-1}\frac{16}{65}$.

13. $\cos^{-1}\frac{12}{37}+\cos^{-1}\frac{3}{5}=\sin^{-1}\frac{153}{185}$.

14. (*a*) $2\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{1}{7}=\dfrac{\pi}{4}$. [C. U. 1937 ; B. H. U. 1945]

(*b*) $2\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{4}=\tan^{-1}\frac{32}{43}$.

[C. U. B.A. & B. Sc., 1951]

15. $\tan^{-1}\frac{4}{5}+\cos^{-1}\frac{4}{5}=\tan^{-1}\frac{31}{8}$.

16. $\cos^{-1}\frac{63}{65}+2\tan^{-1}\frac{1}{5}=\sin^{-1}\frac{3}{5}$.

17. $4(\cot^{-1} 3+\text{cosec}^{-1}\sqrt{5})=\pi$. [C. U. 1939]

18. $\tan^{-1}\frac{240}{161}=2\cos^{-1}\frac{15}{17}$.

19. (i) $\sin^{-1}\frac{4}{5}+2\tan^{-1}\frac{1}{3}=\frac{\pi}{2}\cdot$

(ii) $\sin^{-1}\frac{7}{25}+2\sin^{-1}\frac{3}{5}=\frac{\pi}{2}\cdot$

20. $\tan^{-1}\frac{1}{4}+\tan^{-1}\frac{2}{9}=\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{3}{5}$. [U. P. B. 1947]

21. $\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3}=\sin^{-1}\frac{1}{\sqrt{5}}+\cot^{-1}3=45^\circ$.

[B. H. U. 1952]

22. $\tan^{-1}\frac{1}{a+b}+\tan^{-1}\frac{b}{a^2+ab+1}=\tan^{-1}\frac{1}{a}\cdot$ [C. U. 1949]

23. $\sin^{-1}\frac{7}{25}+\sin^{-1}\frac{15}{17}+\sin^{-1}\frac{87}{425}=\frac{\pi}{2}\cdot$

24. $\tan^{-1}\frac{1}{3}+\tan^{-1}\frac{2}{11}+\tan^{-1}\frac{7}{24}=\frac{\pi}{4}\cdot$

25. $\tan^{-1}1+\tan^{-1}2+\tan^{-1}3=\pi$

$=2(\tan^{-1}1+\tan^{-1}\frac{1}{2}+\tan^{-1}\frac{1}{3})$.

26. $\cos^{-1}x=2\sin^{-1}\sqrt{\frac{1-x}{2}}=2\cos^{-1}\sqrt{\frac{1+x}{2}}$.

27. $\tan^{-1}\sqrt{x}=\frac{1}{2}\cos^{-1}\frac{1-x}{1+x}$. [C. U. 1943]

28. $\sin^{-1}\sqrt{\frac{a+x}{2a}}=\cos^{-1}\sqrt{\frac{a-x}{2a}}=\tan^{-1}\sqrt{\frac{a+x}{a-x}}$.

29. $\tan^{-1}\frac{a-b}{1+ab}+\tan^{-1}\frac{b-c}{1+bc}+\tan^{-1}\frac{c-a}{1+ca}$

$=\tan^{-1}\frac{a^2-b^2}{1+a^2b^2}+\tan^{-1}\frac{b^2-c^2}{1+b^2c^2}+\tan^{-1}\frac{c^2-a^2}{1+c^2a^2}$.

[P. U. 1931]

30. (a) $\cot^{-1}\frac{ab+1}{a-b}+\cot^{-1}\frac{bc+1}{b-c}+\cot^{-1}\frac{ca+1}{c-a}=0$.

(b) $\tan(\tan^{-1}x+\tan^{-1}y+\tan^{-1}z)$

$=\cot(\cot^{-1}x+\cot^{-1}y+\cot^{-1}z)$.

[C. U. B. A. & B. Sc., 1939]

31. $\{\sec(\cot^{-1}x)\}^2=\{\text{cosec}(\tan^{-1}x)\}^2$.

32. $\sec^2(\tan^{-1}3)+\text{cosec}^2(\cot^{-1}4)=27$.

33. $\sin\text{cosec}^{-1}\cot\tan^{-1}x=x$.

34. $\cos\tan^{-1}\sin\cot^{-1}\sqrt{\dfrac{2x^2-1}{1-x^2}}=x.$

35. $\tan^{-1}(\frac{1}{2}\tan 2A)+\tan^{-1}(\cot A)+\tan^{-1}(\cot^3 A)=0.$ [C. U. 1948]

36. If $\cos^{-1}x+\cos^{-1}y+\cos^{-1}z=\pi$, show that
$x^2+y^2+z^2+2xyz=1.$ [C. U. B. A. & B. Sc., 1941]

37. If $A+B+C=\pi$, show that if $A=\tan^{-1}2$, $B=\tan^{-1}3$,
then $C=\dfrac{\pi}{4}\cdot$ [C. U. 1951]

38. If $\sin^{-1}\alpha+\sin^{-1}\beta+\sin^{-1}\gamma=\pi$, show that
$\alpha\sqrt{1-\alpha^2}+\beta\sqrt{1-\beta^2}+\gamma\sqrt{1-\gamma^2}=2\alpha\beta\gamma.$ [B. H. U. 1944]

39. $\tan^{-1}x+\cot^{-1}(x+1)=\tan^{-1}(x^2+x+1).$

Solve the following equations :

40. (i) $\sin^{-1}x=\cos^{-1}x.$ (ii) $\tan^{-1}x=\cot^{-1}x.$

41. $\sin^{-1}\dfrac{5}{x}+\sin^{-1}\dfrac{12}{x}=\dfrac{\pi}{2}\cdot$ [C. U. 1914]

42. $\sin^{-1}\dfrac{x-1}{x-2}+\tan^{-1}\dfrac{x+1}{x+2}=\dfrac{\pi}{4}\cdot$ [C. U. B. A. & B. Sc., 1947]

43. $\tan^{-1}\dfrac{1}{1+2x}+\tan^{-1}\dfrac{1}{4x+1}=\tan^{-1}\dfrac{2}{x^2}\cdot$ [Agra, 1947]

44. $\sin^{-1}\dfrac{2a}{1+a^2}+\sin^{-1}\dfrac{2b}{1+b^2}=2\tan^{-1}x.$ [C. U. 1947]

45. $\tan^{-1}\frac{1}{4}+2\tan^{-1}\frac{1}{5}+\tan^{-1}\frac{1}{6}+\tan^{-1}\dfrac{1}{x}=\dfrac{\pi}{4}\cdot$ [C. U. 1949]

46. $3\tan^{-1}\dfrac{1}{2+\sqrt{3}}-\tan^{-1}\dfrac{1}{x}=\tan^{-1}\frac{1}{3}.$ [Agra, 1943]

47. Solve : $\left.\begin{array}{l}\sin^{-1}x+\sin^{-1}y=\frac{2}{3}\pi\\ \cos^{-1}x-\cos^{-1}y=\frac{1}{3}\pi\end{array}\right\}$ [C. U. B. A. & B. Sc., 1940]

48. $\tan^{-1}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1+x^2}+\sqrt{1-x^2}}=\beta.$

49. $\text{cosec}^{-1}x=\text{cosec}^{-1}a+\text{cosec}^{-1}b.$

50. If $\cos^{-1}\dfrac{x}{a}+\cos^{-1}\dfrac{y}{b}=\alpha$, show that

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{2xy}{ab}\cos\alpha+\frac{y^2}{b^2}=\sin^2\alpha.$$

তৃতীয় অধ্যায়

ত্রিভুজের গুণাবলী

(Properties of Triangles)

3·1. প্রত্যেক ত্রিভুজের তিনটি বাহু ও তিনটি কোণ, এই ছয়টি অঙ্গ থাকে। বাহু অনুসারে ত্রিভুজসমূহকে বিষমবাহু, সমদ্বিবাহু ও সমবাহু, এই তিন শ্রেণীতে ভাগ করা যায়, আর কোণ অনুসারে উহাদিগকে সূক্ষ্মকোণী, স্থূলকোণী ও সমকোণী এই তিন শ্রেণীতে ভাগ করা যায়।

ত্রিভুজের কোণ তিনটিকে সাধারণতঃ A, B ও C দ্বারা, ঐ সকল কোণের বিপরীত বাহুগুলিকে যথাক্রমে a, b ও c দ্বারা এবং ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলকে $\triangle$ বা S দ্বারা প্রকাশ করা হয়।

ঐ সকল বাহু, কোণ, ক্ষেত্রফল, ত্রিভুজের অন্তর্ব্যাসার্দ্ধ, পরিব্যাসার্দ্ধ ইত্যাদি সংশ্লিষ্ট, উহাদের পরস্পরের সম্বন্ধ-জ্ঞাপক সূত্রাবলী বর্তমান অধ্যায়ে আলোচনা করা হইবে।

3·2. যে-কোন ত্রিভুজে

$$\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{\sin A}}=\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{\sin B}}=\frac{\mathbf{c}}{\mathbf{\sin C}},$$

অর্থাৎ, বাহুগুলি স্ব স্ব বিপরীত কোণের sine এর সমানুপাতী।

[In any triangle, prove that

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C},$$

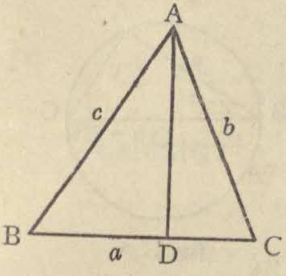
i.e., the sides are proportional to the sines of the opposite angles.]

মনে কর, ABC একটি ত্রিভুজ।

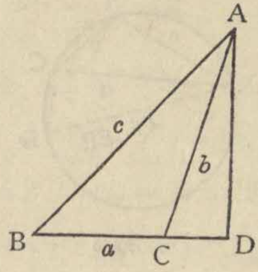
যে-কোন শীর্ষবিন্দু A হইতে বিপরীত বাহু BC এর উপর AD লম্ব টানা হইল; ইহা, চিত্র 1 এ সূক্ষ্মকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রে, BC এর মধ্যে অবস্থিত কোন বিন্দু D তে, চিত্র 2 এ স্থূলকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রে, বর্দ্ধিত BC কে কোন বিন্দু D তে ছেদ করিল এবং চিত্র 3 এ সমকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রে, AC লম্ব বলিয়া AC এর উপরই সমপাতিত হইল।

এখন, ABD ত্রিভুজে, $AD = AB \sin ABD = c \sin B,$ $\cdots$ (1)

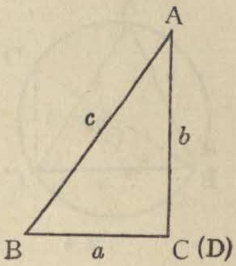
এবং ACD ত্রিভুজে, $AD = AC \sin ACD$;



চিত্র 1



চিত্র 2



চিত্র 3

এখন, চিত্র 1 এ, $AC \sin ACD = b \sin C$;

এবং চিত্র 2 এ, $AC \sin ACD = b \sin (\pi - C) = b \sin C$; $\cdots$ (2)

$\therefore \quad c \sin B = b \sin C$, অর্থাৎ $\dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$.

এইরূপে, B হইতে AC এর উপর লম্ব টানিয়া চিত্র 1 এবং 2 এ, প্রমাণ করা যায় যে, $$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C}.$$

$\therefore$ চিত্র 1 এবং 2 এ, অর্থাৎ, সূক্ষ্মকোণী এবং স্থূলকোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রে,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}.$$

চিত্র 3 এ, C একটি সমকোণ ;

$\therefore \quad \sin A = \dfrac{a}{c}$ এবং $\sin B = \dfrac{b}{c}$, এবং $\sin C = 1$;

$\therefore \quad \dfrac{a}{\sin A} = c = \dfrac{b}{\sin B}$, অর্থাৎ, $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = c = \dfrac{c}{\sin C}$.

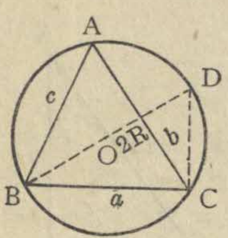
অতএব, যে-কোন ত্রিভুজে,

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C},$$

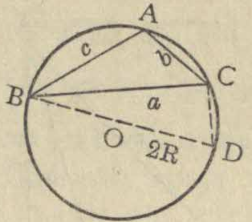
অর্থাৎ, ত্রিভুজের বাহুগুলি স্ব স্ব বিপরীত কোণের sine এর সমানুপাতী।

বিকল্প প্রমাণ :

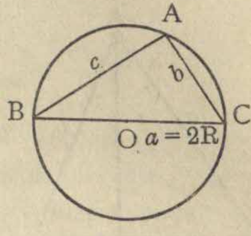
মনে কর, ABC ত্রিভুজের পরিকেন্দ্র O এবং পরিব্যাসার্দ্ধ R.



চিত্র 4



চিত্র 5



চিত্র 6

চিত্র 4 এ, ABC ত্রিভুজটি সূক্ষ্মকোণী ; ইহার সবগুলি কোণই সূক্ষ্মকোণ ; এবং চিত্র 5 এ, ABC ত্রিভুজটি স্থূলকোণী ; মনে কর, ইহার A কোণটি স্থূলকোণ।

চিত্র 4 এবং 5 এ BO যোগ করিয়া পরিধি পর্য্যন্ত বর্দ্ধিত কর ; ইহা পরিধিকে D বিন্দুতে ছেদ করিল। CD যোগ কর।

উভয় চিত্রেই BCD কোণটি অর্দ্ধবৃত্তস্থ বলিয়া সমকোণ, এবং $BD = 2R$.

চিত্র 4 এ, একই বৃত্তাংশ বলিয়া, $\angle A = \angle D$.

$$\therefore \quad \sin A = \sin D = \frac{BC}{BD} = \frac{a}{2R}, \text{ বা, } \frac{a}{\sin A} = 2R.$$

চিত্র 5 এ, $ABDC$ বৃত্তস্থ চতুর্ভুজ বলিয়া, $\angle A + \angle D = \pi$,

বা, $\angle A = \pi - \angle D$.

$$\therefore \quad \sin A = \sin (\pi - D) = \sin D = \frac{BC}{BD} = \frac{a}{2R}, \text{ বা, } \frac{a}{\sin A} = 2R.$$

চিত্র 6 এ, $\angle A$ সমকোণ ; $\therefore \quad \sin A = 1 = \dfrac{BC}{BC} = \dfrac{a}{a} = \dfrac{a}{2R}$,

$$\text{বা, } \frac{a}{\sin A} = 2R.$$

$\therefore$ যে-কোন ত্রিভুজে, $\dfrac{a}{\sin A} = 2R$.

এইরূপে, AO যোগ করিয়া E পর্য্যন্ত বর্দ্ধিত করিয়া প্রথমে CE এবং পরে BE যোগ করিলে দেখা যাইবে

$$\frac{b}{\sin B}=2R \text{ এবং } \frac{c}{\sin C}=2R.$$

$$\therefore \quad \frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R.$$

অনুসিদ্ধান্ত। $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R.$

(i) $\therefore\ a=2R\sin A,\ b=2R\sin B,\ c=2R\sin C$;

(ii) $\sin A=\dfrac{a}{2R},\ \sin B=\dfrac{b}{2R},\ \sin C=\dfrac{c}{2R}.$

(iii) $a:b:c=\sin A:\sin B:\sin C.$

3·3. ত্রিভুজের যে-কোন Cosine কে বাহু দ্বারা প্রকাশ।

প্রমাণ করিতে হইবে, যে-কোন ত্রিভুজে,

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A \text{ বা } \cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$$

$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B \text{ বা } \cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca},$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C \text{ বা } \cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

3·1 অনুচ্ছেদের ন্যায় তিনটি ত্রিভুজ অঙ্কন করিয়া, তিনটি ত্রিভুজের অঙ্কনগুলি সম্পাদন কর।

জ্যামিতি হইতে, চিত্র 1 এ, $AB^2=BC^2+CA^2-2BC.CD.$

এখন, ACD ত্রিভুজে, $CD=AC.\cos C=b\cos C.$

$$\therefore \quad c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.$$

চিত্র 2 এ, $AB^2=BC^2+CA^2+2BC.CD.$

এখন, ACD ত্রিভুজে, $CD=AC\cos(\pi-c)=-b\cos C.$

$$\therefore \quad c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.$$

চিত্র 3 এ, $AB^2=BC^2+CA^2$;

$$\therefore \quad c^2=a^2+b^2=a^2+b^2-2ab.0$$
$$=a^2+b^2-2ab\cos C. \quad [\because \cos C=\cos 90^\circ=0.]$$

অতএব সকল প্রকার ত্রিভুজের ক্ষেত্রেই,

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C,$$

অর্থাৎ, $\cos C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$

অনুরূপ প্রক্রিয়ায় অন্য দুইটি সূত্রও প্রমাণ করা যায়।

3·4. অনুচ্ছেদ 3·2 এর অনুসিদ্ধান্ত এবং 3·3 অনুচ্ছেদ হইতে দেখা যায়,

$$\tan A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\dfrac{a}{2R}}{\dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}} = \frac{abc}{R} \cdot \frac{1}{b^2 + c^2 - a^2}.$$

এইরূপে $\tan B = \dfrac{abc}{R} \cdot \dfrac{1}{c^2 + a^2 - b^2},$

এবং $\tan C = \dfrac{abc}{R} \cdot \dfrac{1}{a^2 + b^2 - c^2}.$

3·5. যে-কোন ত্রিভুজে, প্রমাণ করিতে হইবে,

$$\mathbf{a = b \cos C + c \cos B,}$$
$$\mathbf{b = c \cos A + a \cos C,}$$
$$\mathbf{c = a \cos B + b \cos A.}$$

অনু. 3·2 এর চিত্রগুলি হইতে দেখা যায় :

চিত্র 1 এ, C কোণটি সূক্ষ্মকোণ, এবং

$$BC = BD + CD = AB \cos ABD + AC \cos ACD\ ;$$

$$\therefore\ a = c \cos B + b \cos C\ ;$$

চিত্র 2 এ, C কোণটি স্থূলকোণ, এবং

$$BC = BD - CD = AB \cos ABD - AC \cos ACD,$$

$$\therefore\ a = c \cos B - b \cos (180^\circ - c)$$
$$= c \cos B - b\,(-\cos C) = c \cos B + b \cos C\ ;$$

চিত্র 3 এ, C কোণটি সমকোণ এবং

$$BC = AB \cos ABC = c \cos B$$

$a = c \cos B + b \cos C\ ;$ [কারণ $\cos C = \cos 90^\circ = 0.$]

অতএব, সর্ব্বক্ষেত্রেই $a = b \cos C + c \cos B.$

অনুরূপ প্রণালীতে অপর সূত্র দুইটিও প্রমাণ করা যায়।

3·6. ত্রিভুজের অর্দ্ধকোণসমূহের Sine কে উহার বাহু তিনটির দৈর্ঘ্য দ্বারা প্রকাশ।

(*To express the sines of half angle of a triangle in terms of the sides.*)

আমরা জানি, $\cos A = 1 - 2\sin^2\frac{A}{2}$,

$$\therefore\quad 2\sin^2\frac{A}{2} = 1 - \cos A = 1 - \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$= \frac{2bc - b^2 - c^2 + a^2}{2bc} = \frac{a^2 - (b^2 - 2bc + c^2)}{2bc}$$

$$= \frac{a^2 - (b-c)^2}{2bc} = \frac{(a-b+c)(a+b-c)}{2bc} \quad \cdots \quad (1)$$

এখন যদি ত্রিভুজের পরিসীমাকে $2s$ দ্বারা সূচিত করা হয়, তাহা হইলে $2s = a + b + c$ এবং $s = \frac{a+b+c}{2}$.

$$\therefore\quad a - b + c = a + b + c - 2b = 2s - 2b = 2(s-b),$$

$$a + b - c = a + b + c - 2c = 2s - 2c = 2(s-c).$$

$\therefore$ (1) হইতে, $2\sin^2\frac{A}{2} = \frac{2(s-b).2(s-c)}{2bc}$;

$$\therefore\quad \sin^2\frac{A}{2} = \frac{(s-b)(s-c)}{bc};$$

$$\therefore\quad \mathbf{\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}};$$

বর্গমূলের ধনাত্মক মানটি মাত্র এস্থলে গ্রহণ করিতে হইবে ; কারণ, ত্রিভুজের কোণ বলিয়া $A < 180°$ এবং সেইজন্য $\frac{A}{2} < 90°$, অতএব $\sin\frac{A}{2}$ এর মান সর্ব্বদাই ধনাত্মক।

অনুরূপ প্রণালীতে প্রমাণ করা যায় যে,

$$\mathbf{\sin\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}},\quad \sin\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}}.$$

3·7. ত্রিভুজের অর্দ্ধকোণসমূহের Cosine কে উহার তিন বাহুর দৈর্ঘ্য দ্বারা প্রকাশ।

(*To express the cosines of half angles of a triangle in terms of the sides.*)

আমরা জানি, $\cos A = 2\cos^2\frac{A}{2} - 1$;

$$\therefore \quad 2\cos^2\frac{A}{2} = 1 + \cos A = 1 + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$= \frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{(b^2+2bc+c^2)-a^2}{2bc}$$

$$= \frac{(b+c)^2-a^2}{2bc} = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}$$

$$= \frac{2s(2s-2a)}{2bc} \left[\, a+b+c \text{ এর পরিবর্ত্তে } 2s \text{ ধরিয়া ; } \right]$$

$$= \frac{4s(s-a)}{2bc} = \frac{2s(s-a)}{bc};$$

$$\therefore \quad \cos^2\frac{A}{2} = \frac{s(s-a)}{bc}; \quad \therefore \quad \mathbf{\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}};$$

বর্গমূলের ধনাত্মক মূলটি মাত্র এস্থলে গ্রহণ করা হইয়াছে ; কারণ, ত্রিভুজের কোণ বলিয়া, $A < 180°$ এবং সেইজন্য $\frac{A}{2} < 90°$, অতএব, $\cos\frac{A}{2}$ এর মান সর্ব্বদাই ধনাত্মক।

অনুরূপ প্রণালীতে প্রমাণ করা যায় যে,

$$\mathbf{\cos\frac{B}{2} = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}}, \quad \cos\frac{C}{2} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}}.$$

3·8. ত্রিভুজের অর্দ্ধকোণসমূহের Tangent কে উহার তিন বাহুর দৈর্ঘ্য দ্বারা প্রকাশ।

$$\tan\frac{A}{2} = \sin\frac{A}{2} \div \cos\frac{A}{2}$$

$$= \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}} \div \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}} \quad [\text{অনু. } 3·6 \text{ ও } 3·7]$$

$$= \mathbf{\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}}.$$

অনুরূপ প্রণালীতে প্রমাণ করা যায় যে,

$$\tan\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}} \text{ এবং } \tan\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}.$$

A, B, C ত্রিভুজের কোণ বলিয়া, উহাদের প্রত্যেকটি 180° অপেক্ষা ছোট এবং সেইজন্য $\frac{A}{2}, \frac{B}{2}, \frac{C}{2}$ এর প্রত্যেকটি 90° অপেক্ষা ছোট; সুতরাং $\tan\frac{A}{2}, \tan\frac{B}{2}, \tan\frac{C}{2}$ এর প্রত্যেকটি ধনাত্মক হইবে। উপরের সূত্র-সমূহে এইজন্যই বর্গমূলের কেবলমাত্র ধনাত্মক চিহ্ন গ্রহণ করা হইয়াছে।

3·9. ত্রিভুজের কোণের sine কে উহার বাহুগুলির দ্বারা প্রকাশ।

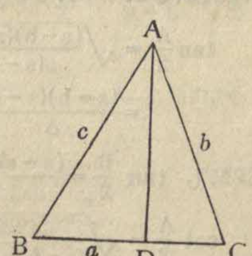
$$\sin A=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=2\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\cdot\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}};$$

$$\therefore\quad \sin A=\frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

এইরূপে, $\sin B=\frac{2}{ca}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$

$$\sin C=\frac{2}{ab}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

3·10. ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল (Area of a triangle)।



ABC ত্রিভুজের যে কোন শীর্ষ A বিন্দু হইতে বিপরীত বাহু BC এর উপর AD লম্ব টান।

ACD ত্রিভুজ হইতে, $AD=AC\sin C=b\sin C.$

$\therefore$ ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলকে $\triangle$ দ্বারা সূচিত করিলে,

$$\triangle=\tfrac{1}{2}\times \text{ভূমি}\times\text{উচ্চতা}$$
$$=\tfrac{1}{2}BC.AD=\tfrac{1}{2}ab\sin C.$$

এইরূপে, B ও C হইতে বিপরীত বাহুর উপর লম্ব টানিয়া প্রমাণ করা যায় যে,

$$\triangle=\tfrac{1}{2}bc\sin A=\tfrac{1}{2}ca\sin B.$$

$$\therefore\quad \triangle=\tfrac{1}{2}ab\sin C=\tfrac{1}{2}bc\sin A=\tfrac{1}{2}ca\sin B, \qquad \cdots\ (1)$$

অর্থাৎ, **ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল** $=\frac{1}{2}\times$ **দুই বাহুর গুণফল** $\times$ **ঐ দুই বাহুর অন্তর্ভুক্ত কোণের sine।**

আবার, $\triangle=\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}bc.\frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ [অনু. 3·9]

$$=\sqrt{\mathbf{s(s-a)(s-b)(s-c)}} \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

$$=\sqrt{\tfrac{1}{2}(a+b+c).\tfrac{1}{2}(b+c-a).\tfrac{1}{2}(c+a-b).\tfrac{1}{2}(a+b-c)}$$

$$=\tfrac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(c+a-b)(a+b-c)}$$

$$=\tfrac{1}{4}\sqrt{\mathbf{2b^2c^2+2c^2a^2+2a^2b^2-a^4-b^4-c^4}} \quad \cdots \quad (3)$$

আবার, R পরিব্যাসার্দ্ধ হইলে,

$$\triangle=\tfrac{1}{2}bc\sin A=\tfrac{1}{2}bc\cdot\frac{a}{2R} \quad [\text{ অনু. } 3\cdot2\ ]$$

$$=\frac{abc}{4R}. \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (4)$$

দ্রষ্টব্য : ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল সূচিত করিবার জন্য S অক্ষরটি ব্যবহৃত হয়।

অনুসিদ্ধান্ত 1. (1) হইতে, $\sin A=\frac{2\triangle}{bc}$, $\sin B=\frac{2\triangle}{ca}$, $\sin C=\frac{2\triangle}{ab}$;

এবং (4) হইতে, $R=\frac{abc}{4\triangle}$.

অনুসিদ্ধান্ত 2. অনু. 3·8 হইতে,

$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}.\frac{(s-b)(s-c)}{(s-b)(s-c)}}$$

$$=\frac{(s-b)(s-c)}{\triangle}.$$

অনুরূপে, $\tan\frac{B}{2}=\frac{(s-c)(s-a)}{\triangle}$, $\tan\frac{C}{2}=\frac{(s-a)(s-b)}{\triangle}$.

$$\cot\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s+a)}{(s-b)(s-c)}}=\sqrt{\frac{s(s-a).s(s-a)}{(s-b)(s-c).s(s-a)}}=\frac{s(s-a)}{\triangle},$$

এইরূপে, $\cot\frac{B}{2}=\frac{s(s-b)}{\triangle}$, $\cot\frac{C}{2}=\frac{s(s-c)}{\triangle}$.

3·11. প্রমাণ করিতে হইবে যে, যে-কোন ত্রিভুজে
(In any triangle, to prove that)

$$\tan\frac{B-C}{2}=\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}.$$

যে-কোন ত্রিভুজ ABC তে,

$$A+B+C=180^\circ \text{ বা } \frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}=90^\circ \quad \cdots \quad (1)$$

এবং $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$, $\therefore \dfrac{b}{c}=\dfrac{\sin B}{\sin C}$. $\quad \cdots \quad (2)$

(2) হইতে, $$\frac{b-c}{b+c}=\frac{\sin B-\sin C}{\sin B+\sin C}=\frac{2\cos\frac{B+C}{2}\cdot\sin\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{B+C}{2}\cdot\cos\frac{B-C}{2}}$$

$$=\cot\frac{B+C}{2}\cdot\tan\frac{B-C}{2} \quad \cdots \quad \cdots \quad (3)$$

$$=\cot\left(90^\circ-\frac{A}{2}\right)\cdot\tan\frac{B-C}{2} \quad [\text{ (1) হইতে }]$$

$$=\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B-C}{2};$$

$$\therefore \quad \mathbf{\tan\frac{B-C}{2}}=\frac{b-c}{b+c}\cdot\frac{1}{\tan\frac{A}{2}}=\mathbf{\frac{b-c}{b+c}\cot\frac{A}{2}}.$$

অনুরূপভাবে প্রমাণ করা যায় যে,

$$\mathbf{\tan\frac{C-A}{2}=\frac{c-a}{c+a}\cot\frac{B}{2};\ \tan\frac{A-B}{2}=\frac{a-b}{a+b}\cot\frac{C}{2}}.$$

অনুসিদ্ধান্ত। (3) হইতে, স্পষ্টই, $\dfrac{b-c}{b+c}=\dfrac{\tan\frac{B-C}{2}}{\tan\frac{B+C}{2}}$; এইরূপে,

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{\tan\frac{A-B}{2}}{\tan\frac{A+B}{2}} \text{ এবং } \frac{c-a}{c+a}=\frac{\tan\frac{C-A}{2}}{\tan\frac{C+A}{2}}.$$

উদা. 1. If $a=4\sqrt{3}$, $b=12$, $A=30^\circ$, find C the radius of the circle circumscribing the $\triangle ABC$.

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}; \quad \therefore \sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{12.\sin 30^\circ}{4\sqrt{3}}$$

$$=\frac{12.1}{4\sqrt{3}.2}=\frac{\sqrt{3}}{2};$$

$\therefore\ B = 60^\circ$ বা 120°.

$\therefore\ B = 60^\circ$ হইলে, $C = 180^\circ - (A+B) = 180^\circ - (30^\circ + 60^\circ) = \mathbf{90^\circ}$;

$B = 120^\circ$ হইলে, $C = 180^\circ - (A+B) = 180^\circ - (30^\circ + 120^\circ) = \mathbf{30^\circ}$.

$$2R = \frac{a}{\sin A}; \quad \therefore \quad R = \frac{a}{2\sin A} = \frac{4\sqrt{3}}{2.\frac{1}{2}} = \mathbf{4\sqrt{3}}.$$

উদা. 2. In a triangle, $a = 7$, $b = 5$, $c = 8$, find A.

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{5^2 + 8^2 - 7^2}{2.5.8} = \frac{40}{80} = \frac{1}{2};$$

$\therefore\ \mathbf{A = 60^\circ}$.

উদা. 3. In a triangle, $a = 8$, $b = 10$ and $c = 14$, find $\tan\frac{A}{2}$.

এস্থলে, $s = \frac{a+b+c}{2} = \frac{8+10+14}{2} = 16$;

$\therefore\ s - a = 16 - 8 = 8,\ s - b = 16 - 10 = 6,\ s - c = 16 - 14 = 2.$

$$\therefore\ \tan\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}} = \sqrt{\frac{6.2}{16.8}} = \sqrt{\frac{6}{64}} = \mathbf{\frac{\sqrt{6}}{8}}.$$

উদা. 4. If in a triangle,

$$a^4 + b^4 + c^4 = b^2c^2 + 2a^2(b^2 + c^2), \text{ find } A.$$

$$a^4 + b^4 + c^4 + b^2c^2 + 2a^2(b^2 + c^2) = b^2c^2 + 2a^2b^2 + 2a^2c^2,$$

বা, $a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2 + 2b^2c^2 = 3b^2c^2$,

বা, $\frac{(b^2 + c^2 - a^2)^2}{4b^2c^2} = \frac{3}{4}$, (উভয় পক্ষকে $4b^2c^2$ দ্বারা ভাগ করিয়া)

বা, $\left(\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$; $\quad \therefore\ \cos^2 A = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$;

$\therefore\ \cos A = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$; $\qquad \therefore\ A = \mathbf{30^\circ, 150^\circ}$.

উদা. 5. Show that in any triangle ABC,

$$a(\sin B - \sin C) + b(\sin C - \sin A) + c(\sin A - \sin B) = 0.$$

বাম পক্ষ $= (a \sin B - b \sin A) + (b \sin C - c \sin B)$

$\qquad + (c \sin A - a \sin C)$

$= 0 + 0 + 0$, [কারণ $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$;]

$\therefore\ a \sin B = b \sin A$, বা, $a \sin B - b \sin A = 0$, ইত্যাদি ।

$= \mathbf{0}$.

উদা. 6. The sides of a triangle are x^2+x+1, $2x+1$ and x^2-1. Determine the value of the greatest angle. [C. U. 1910]

ত্রিভুজের বাহু ধনাত্মক ; $\therefore\ 2x+1>0$ বা $x>-\frac{1}{2}$; ... (1)

এবং x^2-1 ধনাত্মক হইবে, সুতরাং, x এর মান অবশ্যই 1 অপেক্ষা বৃহত্তর। ... ... (2)

(1) এবং (2) হইতে, $x>1$.

এখন, $x>1$ হইলে, স্পষ্টই $(x^2+x+1)-(2x+1)$, অর্থাৎ, $x^2-x>0$

এবং $(x^2+x+1)-(x^2-1)$, অর্থাৎ, $x+2>0$;

$\therefore\ x^2+x+1$ বৃহত্তম বাহু এবং ইহার বিপরীত কোণটিই বৃহত্তম কোণ।

এই কোণটি θ হইলে, $\cos\theta=\dfrac{(x^2-1)^2+(2x+1)^2-(x^2+x+1)^2}{2(x^2-1)(2x+1)}$

$$=\frac{-2x^3-x^2+2x+1}{2\,(2x^3+x^2-2x-1)}=-\frac{1}{2};$$

$$\therefore\ \theta=\mathbf{120^\circ}.$$

উদা. 7. In any triangle, prove that

$$a(b\cos C-c\cos B)=b^2-c^2.$$

বাম পক্ষ $=ab\cos C-ac\cos B$

$$=ab\cdot\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}-ac\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ac}$$

$$=\frac{a^2+b^2-c^2}{2}-\frac{c^2+a^2-b^2}{2}$$

$$=\tfrac{1}{2}(a^2+b^2-c^2-c^2-a^2+b^2)$$

$$=\tfrac{1}{2}(2b^2-2c^2)=b^2-c^2.$$

উদা. 8. In any triangle, prove that

$$(b+c)\sin\frac{A}{2}=a\cos\frac{B-C}{2}.$$

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R\ ;\ \therefore\ a=2R\sin A,$$

$$b=2R\sin B,\ c=2R\sin C.$$

$$\therefore \quad \frac{b+c}{a}=\frac{2R(\sin B+\sin C)}{2R\sin A}=\frac{\sin B+\sin C}{\sin A}$$

$$=\frac{2\sin\frac{B+C}{2}\cos\frac{B-C}{2}}{2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}$$

$$=\frac{\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}} \quad \left[\because\ A+B+C=180^\circ;\ \therefore\ \frac{A}{2}+\frac{B}{2}+\frac{C}{2}=90^\circ;\ \therefore\ \sin\frac{B+C}{2}=\sin\left(90^\circ-\frac{A}{2}\right)=\cos\frac{A}{2}\right]$$

$$=\frac{\cos\frac{B-C}{2}}{\sin\frac{A}{2}};$$

$\therefore\ (b+c)\sin\frac{A}{2}=a\cos\frac{B-C}{2}$. (বজ্রগুণন দ্বারা)

উদা. 9. In any triangle, prove that

$$(b-c)\cot\frac{A}{2}+(c-a)\cot\frac{B}{2}+(a-b)\cot\frac{C}{2}=0.$$

বাম পক্ষ $=(b-c)\frac{s(s-a)}{\triangle}+(c-a)\frac{s(s-b)}{\triangle}+(a-b)\frac{s(s-c)}{\triangle}$

$$=\frac{s}{\triangle}\{(b-c)(s-a)+(c-a)(s-b)+(a-b)(s-c)\}$$

$$=\frac{s}{\triangle}[s(b-c+c-a+a-b)-\{a(b-c)+b(c-a)+c(a-b)\}]$$

$$=\frac{s}{\triangle}\cdot 0=0.$$

উদা. 10. In any triangle, $\cos A=\frac{\sin B}{2\sin C}$, prove that the triangle is isosceles. [B. H. U. 1950]

$$\cos A=\frac{\sin B}{2\sin C},$$

বা, $2 \sin C \cos A = \sin B = \sin (A+C) \quad [\because \quad A+B+C=\pi]$

$= \sin A \cos C + \cos A \sin C,$

বা, $\sin C \cos A = \sin A \cos C,$

বা, $\sin C \cos A - \sin A \cos C = 0,$

বা, $\sin (C-A) = 0 ; \quad \therefore \quad C = A,$

অর্থাৎ, ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু।

উদা. 11. If the sides of a triangle are in A. P., show that $\cot \frac{A}{2}, \cot \frac{B}{2}, \cot \frac{C}{2}$ are also in A. P.

$\cot \frac{A}{2} = \frac{s(s-a)}{\Delta}, \cot \frac{B}{2} = \frac{s(s-b)}{\Delta}, \cot \frac{C}{2} = \frac{s(s-c)}{\Delta};$

$\therefore \quad \cot \frac{A}{2}, \cot \frac{B}{2}, \cot \frac{C}{2}$ সমান্তর-শ্রেণীতে থাকিবে,

যদি $\frac{s(s-a)}{\Delta}, \frac{s(s-b)}{\Delta}$ এবং $\frac{s(s-c)}{\Delta}$ একটি সমান্তর-শ্রেণীতে থাকে,

অর্থাৎ, যদি $\frac{s(s-a)}{\Delta} + \frac{s(s-c)}{\Delta} = \frac{2s(s-b)}{\Delta}$ হয়,

" " $s-a+s-c = 2(s-b)$ হয়,

" " $-a-c = -2b$ হয়,

" " $a+c = 2b$ হয়,

" " a, b, c সমান্তর-শ্রেণীতে থাকে।

উদা. 12. If the cosines of two angles of a triangle be proportional to the opposite sides, show that the triangle is isosceles.

[C. U. 1924]

প্রশ্নানুসারে, $\frac{\cos A}{\cos B} = \frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B};$

$\therefore \quad \sin A \cos B = \cos A \sin B,$

বা, $\sin A \cos B - \cos A \sin B = 0,$

বা, $\sin (A-B) = 0 ; \quad \therefore \quad A - B = 0, \quad$ বা, $A = B;$

$\therefore$ ত্রিভুজটি সমদ্বিবাহু।

প্রশ্নমালা 3

1. If $a=3$, $b=3\sqrt{3}$ and $A=30°$, find B.

2. If $a=20$, $b=10$, $C=60°$, find A, B, c.

3. The sides of a triangle are 340, 266 and 185; find the tangent of half the greatest angle.

4. The sides of a triangle are 3, 5, 7, find the sine of the greatest angle.

5. Find the area of the triangle, if
   (i) $a=12$, $b=35$, $c=37$;
   (ii) $a:b:c=2:3:4$ and $s=18$.

In any triangle, prove that

6. $a(\sin B-\sin C)+b(\sin C-\sin A)+c(\sin A-\sin B)=0$.

7. $(b+c)\cos A+(c+a)\cos B+(a+b)\cos C=a+b+c$.

8. $a\sin A-b\sin B=c\sin(A-B)$.

9. $a\sin\frac{B-C}{2}=(b-c)\cos\frac{A}{2}$.

10. $(b+c)\cos\frac{B+C}{2}=a\cos\frac{B-C}{2}$.

11. $a\sin(B-C)+b\sin(C-A)+c\sin(A-B)=0$.

12. $(b^2+c^2-a^2)\tan A=(c^2+a^2-b^2)\tan B$
$=(a^2+b^2-c^2)\tan C$.

13. $b\cos B+c\cos C=a\cos(B-C)$.

14. $a\cos A+b\cos B+c\cos C=4R\sin A\sin B\sin C$.

15. $a\cos(B-C)+b\cos(C-A)+c\cos(A-B)$
$=8R\sin A\sin B\sin C$.

16. $\frac{\sin(A-B)}{\sin(A+B)}=\frac{a^2-b^2}{c^2}$.

17. $\frac{c\sin(A-B)}{a^2-b^2}=\frac{a\sin(B-C)}{b^2-c^2}=\frac{b\sin(C-A)}{c^2-a^2}$.

18. $b\cos^2\dfrac{C}{2}+c\cos^2\dfrac{B}{2}=c\cos^2\dfrac{A}{2}+a\cos^2\dfrac{C}{2}$

$$=a\cos^2\frac{B}{2}+b\cos^2\frac{A}{2}.$$

19. $c^2=(a-b)^2\cos^2\dfrac{C}{2}+(a+b)^2\sin^2\dfrac{C}{2}.$

20. $(s-a)\tan\dfrac{A}{2}=(s-b)\tan\dfrac{B}{2}=(s-c)\tan\dfrac{C}{2}.$

21. $\dfrac{b-c}{a}\cos^2\dfrac{A}{2}+\dfrac{c-a}{b}\cos^2\dfrac{B}{2}+\dfrac{a-b}{c}\cos^2\dfrac{C}{2}=0.$

22. $\tan A=\dfrac{a\sin C}{b-a\cos C}.$

23. $(b^2-c^2)\cot A+(c^2-a^2)\cot B+(a^2-b^2)\cot C=0.$

24. $(b+c-a)\tan\dfrac{A}{2}=(c+a-b)\tan\dfrac{B}{2}=(a+b-c)\tan\dfrac{C}{2}.$

25. $a^2(\sin^2B-\sin^2C)+b^2(\sin^2C-\sin^2A)$
$+c^2(\sin^2A-\sin^2B)=0.$

26. $a^2(\cos^2B-\cos^2C)+b^2(\cos^2C-\cos^2A)$
$+c^2(\cos^2A-\cos^2B)=0.$

27. $\dfrac{a^2\sin(B-C)}{\sin A}+\dfrac{b^2\sin(C-A)}{\sin B}+\dfrac{c^2\sin(A-B)}{\sin C}=0.$

28. $\dfrac{b^2-c^2}{a^2}\sin 2A+\dfrac{c^2-a^2}{b^2}\sin 2B+\dfrac{a^2-b^2}{c^2}\sin 2C=0.$

[C. U. 1912]

29. $\dfrac{a^2\sin(B-C)}{\sin B+\sin C}+\dfrac{b^2\sin(C-A)}{\sin C+\sin A}+\dfrac{c^2\sin(A-B)}{\sin A+\sin B}=0.$

[B. H. U. 1945]

30. $a^3\cos(B-C)+b^3\cos(C-A)+c^3\cos(A-B)=3abc.$

[Pat. U. 1939]

31. $1 - \tan\frac{A}{2}\tan\frac{B}{2} = \frac{2c}{a+b+c}$.

32. $\tan\frac{A}{2}\tan\frac{B-C}{2} = \frac{b-c}{b+c}$.

33. $a^2 + b^2 - 2ab\cos\left(C + \frac{\pi}{3}\right) = b^2 + c^2 - 2bc\cos\left(A + \frac{\pi}{3}\right)$

$= c^2 + a^2 - 2ca\cos\left(B + \frac{\pi}{3}\right)$.

34. $\dfrac{c}{\cot\frac{A}{2} + \cot\frac{B}{2}} = \dfrac{ab\sin C}{a+b+c}$.

35. If $\cos B = \frac{\sin A}{2\sin C}$, show that the triangle is isosceles.

[B. H. U. 1944]

36. If in a triangle, $C = 60°$, prove that

$2a - b = 2c\cos B$. [B. H. U. 1949]

37. If the cosines of two angles of a triangle be inversely proportional to the opposite sides, show that the triangle is either isosceles or right-angled. [C. U. 1923]

38. If $(a^2 + b^2)\sin(A - B) = (a^2 - b^2)\sin(A + B)$, show that the triangle is either isosceles or right-angled.

39. Prove that, in any triangle, $\cot A$, $\cot B$, $\cot C$ are in A.P. if a^2, b^2, c^2 are in A.P. [A. U. 1943]

40. Prove that, if in any triangle, $\tan\frac{A}{2}$, $\tan\frac{B}{2}$, $\tan\frac{C}{2}$ are in A. P., $\cos A$, $\cos B$, $\cos C$, are also in A. P.

41. If $a = 2c$ and $A = 3C$, find the angles of the triangle.

42. If $a^4 + b^4 + c^4 = 2b^2(a^2 + c^2) - c^2a^2$, prove that $B = 60°$ or $120°$.

In any triangle, prove that

43. (i) $bc\cos^2\frac{A}{2} + ca\cos^2\frac{B}{2} + ab\cos^2\frac{C}{2} = s^2$;

(ii) $4\,\Delta = \dfrac{a^2+b^2+c^2}{\cot A+\cot B+\cot C}$;

(iii) $4\,\Delta = a^2\cot A + b^2\cot B + c^2\cot C$.

44. If $\dfrac{1}{a+c}+\dfrac{1}{b+c}=\dfrac{3}{a+b+c}$, show that $C=60°$.

45. The angles of a triangle are $\dfrac{\pi}{7}, \dfrac{2\pi}{7}, \dfrac{4\pi}{7}$, prove that

$bc=c^2-a^2,\ ca=b^2-a^2,\ ab=c^2-b^2$.

3·12. ত্রিভুজের পরিবৃত্তের ব্যাসার্দ্ধ।

(Radius of the circumscribing circle of a triangle)

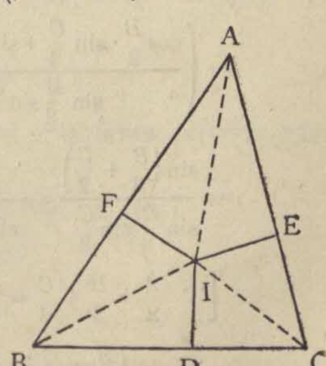
ABC ত্রিভুজের পরিবৃত্তের ব্যাসার্দ্ধ R হইলে, অনু. 3·2 হইতে দেখা যায়,

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R\,;$$

$$\therefore\quad R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{abc}{2bc\sin A}=\frac{abc}{4\,\Delta}.$$

3·13. ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্ত (In-circle)।

ত্রিভুজের অভ্যন্তরে সম্পূর্ণরূপে অবস্থিত এবং উহার বাহু তিনটিকে স্পর্শ করে এইরূপ বৃত্তকে ঐ ত্রিভুজের অন্তর্বৃত্ত বা অন্তর্লিখিত বৃত্ত (In-circle বা Inscribed circle) বলে। ত্রিভুজের যে-কোন দুই কোণের অন্তঃসমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের ছেদবিন্দু এই বৃত্তের কেন্দ্র। এই কেন্দ্রকে অন্তঃকেন্দ্র (In-centre) বলে এবং ইহাকে সাধারণতঃ I দ্বারা সূচিত করা হয়। স্পষ্টই এই কেন্দ্র হইতে ত্রিভুজটির যে-কোন বাহুর উপর অঙ্কিত লম্ব, ত্রিভুজটির অন্তর্ব্যাসার্দ্ধ। অন্তর্ব্যাসার্দ্ধকে r দ্বারা সূচিত করা হয়।



3·14. ত্রিভুজের অন্তঃব্যাসার্দ্ধ।

মনে কর, I এবং r যথাক্রমে ABC ত্রিভুজের অন্তঃকেন্দ্র এবং অন্তর্ব্যাসার্দ্ধ। I হইতে ID, IE, IF যথাক্রমে BC, CA ও AB এর উপর তিনটি লম্ব টানা হইল। AI, BI, CI যুক্ত কর।

তাহা হইলে, $ID = IE = IF = r.$

$$\triangle ABC = \triangle IBC + \triangle ICA + \triangle IAB$$
$$= \tfrac{1}{2}BC.ID + \tfrac{1}{2}CA.IE + \tfrac{1}{2}AB.IF$$
$$= \tfrac{1}{2}ar + \tfrac{1}{2}br + \tfrac{1}{2}cr$$
$$= \tfrac{1}{2}r\,(a+b+c) = rs.$$

$\therefore \quad \triangle = rs$;

$$\therefore \quad \mathbf{r} = \frac{\Delta}{\mathbf{s}} \ldots\ldots\ldots \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

আবার, IBD ত্রিভুজে, $BD = r \cot \dfrac{B}{2}$,

এবং ICD ত্রিভুজে, $DC = r \cot \dfrac{C}{2}$;

$$\therefore \quad a = BC = BD + DC$$
$$= r \cot \frac{B}{2} + r \cot \frac{C}{2}$$
$$= r\left(\cot \frac{B}{2} + \cot \frac{C}{2}\right)$$
$$= r\left(\frac{\cos \frac{B}{2}}{\sin \frac{B}{2}} + \frac{\cos \frac{C}{2}}{\sin \frac{C}{2}}\right)$$
$$= r\left(\frac{\cos \frac{B}{2} \cdot \sin \frac{C}{2} + \sin \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}}{\sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}\right)$$
$$= r\,\frac{\sin\left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2}\right)}{\sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}} = r\,\frac{\cos \frac{A}{2}}{\sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}},$$

$$\left[\because \; \frac{A}{2} + \frac{B}{2} + \frac{C}{2} = \frac{\pi}{2};\right.$$
$$\left.\therefore \; \sin\left(\frac{B}{2} + \frac{C}{2}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{A}{2}\right) = \cos \frac{A}{2}.\right]$$

$$\therefore \quad r = \frac{a \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}{\cos \frac{A}{2}} = a \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2} \sec \frac{A}{2}.$$

কিন্তু, $a = 2R \sin A = 4R \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2}$,

$$\therefore \quad \mathbf{r = 4R \sin \frac{A}{2} \sin \frac{B}{2} \sin \frac{C}{2}}. \quad \cdots \quad \cdots \quad \text{(ii)}$$

আবার, চিত্র হইতে,

$AF = AE$, $BD = BF$ এবং $CD = CE$;

কিন্তু, $(AF + BD + CD) + (AE + BF + CE)$

$= (AF + BF) + (BD + CD) + (AE + CE)$

$= AB + BC + CA = 2s.$

$$\therefore \quad AF + BD + CD = AE + BF + CE = \frac{2s}{2} = s,$$

বা, $AF + a = s$; $\therefore \quad AF = s - a$.

এইরূপে, $BF = s - b$ এবং $CE = s - c$.

এখন, AIF ত্রিভুজে, $IF = AF \tan IAF$,

$$\left.\begin{array}{ll} \text{বা,} & \mathbf{r = (s-a) \tan \frac{A}{2}}, \\ \text{এইরূপে,} & \mathbf{r = (s-b) \tan \frac{B}{2}}, \\ & \mathbf{r = (s-c) \tan \frac{C}{2}}. \end{array}\right\} \quad \cdots \quad \cdots \quad \text{(iii)}$$

3·15. অন্তঃকেন্দ্র হইতে কৌণিক বিন্দুসমূহের দূরত্ব।

IA, IB, IC অন্তঃকেন্দ্র হইতে কৌণিক বিন্দুত্রয়ের দূরত্ব।

$\triangle IAF$ হইতে, $IA = IF \operatorname{cosec} IAF$

$$= \mathbf{r \operatorname{cosec} \frac{A}{2}}.$$

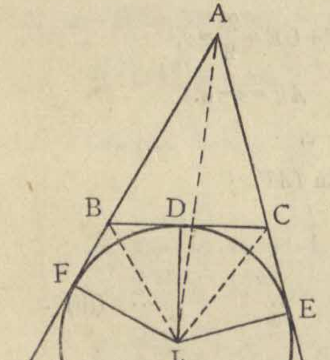
অনুরূপে, $\mathbf{IB = r \operatorname{cosec} \frac{B}{2}}$, $\mathbf{IC = r \operatorname{cosec} \frac{C}{2}}$.

3·16. বহির্বৃত্ত (Ex-circle)।

ত্রিভুজের যে-কোন এক বাহুকে এবং বর্দ্ধিত অপর দুই বাহুকে যে বৃত্ত স্পর্শ করে, সেই বৃত্তকে ঐ ত্রিভুজের **বহির্বৃত্ত** (Ex-circle বা Escribed circle) বলে। স্পষ্টই প্রত্যেক ত্রিভুজের তিনটি বহির্বৃত্ত থাকে। ত্রিভুজের যে-কোন এক কোণের অন্তঃসমদ্বিখণ্ডক এবং অপর কোণদ্বয়ের যে-কোন একটির বহিঃসমদ্বিখণ্ডকের ছেদবিন্দু অথবা যে-কোন দুই কোণের বহিঃসমদ্বিখণ্ডকদ্বয়ের ছেদবিন্দু বহির্বৃত্তের কেন্দ্র (ex-centre), বা, বহিঃকেন্দ্র এবং বহিঃকেন্দ্র হইতে ত্রিভুজের বাহুসমূহের উপর পতিত লম্বই বহির্ব্যাসার্দ্ধ (ex-radius).

3·17. বহির্ব্যাসার্দ্ধসমূহ নির্ণয়।

(*To find the ex-radii of a triangle.*)



মনে কর, ABC ত্রিভুজের BC বাহুকে এবং বর্দ্ধিত AB ও AC বাহুকে যে বহির্বৃত্তটি স্পর্শ করিয়াছে তাহার, অর্থাৎ A কোণের বিপরীত বহির্বৃত্তটির কেন্দ্র I_1 এবং ব্যাসার্দ্ধ r. I_1 হইতে BC এর উপর এবং বর্দ্ধিত AC ও AB এর উপর যথাক্রমে I_1D, I_1E, I_1F লম্ব অঙ্কিত কর।

এখন, $I_1D=I_1E=I_1F=r_1$. AI_1, BI_1 এবং CB_1 যুক্ত কর।

$$\triangle ABC=\triangle I_1AB+\triangle I_1AC-\triangle I_1BC$$

$$=\tfrac{1}{2}AB.I_1F+\tfrac{1}{2}AC.I_1E-\tfrac{1}{2}BC.I_1D$$

$$=\tfrac{1}{2}cr_1+\tfrac{1}{2}br_1-\tfrac{1}{2}ar_1$$

$$=\tfrac{1}{2}(b+c-a)r_1=\tfrac{1}{2}(b+c+a-2a)r_1$$

$$=\tfrac{1}{2}(2s-2a)r_1=(s-a)r_1.$$

$$\therefore\quad \mathbf{r_1=\frac{\Delta}{s-a}}.$$

এইরূপে, r_2, r_3 যথাক্রমে B এবং C কোণের বিপরীত বহির্বৃত্তদ্বয়ের ব্যাসার্দ্ধ হইলে,

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{r_2} = \frac{\Delta}{\mathbf{s-b}} \text{ এবং } \mathbf{r_3} = \frac{\Delta}{\mathbf{s-c}}. \\ &\text{আবার, } I_1BD \text{ ত্রিভুজে, } \angle I_1BD = \tfrac{1}{2}\angle DBF \\ &\qquad = \tfrac{1}{2}(180° - \angle B) = 90° - \tfrac{1}{2}\angle B. \end{aligned}\right\} \quad \cdots \quad (1)$$

$$\therefore \quad BD = I_1D \cot I_1BD = I_1D \cot(90° - \tfrac{1}{2}\angle B) = I_1D \tan\frac{B}{2}$$

$$= r_1 \tan\frac{B}{2}.$$

এইরূপে, I_1CD ত্রিভুজে, $CD = I_1D \tan\dfrac{C}{2} = r_1 \tan\dfrac{C}{2}$.

$$\therefore \quad a = BC = BD + CD = r_1 \tan\frac{B}{2} + r_1 \tan\frac{C}{2}$$

$$= r_1\left(\tan\frac{B}{2} + \tan\frac{C}{2}\right)$$

$$= r_1\left(\frac{\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{B}{2}} + \frac{\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{C}{2}}\right)$$

$$= r_1\left(\frac{\sin\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2} + \cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}\right)$$

$$= r_1 \frac{\sin\left(\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C\right)}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

$$= r_1 \frac{\cos\frac{1}{2}A}{\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}$$

$$\left[\because \sin\left(\frac{1}{2}B + \frac{1}{2}C\right) = \sin\left(90° - \frac{A}{2}\right) = \cos\frac{A}{2}\right]$$

$\therefore \quad r_1 = a \cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\sec\frac{A}{2}$,

ইহাতে $a = 2R\sin A = 4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$ বসাইয়া,

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{r_1} &= \mathbf{4R \sin\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}};\\ \text{এইরূপে,}\quad \mathbf{r_2} &= \mathbf{4R \sin\frac{B}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{C}{2}};\\ \text{এবং}\quad \mathbf{r_3} &= \mathbf{4R \sin\frac{C}{2}\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}}. \end{aligned}\right\} \quad \cdots \quad (2)$$

আবার, $AE = AC + CE = b + CD$, $[\because CE = CD]$

এবং $AF = AB + BF = c + BD$; $[\because BF = BD]$

কিন্তু $AE = AF$;

$\therefore$ যোগ করিয়া, $2AE = b + c + CD + BD = b + c + BC$

$= b + c + a = 2s$;

$\therefore \quad CE = s.$

এখন, AI_1E ত্রিভুজে, $I_1E = AE \tan I_1AE$;

$$\left.\begin{aligned} \therefore\quad \mathbf{r_1} &= \mathbf{s\tan\frac{A}{2}},\\ \text{এইরূপে,}\quad \mathbf{r_2} &= \mathbf{s\tan\frac{B}{2}},\\ \text{এবং}\quad \mathbf{r_3} &= \mathbf{s\tan\frac{C}{2}}. \end{aligned}\right\} \quad \cdots \quad \cdots \quad (3)$$

3·18. বহিঃকেন্দ্র হইতে কৌণিক বিন্দুসমূহের দূরত্ব।

I_1A, I_1B, I_1C বহিঃকেন্দ্র I_1 হইতে কৌণিক বিন্দুসমূহের দূরত্ব।

$\triangle I_1AF$ হইতে, $\frac{I_1A}{I_1F} = \text{cosec}\,\frac{A}{2}$;

$\therefore \quad \mathbf{I_1A = r_1\,\text{cosec}\,\frac{A}{2} = 4R\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}.$ [(2) এর সাহায্যে]

$\triangle I_1BF$ হইতে, $\frac{I_1B}{I_1F} = \text{cosec}\left(90° - \frac{B}{2}\right) = \sec\frac{B}{2}$;

$\therefore \quad \mathbf{I_1B = r_1\sec\frac{B}{2}}$;

এইরূপে, $\mathbf{I_1C = r_1\sec\frac{C}{2}}.$

অনুরূপ প্রণালীতে I_2 এবং I_3 হইতে কৌণিক বিন্দুসমূহের দূরত্ব নির্ণয় করা যায়।

উদা. 1. Prove that $s(s-a)\tan\frac{A}{2}=\Delta$.

$$r=(s-a)\tan\frac{A}{2}\cdot$$

$$\therefore\quad s(s-a)\tan\frac{A}{2}=sr=\tfrac{1}{2}(a+b+c)r$$

$$=\tfrac{1}{2}ar+\tfrac{1}{2}br+\tfrac{1}{2}cr=\Delta.$$

উদা. 2. Prove that, in a triangle ABC,

$$4Rrs=abc.$$

$$R=\frac{abc}{4\Delta}\text{ এবং }r=\frac{\Delta}{s}.$$

$$\therefore\quad 4Rrs=4\cdot\frac{abc}{4\Delta}\cdot\frac{\Delta}{s}\times s=abc.$$

উদা. 3. Prove that $s=4R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\cdot$

$$\text{দক্ষিণ পক্ষ}=4R\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}\sqrt{\frac{s(s-b)}{ca}}\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}}$$

$$=\frac{4Rs}{abc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$=\frac{4Rs}{abc}\cdot\Delta=4\cdot\frac{abc}{4\Delta}\cdot\frac{s}{abc}\cdot\Delta$$

$$=s.$$

উদা. 4. Prove that $\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}=\frac{1}{r}\cdot$

$$\text{বাম পক্ষ}=\frac{s-a}{\Delta}+\frac{s-b}{\Delta}+\frac{s-c}{\Delta}$$

$$=\frac{3s-(a+b+c)}{\Delta}=\frac{s}{\Delta}=\frac{1}{r}.$$

উদা. 5. In a triangle, prove that

$$rr_1r_2r_3 = \triangle^2 \text{ and } s^2 = r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1.$$

[C. U. B. Sc., 1954]

$$rr_1r_2r_3 = \frac{\triangle}{s}\cdot\frac{\triangle}{s-a}\cdot\frac{\triangle}{s-b}\cdot\frac{\triangle}{s-c}$$

$$= \triangle^2 \frac{\triangle^2}{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \triangle^2\cdot\frac{\triangle^2}{\triangle^2} = \triangle^2.$$

$$r_1r_2 + r_2r_3 + r_3r_1$$

$$= \frac{\triangle}{s-a}\cdot\frac{\triangle}{s-b} + \frac{\triangle}{s-b}\cdot\frac{\triangle}{s-c} + \frac{\triangle}{s-c}\cdot\frac{\triangle}{s-a}$$

$$= \triangle^2\left\{\frac{1}{(s-a)(s-b)} + \frac{1}{(s-b)(s-c)} + \frac{1}{(s-c)(s-a)}\right\}$$

$$= s(s-a)(s-b)(s-c)$$

$$\times\left\{\frac{1}{(s-a)(s-b)} + \frac{1}{(s-b)(s-c)} + \frac{1}{(s-c)(s-a)}\right\}$$

$$= s(s-c) + s(s-a) + s(s-b)$$

$$= s(s-c+s-a+s-b)$$

$$= s\{3s-(a+b+c)\} = s(3s-2s) = s.s = s^2.$$

উদা. 6. In any triangle, prove that

$$\frac{1}{bc} + \frac{1}{ca} + \frac{1}{ab} = \frac{1}{2Rr}.$$

[B. H. U. 1948, '56]

বাম পক্ষ $= \dfrac{a+b+c}{abc} = \dfrac{2s}{abc} = \dfrac{2s}{4\triangle R} \quad \left[\because \ R = \dfrac{abc}{4\triangle}\right]$

$$= \frac{s}{2R\triangle} = \frac{1}{2R\cdot\frac{\triangle}{s}} = \frac{1}{2Rr}. \quad \left[\because \ r = \frac{\triangle}{s}\right]$$

উদা. 7. Prove that $\cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R}$.

$A + B + C = \pi$;

$\therefore \ \cos A + \cos B + \cos C = 1 + 4 \sin\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2}.$

এখন, $r = 4R \sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$,

বা, $\frac{r}{R} = 4\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}$;

$\therefore\ \cos A + \cos B + \cos C = 1 + \frac{r}{R}$.

উদা. 8. Prove that $r_1 + r_2 + r_3 - r = 4R$.

$$\text{বাম পক্ষ} = \frac{\triangle}{s-a} + \frac{\triangle}{s-b} + \frac{\triangle}{s-c} - \frac{\triangle}{s}$$

$$= \triangle\left[\frac{1}{s-a} + \frac{1}{s-b} + \frac{1}{s-c} - \frac{1}{s}\right]$$

$$- (s-a)(s-b)(s-c)$$

$$= \triangle \cdot \frac{s(s-b)(s-c) + s(s-c)(s-a) + s(s-a)(s-b)}{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

$$= \triangle \cdot \frac{2s^3 - (a+b+c)s^2 + abc}{\triangle^2}$$

$$= \triangle \cdot \frac{2s^3 - 2s.s^2 + abc}{\triangle^2}$$

$$= \frac{abc}{\triangle} = 4R.$$

উদা. 9. Prove that $(r_1 - r)(r_2 - r)(r_3 - r) = 4Rr^2$.

[A. U. 1949]

$$\text{বাম পক্ষ} = \left(\frac{\triangle}{s-a} - \frac{\triangle}{s}\right)\left(\frac{\triangle}{s-b} - \frac{\triangle}{s}\right)\left(\frac{\triangle}{s-c} - \frac{\triangle}{s}\right)$$

$$= \triangle^3\left(\frac{1}{s-a} - \frac{1}{s}\right)\left(\frac{1}{s-b} - \frac{1}{s}\right)\left(\frac{1}{s-c} - \frac{1}{s}\right)$$

$$= \triangle^3 \cdot \frac{a}{s(s-a)} \cdot \frac{b}{s(s-b)} \cdot \frac{c}{s(s-c)}$$

$$= \frac{\triangle^3 abc}{s^2 \triangle^2} = \frac{\triangle abc}{s^2}$$

$$= \frac{abc}{4\triangle} \cdot \frac{4\triangle^2}{s^2} = R.4\left(\frac{\triangle}{s}\right)^2 \quad \left[\because \frac{abc}{4\triangle} = R\right]$$

$$= 4Rr^2.$$

উদা. 10. Prove that $a \cot A + b \cot B + c \cot C = 2(R + r)$.

$$\text{বাম পক্ষ} = a \cdot \frac{\cos A}{\sin A} + b \cdot \frac{\cos B}{\sin B} + c \cdot \frac{\cos C}{\sin C}$$

$$= \frac{a}{\sin A} \cdot \cos A + \frac{b}{\sin B} \cdot \cos B + \frac{c}{\sin C} \cdot \cos C$$

$$= 2R \cos A + 2R \cos B + 2R \cos C$$

$$= 2R (\cos A + \cos B + \cos C) = 2R\left(1 + \frac{r}{R}\right) \cdot \text{[উদা. 7 হইতে]}$$

উদা. 11. Prove that

$$\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_2}\right)\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_3}\right) = \frac{4R}{r^2 s^2} = \frac{16R}{r^2(a+b+c)^2}.$$

[A. U. 1938]

$$\text{বাম পক্ষ} = \left(\frac{s}{\Delta} - \frac{s-a}{\Delta}\right)\left(\frac{s}{\Delta} - \frac{s-b}{\Delta}\right)\left(\frac{s}{\Delta} - \frac{s-c}{\Delta}\right)$$

$$= \frac{a}{\Delta} \cdot \frac{b}{\Delta} \cdot \frac{c}{\Delta} = \frac{abc}{\Delta^3} = \frac{abc}{\Delta} \cdot \frac{1}{\Delta^2}$$

$$= 4R \cdot \frac{1}{r^2 s^2} \quad \left[\because R = \frac{abc}{4\Delta} \text{ এবং } \frac{\Delta}{s} = r\right]$$

$$= \frac{4R}{r^2 s^2} = \frac{4.4R}{4r^2 s^2} = \frac{16R}{r^2(2s)^2} = \frac{16R}{r^2(a+b+c)^2}.$$

উদা. 12. If $8R^2 = a^2 + b^2 + c^2$, prove that the triangle is right-angled.

$$a = 2R \sin A,\ b = 2R \sin B,\ c = 2R \sin C\ ;$$

$$\therefore \quad 8R^2 = 4R^2 (\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C)$$

$$= 4R^2.(2 + 2 \cos A \cos B \cos C).$$

[অভেদের অধ্যায় দ্রষ্টব্য]

$$\therefore \quad 2 = 2 + 2 \cos A \cos B \cos C\ ;$$

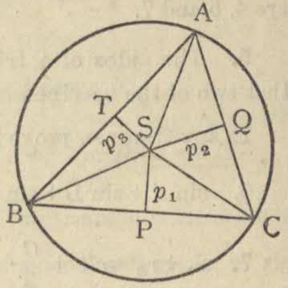
$\therefore$ $\cos A \cos B \cos C = 0$; $\therefore$ $\cos A$, $\cos B$ অথবা $\cos C = 0$;

$\therefore$ A, অথবা B অথবা $C = 90°$,

অতএব, ত্রিভুজটি সমকোণী।

উদা. 13. The lengths of the perpendiculars from the circum-centre of a triangle ABC on the sides BC, CA, AB are respectively p_1, p_2, p_3. Show that,

$$\frac{a}{p_1}+\frac{b}{p_2}+\frac{c}{p_3}=\frac{abc}{4p_1p_2p_3}.$$



চিত্রে S পরিকেন্দ্র, SP, SQ, ST বাহুত্রয়ের উপর লম্ব। তাহা হইলে,

$$SP=p_1,\ SQ=p_2,\ ST=p_3$$

এবং $\angle BSC=2A$ বলিয়া,

$$\angle BSP=\angle A,$$

এবং এইরূপে, $\angle CSQ=\angle B$ ও $\angle AST=\angle C$.

স্পষ্টই, $p_1=R\cos A,\ p_2=R\cos B,\ p_3=R\cos C$ ... (1)

এবং $\tan A=\frac{a}{2p_1},\ \tan B=\frac{b}{2p_2},\ \tan C=\frac{c}{2p_3}.$ ... (2)

$$\therefore\quad \frac{a}{p_1}+\frac{b}{p_2}+\frac{c}{p_3}=\frac{a}{R\cos A}+\frac{b}{R\cos B}+\frac{c}{R\cos C}\ [\text{(1) হইতে}]$$

$$=\frac{2R\sin A}{R\cos A}+\frac{2R\sin B}{R\cos B}+\frac{2R\sin C}{R\cos C}$$

$$=2(\tan A+\tan B+\tan C)$$

$$=2\tan A.\tan B.\tan C$$

[$A+B+C=\pi$ বলিয়া ; অভেদ অধ্যায় দ্রষ্টব্য]

$$=2\cdot\frac{a}{2p_1}\cdot\frac{b}{2p_2}\cdot\frac{c}{2p_3}\quad [\text{(2) হইতে}]$$

$$=\frac{abc}{4p_1p_2p_3}.$$

প্রশ্নমালা 4

1. In a triangle ABC, $AB=1400$ ft., $AC=1300$ ft. and $\angle A=60°$, find the area.

2. If the area of a triangle be 6 sq. miles and two sides be 3 miles and 5 miles, find the other side.

3. Find the sides of a triangle ABC, given $a:b:c=3:4:5$, and the area of the $\triangle ABC=24$ sq. ft.

4. Find the radius of the in-circle of a triangle whose sides are 4, 5 and 7.

5. The sides of a triangle are 5 ft., 8 ft., and 5 ft. Prove that two of the escribed circles are equal. [C. U. 1918]

In any triangle, prove that

6. $\sin A+\sin B+\sin C=\dfrac{s}{R}\cdot$

7. $r_1+r_2=c\cot\dfrac{C}{2}\cdot$ [A. U. 1946]

8. $\dfrac{rr_1}{r_2r_3}=\tan^2\dfrac{A}{2}\cdot$ [A. U. 1947]

9. $\triangle=\frac{1}{4}(a^2\sin 2B+b^2\sin 2A)$.

10. $\triangle=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{4\cot A}$.

11. $\triangle=rr_1\cot\dfrac{A}{2}\cdot$

12. $\triangle=4Rr\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}\cdot$

13. $\dfrac{\triangle}{R^2}=2\sin A\sin B\sin C$.

14. $\cot A+\cot B+\cot C=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{4\triangle}$.

15. $\dfrac{b-c}{r_1}+\dfrac{c-a}{r_2}+\dfrac{a-b}{r_3}=0$.

16. $s=4R\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}\cdot$

17. $\triangle=r^2\cot\dfrac{A}{2}\cot\dfrac{B}{2}\cot\dfrac{C}{2}\cdot$

18. $a\cos A+b\cos B+c\cos C=\dfrac{2\triangle}{R}$.

19. $a\cos B\cos C+b\cos C\cos A+c\cos A\cos B=\dfrac{\triangle}{R}$.

20. $\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ca}+\dfrac{1}{ab}=\dfrac{1}{2Rr}.$

21. $\left(\dfrac{1}{r}+\dfrac{1}{r_1}+\dfrac{1}{r_2}+\dfrac{1}{r_3}\right)^2=\dfrac{4}{r}\left(\dfrac{1}{r_1}+\dfrac{1}{r_2}+\dfrac{1}{r_3}\right).$

22. $4R=\dfrac{(r_2+r_3)(r_3+r_1)(r_1+r_2)}{r_2r_3+r_3r_1+r_1r_2}.$

23. $r_1(r_2+r_3)\text{ cosec } A=r_2(r_3+r_1)\text{ cosec } B$
$$=r_3(r_1+r_2)\text{ cosec } C.$$

24. $\dfrac{\cos A}{a}+\dfrac{\cos B}{b}+\dfrac{\cos C}{c}=\dfrac{a\sin A+b\sin B+c\sin C}{4\triangle}.$

25. If $r_1=r_2+r_3+r$, prove that the triangle is right-angled.

26. If $\left(1-\dfrac{r_1}{r_2}\right)\left(1-\dfrac{r_1}{r_3}\right)=2$, show that the triangle is right-angled.

27. In any triangle, prove that the area of the in-circle : $\triangle$
$$=\pi : \cot \tfrac{1}{2}A \cot \tfrac{1}{2}B \cot \tfrac{1}{2}C.$$

28. If x, y, z be the three heights of a triangle, prove that
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_3}.$$

29. The distances of the three vertices A, B, C of a triangle ABC from the ortho-centre of the triangle are respectively x, y and z, show that
$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}=\frac{abc}{xyz}.$$

30. If the distances of the three vertices A, B, C of a triangle ABC from the in-centre be respectively x, y and z, prove that
$$rabc=sxyz.$$

31. If $\triangle$ be the area of the in-circle and $\triangle_1$, $\triangle_2$, $\triangle_3$ be the areas of the escribed circles, prove that
$$\frac{1}{\sqrt{\triangle}}=\frac{1}{\sqrt{\triangle_1}}+\frac{1}{\sqrt{\triangle_2}}+\frac{1}{\sqrt{\triangle_3}}.$$

32. Show that the radius of the circle passing through A and touching BC at its middle point is
$$\frac{2(b^2+c^2)-a^2}{8b\sin C}.$$

চতুর্থ অধ্যায়

লগারিদ্‌ম ও ত্রৈকোণমিতিক তালিকার ব্যবহার

(Use of Logarithmic and Trigonometric Tables)

4.1. লগারিদ্‌ম ও ত্রৈকোণমিতিক তালিকা।

Table I. সাধারণ লগ-তালিকা—এই তালিকায় 10 হইতে 10000 পর্য্যন্ত সংখ্যার লগারিদ্‌ম দেওয়া আছে। ব্যবহারের নিয়ম দশম শ্রেণীতে আলোচিত হইয়াছে।

Table II. অ্যান্টি-লগারিদ্‌ম-তালিকা—এই তালিকার সাহায্যে প্রদত্ত লগারিদ্‌ম হইতে উহা কোন্ সংখ্যার লগারিদ্‌ম তাহা নির্ণয় করা যায়। এই তালিকার ব্যবহারও দশম শ্রেণীতে আলোচিত হইয়াছে।

Table III. Natural Sines and Cosines Table—

এই তালিকায় 1′ অন্তর, 0° হইতে আরম্ভ করিয়া 90° পর্য্যন্ত কোণসমূহের sines এবং cosines দেওয়া আছে। লক্ষণীয়, একই তালিকায় sine এবং cosine উভয়ই দেওয়া আছে। Sine এর কোণগুলির উপরের বামদিক হইতে ক্রমে ডানদিকে এবং নীচের দিকে বাড়িয়া গিয়াছে, আর cosine এর কোণগুলি নীচের ডানদিক হইতে আরম্ভ হইয়া উপরের বামদিকে বাড়িয়া গিয়াছে। তালিকার উপরে লেখা আছে Natural sines এবং নীচে লেখা আছে Natural cosines. তালিকার প্রধান অংশে 10′ অন্তর অন্তর কোণের sine এবং cosine দেওয়া আছে। পার্শ্বের Mean difference অংশের সাহায্যে 1′ অন্তর অন্তর কোণের sine এবং cosine পাওয়া যায়। তালিকা দেখিবার সময়ে মনে রাখিতে হইবে, কোণ 0° হইতে 90° পর্য্যন্ত বাড়িয়া চলিলে sine এর মান ক্রমশঃই বাড়ে, কিন্তু cosine এর মান ক্রমশঃই কমে। সেইজন্য Mean difference-স্তম্ভের মান sine নির্ণয়ের সময়ে **যোগ করিতে হয়** আর cosine নির্ণয়ের সময়ে **বিয়োগ করিতে হয়।**

মনে কর, sine 25° 44′ নির্ণয় করিতে হইবে। Sine বলিয়া একেবারে বামপার্শ্বের স্তম্ভে উপরের দিক হইতে আরম্ভ করিয়া নীচের দিকে আসিয়া 25° বাহির করা হইল ; ঐ সারিতে মাথার 40′ এর নীচে আছে 0·43313 ; পরে ঐ সারিতেই মাথার উপরের Mean difference-স্তম্ভগুলির 4′ এর স্তম্ভে

আছে 105. তালিকাটিতে দশমিক বিন্দুর পরবর্তী পঞ্চম অঙ্কটির আসন্ন মান গ্রহণ করা হইয়াছে বলিয়া অর্থাৎ উহাতে সন্নিবিষ্ট সকল সংখ্যা পাঁচ দশমিক স্থান পর্যন্ত শুদ্ধ বলিয়া 105 কে মনে করিতে হইবে ˙00105.

$$\therefore \text{ নির্ণেয় } \sin e = 0{\cdot}43313 + {\cdot}00105$$
$$= 0{\cdot}43418.$$

মনে কর, cos 44°48′ নির্ণয় করিতে হইবে।

ডানদিকের ডিগ্রী-চিহ্নিত স্তম্ভের নীচের দিক হইতে আরম্ভ করিয়া উপরের দিকে আসিয়া 44° বাহির করা হইল ; ঐ সারিতে নীচের 40′ বরাবর আছে 0˙71121 ; পরে ঐ সারিতেই নীচের Mean difference এর স্তম্ভগুলির 8′ এর স্তম্ভে আছে 163 ;

$$\therefore \text{ নির্ণেয় } \text{cosine} = 0{\cdot}71121 - {\cdot}00163$$
$$= 0{\cdot}70958.$$

Table IV. Natural Tangents এবং Cotangents Table—

এই তালিকায়ও 1′ অন্তর 0° হইতে আরম্ভ করিয়া 90° পর্যন্ত কোণসমূহের tangents এবং cotangents দেওয়া আছে। tangent এর কোণগুলি উপরের বামদিক হইতে ক্রমে ডাইনে এবং নীচের দিকে বাড়িয়া গিয়াছে। তালিকার উপরে লেখা আছে Natural tangents এবং নীচে লেখা আছে Natural cotangents. তালিকার প্রধান অংশে 10′ অন্তর অন্তর কোণের tangent এবং cotangent দেওয়া আছে। পার্শ্বে Mean difference অংশের সাহায্যে 1′ অন্তর অন্তর কোণের tangent এবং cotangent পাওয়া যায়। মনে রাখিতে হইবে, কোণ 0° হইতে 90° পর্যন্ত বাড়িয়া চলিলে tangent এর মান ক্রমশঃই বাড়ে, কিন্তু cotangent এর মান ক্রমশঃই কমে। সেইজন্য Mean difference-স্তম্ভের মান tangent নির্ণয়ের সময়ে **যোগ করিতে হয়** এবং cotangent নির্ণয়ের সময়ে **বিয়োগ করিতে হয়**।

উদা.। $\tan 58°37' = 0{\cdot}63185 + {\cdot}00746$
$= 0{\cdot}63931,$
$\cot 64°48' = 0{\cdot}47341 - {\cdot}00286$
$= 0{\cdot}47055.$

Table V. Logarithmic Sines and Cosines Table—

লগারিদ্‌মিক sine θ এবং cosine θ এর অর্থ $10 + \log \sin \theta$ এবং $10 + \log \cos \theta$ এবং ইহাকে $L \sin \theta$ এবং $L \cos \theta$ রূপে লেখা হয়। Table V এ,

Mean difference-স্তম্ভের সাহায্যে 1′ অন্তর 0° হইতে আরম্ভ করিয়া 90° পর্য্যন্ত কোণসমূহের লগারিদ্‌মিক sines ও cosines নির্ণয় করা যায়। ব্যবহার-পদ্ধতি sine এবং cosine তালিকারই অনুরূপ। $L \sin \theta$ র সময়ে Mean difference যোগ করিতে হয় এবং $L \cos \theta$ র সময়ে Mean difference বিয়োগ করিতে হয়।

এখন, যে-কোন কোণের sine এবং cosine এর সাংখ্যমান 1 অপেক্ষা বৃহত্তর নহে, 0° হইতে 45° পর্য্যন্ত কোণসমূহের tangent এবং 45° হইতে 90° পর্য্যন্ত কোণসমূহের cotangent 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর। অতএব, ইহাদের লগারিদ্‌ম ঋণাত্মক। তালিকায় যাহাতে এই ঋণাত্মক মানগুলি না আসে, সেইজন্য ত্রৈকোণমিতিক অনুপাতসমূহের লগারিদ্‌ম এর সহিত সর্ব্বদা 10 যোগ করিয়া তালিকা প্রস্তুত করা হয়।

উদাহরণ। $L \sin 65°18'$

$$= 9{\cdot}95786 + {\cdot}00046 = 9{\cdot}95832.$$

$L \cos 54°37'$

$$= 9{\cdot}76395 - {\cdot}00124 = 9{\cdot}76271.$$

Table VI. Logarithmic Tangents and Cotangents Table—

এই তালিকায়ও 1′ অন্তর অন্তর 0° হইতে 90° পর্য্যন্ত লগারিদ্‌মিক tangents এবং cotangents এর মান দেওয়া আছে। লগারিদ্‌মিক tangents এবং cotangents কে $L \tan \theta$ এবং $L \cot \theta$ রূপে লেখা হয় এবং উহাদের অর্থ যথাক্রমে $10 + \log \tan \theta$ এবং $10 + \log \cot \theta$. ব্যবহার-পদ্ধতি পূর্ব্ব পূর্ব্ব তালিকারই অনুরূপ ; মনে রাখিতে হইবে, এক্ষেত্রেও লগারিদ্‌মিক tangent-তালিকায় Mean difference যোগ করিতে হয় এবং লগারিদ্‌মিক cotangent-তালিকায় Mean difference বিয়োগ করিতে হয়।

উদাহরণ।

$$L \tan 48°35' = 10{\cdot}05319 + 0{\cdot}00127$$
$$= 10{\cdot}05446.$$
$$L \cot 44°28' = 10{\cdot}01011 - {\cdot}00202$$
$$= 10{\cdot}00809.$$

4·2. সমানুপাতী অংশ-বিধি (Principle of Proportional Parts)।

অতি ক্ষুদ্র রাশি অন্তর অন্তর কোন চলরাশির মান এবং উহার কোন অপেক্ষকের অনুরূপ মানসমূহ তালিকাবদ্ধ করিলে দেখা যায়, চলরাশির মানের

অতি ক্ষুদ্র পরিবর্ত্তনের জন্য উহার অপেক্ষকের অনুরূপ মানের যে পরিবর্ত্তন হয় তাহা চলরাশিটির মানের ক্ষুদ্র পরিবর্ত্তনের সমানুপাতী। ইহাই সমানুপাতী অংশ-বিধি নামে খ্যাত।

প্রমাণ পাঠ্যতালিকা-বহির্ভূত, কিন্তু প্রয়োগ-বিধি প্রয়োজনীয়। নিম্নের উদাহরণসমূহ হইতে প্রয়োগ-বিধি সুস্পষ্ট হইবে।

উদা. 1. Given log 49765 = 4·6969240 and log 49766 = 4·6969327, find (i) log 49·7658 and (ii) the number whose logarithm is $\bar{3}$·6969282.

(i) স্পষ্টই log 49765·8 এর মান log 49765 এবং log 49766 এর মধ্যবর্ত্তী হইবে। আরও দেখা যায় 49765·8 সংখ্যাটি 49765 অপেক্ষা ·8 অধিক।

এখন, log 49766 = 4·6969327

এবং log 49765 = 4·6969240

∴ 1 বৃদ্ধির জন্য অন্তর = ·0000087 ;

∴ ·8 বৃদ্ধির জন্য অন্তর = ·0000087 × ·8
= ·00000696 ;

∴ log 49765·8 = 4·6969240 + ·00000696
= 4·69693096,

∴ log 49·7658 = 1·69693096
= 1·6969310 (7 দশমিক স্থান পর্য্যন্ত আসন্ন মান)।

(ii) যে সংখ্যার লগারিদ্‌ম 4·6969282, তাহাই প্রথমে নির্ণয় করিতে হইবে।

এখন, 4·6969282 সংখ্যাটি 4·6969240 এবং 4·6969327 এর মধ্যবর্ত্তী। অতএব, 4·6969282 যে সংখ্যার লগারিদ্‌ম তাহা অবশ্যই 49765 এবং 49766 এর মধ্যবর্ত্তী হইবে।

মনে কর, এই নির্ণেয় সংখ্যাটি = 49765 + x.

এখন, log 49766 = 4·6969327, ... (1)

log 49765 = 4·6969240, ... (2)

এবং log 49765 + x = 4·6969282 ... ... (3)

(1) এবং (2) হইতে 1 বৃদ্ধির জন্য অন্তর ·0000087, (সংক্ষেপে, 1 বৃদ্ধির জন্য অন্তর 87)

(2) এবং (3) হইতে x বৃদ্ধির জন্য অন্তর ˙0000042, (সংক্ষেপে, x বৃদ্ধির জন্য অন্তর 42)

অর্থাৎ, অন্তর	বৃদ্ধি	বা, অন্তর	বৃদ্ধি
˙0000087	1	87	1
˙0000042	x	42	x

$$\therefore\ x=\frac{\dot{}0000042}{\dot{}0000087}=\frac{42}{87}=0\dot{}48\ldots$$

$\therefore\ \log 49765\dot{}48=4\dot{}6969282.$

এখন, $\bar{3}\dot{}6969282$ এবং $4\dot{}6969282$ এর অংশক একই ; অতএব উহারা যে সকল সংখ্যার লগারিদ্‌ম তাহারা একই ক্রমে সজ্জিত একই অঙ্কসমূহ দ্বারা গঠিত। সুতরাং $\bar{3}\dot{}6969282$ যে সংখ্যার লগারিদ্‌ম সেই সংখ্যাটি অবশ্য 4976548 সংখ্যাটির উপযুক্ত স্থানে দশমিক বিন্দু বসাইয়া পাওয়া যাইবে। এখন এক্ষেত্রে পূর্ণক $\bar{3}$;

$\therefore$ নির্ণেয় সংখ্যা = ˙004976548.

উদা. 2. Given $\sin 62°25'=\dot{}8863383$ and $\sin 62°24'=\dot{}8862036$, find $\sin 62°24'35''$.

$$\sin 62°\,25'=\dot{}8863383$$
$$\sin 62°\,24'=\dot{}8862036$$

$\therefore$ 1′ বা 60″ এর জন্য অন্তর = ˙0001347.

$$\therefore\quad 35''\ \text{''}\ \text{''}\ \text{''}\ =\frac{\dot{}0001347\times 35}{60}=\dot{}00007857\ldots$$

$$\therefore\ \sin 62°\,24'\,35''=\dot{}8862036+\dot{}00007857\ldots$$
$$=\dot{}88628217\ldots=\dot{}8862822.$$

উদা. 3. Given $\cos 20°13'=\dot{}9383925$ and $\cos 20°14'=\dot{}9382920$, find $\cos 20°\,13'\,45''$.

এস্থলে, 20° 13′ 45″ ও 20° 13′ এর অন্তর 45″,

এবং 1′ বা 60″ এর জন্য অন্তর ˙9383925 − ˙9382920,

অর্থাৎ, ˙0001005.

	কোণের অন্তর	cosine এর মানের অন্তর
$\therefore$	60″	˙0001005
	45″	x

$$\therefore\ x=\frac{\dot{}0001005\times 45}{60}=\frac{\dot{}0001005\times 3}{4}=0\dot{}00007537\ldots$$

এখন, কোণের পরিমাণ বৃদ্ধিপ্রাপ্ত হইলে, উহার cosine কমে ;

$\therefore \quad \cos 20^\circ\ 13'\ 45'' = 0{\cdot}9383925 - 0{\cdot}00007537\cdots$

$= 0{\cdot}93831713 = 0{\cdot}9383171.$

উদা. 4. Given $\cot 6^\circ\ 28' = 8{\cdot}8225186$ and $\cot 6^\circ\ 29' = 8{\cdot}7996446$, find $\cot 6^\circ\ 28'\ 25''$.

এস্থলে, কোণের পরিমাণ $1'$ বা $60''$ বাড়িবার জন্য cotangent এর মান $(8{\cdot}8225186 - 8{\cdot}7996446)$ বা ${\cdot}0228740$ কমিয়া গিয়াছে ;

$\therefore$ কোণের পরিমাণ বৃদ্ধি cot এর মান হ্রাস

$60''$ ${\cdot}0228740$

$25''$ x

$$\therefore \quad x = \frac{{\cdot}0228740 \times 25}{60} = {\cdot}00953083\cdots$$

$\therefore \quad \cot 6^\circ\ 28'\ 25'' = 8{\cdot}8225186 - {\cdot}00953083$

$= 8{\cdot}81298777\cdots = 8{\cdot}8129878.$

উদা. 5. Given $L \sin 44^\circ\ 24' = 9{\cdot}8448891$ and $L \sin 44^\circ\ 23' = 9{\cdot}8447601$, find $L \sin 44^\circ\ 23'\ 40''$ and $L\ \text{cosec}\ 44^\circ\ 23'\ 40''$.

$L \sin 44^\circ\ 24' = 9{\cdot}8448891$

$\underline{L \sin 44^\circ\ 23' = 9{\cdot}8447601}$

$\therefore$ $1'$ বা $60''$ এর জন্য অন্তর $= {\cdot}0001290$ (বা সংক্ষেপে, 1290)

$\therefore$ কোণের অন্তর উহাদের লগারিদ্‌মিক sine এর মানের অন্তর

$60''$ ${\cdot}0001290$

$40''$ x

$\therefore \quad x = {\cdot}0001290 \times \frac{40}{60} = {\cdot}0000860.$

$\therefore \quad L \sin 44^\circ\ 23'\ 40'' = 9{\cdot}8447601 + {\cdot}0000860$

$= 9{\cdot}8448461.$

এখন, $L\ \text{cosec}\ 44^\circ\ 23'\ 40''$

$= 10 + \log \text{cosec}\ 44^\circ\ 23'\ 40''$

$= 10 + \log\left(\frac{1}{\sin 44^\circ\ 23'\ 40''}\right) = 10 + \log 1 - \log \sin 44^\circ\ 23'\ 40''$

$= 10 - \log \sin 44^\circ\ 23'\ 40'' = 10 + 10 - 10 - \log \sin 44^\circ\ 23'\ 40''$

$= 20 - (10 + \log \sin 44^\circ\ 23'\ 40'') = 20 - L \sin 44^\circ\ 23'\ 40''$

$= 20 - 9{\cdot}8448461 = 10{\cdot}1551509.$

উদা. 6. Given L sec 32° 21′ = 10·0732486, and L sec 32° 20′ = 10·0731686, find the angle of which the tabular logarithmic secant is 10·0732126.

$$L \sec 32^\circ 21' = 10{\cdot}0732486$$
$$L \sec 32^\circ 20' = 10{\cdot}0731686$$

∴ 1′ বা 60″ এর জন্য অন্তর = ·00008.

আবার, 10·0732126 − 10·0731686 = ·000044

∴ লগারিদ্‌মিক সেকাণ্ট এর মান বৃদ্ধি কোণের পরিমাণ বৃদ্ধি

লগারিদ্‌মিক সেকাণ্ট এর মান বৃদ্ধি	কোণের পরিমাণ বৃদ্ধি
·00008	60″
·000044	x

$$\therefore\ x = \frac{{\cdot}000044}{{\cdot}00008} \times 60'' = 33''.$$

∴ নির্ণেয় কোণ = 32° 20′ 33″.

উদা. 7. Find the value of

$$\frac{\sin 58^\circ 39' \times \cos 28^\circ 5'}{\cot 67^\circ 19'}$$

given $L \sin 61^\circ 55' = 9{\cdot}9455985$,
$L \cos 31^\circ 21' = 9{\cdot}9314605$,
$L \cot 22^\circ 41' = 10{\cdot}3788577$
and $\log 180{\cdot}3 = 2{\cdot}2559167$.

মনে কর, নির্ণেয় মান $= x$.

$$\begin{aligned}\therefore\quad x &= \sin 58^\circ 39' \times \cos 28^\circ 5' \times \tan 67^\circ 19'\\ &= \cos(90^\circ - 58^\circ 39') \times \sin(90^\circ - 28^\circ 5') \times \cot(90^\circ - 67^\circ 19')\\ &= \cos 31^\circ 21' \times \sin 61^\circ 55' \times \cot 22^\circ 41'.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \log x &= \log\cos 31^\circ 21' + \log\sin 61^\circ 55' + \log\cot 22^\circ 41'\\ &= L\cos 31^\circ 21' - 10 \quad = \quad 9{\cdot}9314605 - 10\\ &\quad + L\sin 61^\circ 55' - 10 \quad\ \ + \ 9{\cdot}9455985 - 10\\ &\quad + L\cot 22^\circ 41' - 10 \quad\ \ + 10{\cdot}3788577 - 10\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad = 30{\cdot}2559167 - 30\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad = 0{\cdot}2559167\\ &= \log 1{\cdot}803.\end{aligned}$$

$$\therefore\quad x = 1{\cdot}803.$$

উদা. 8. Solve for θ, if $\sin\theta = 0{\cdot}4912$,

given $\log 2 = {\cdot}3010300$,

$\log 3{\cdot}07 = 0{\cdot}4872685$,

$L \sin 29^\circ\, 25' = 9{\cdot}6912205$,

$L \sin 29^\circ\, 26' = 9{\cdot}6914445$.

$$\sin\theta = 0{\cdot}4912\;;$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad \log\sin\theta &= \log 0{\cdot}4912\\ &= \log\frac{4912}{10000} = \log 4912 - \log 10^4\\ &= \log(16\times 307) - 4\log 10\\ &= \log 2^4 + \log 307 - 4\\ &= 4\log 2 + \log 307 - 4\\ &= 4\times{\cdot}3010300 + 2{\cdot}4872685 - 4\\ &= 1{\cdot}2041200 + 2{\cdot}4872685 - 4\\ &= 3{\cdot}6913885 - 4 = \bar{1}{\cdot}6913885.\end{aligned}$$

$$\therefore\quad L\sin\theta = 10 + \log\sin\theta = 10 - 1 + {\cdot}6913885 = 9{\cdot}6913885.$$

$9{\cdot}6913885$ সংখ্যাটি $9{\cdot}6912205$ ও $9{\cdot}6914445$ এর মধ্যে অবস্থিত বলিয়া, উহা যে কোণের L sine তাহা, অর্থাৎ, θ অবশ্যই $29^\circ\, 25'$ এবং $29^\circ\, 26'$ এর মধ্যে অবস্থিত হইবে।

মনে কর, $\theta = 29^\circ\, 25'\, x''$.

এখন, $9{\cdot}6914445 = L\sin 29^\circ\, 26'$

$9{\cdot}6912205 = L\sin 29^\circ\, 25'$

${\cdot}0002240 = 1'$ বা $60''$ এর জন্য অন্তর

এবং $9{\cdot}6913885 = L\sin 29^\circ\, 25'\, x''$

$9{\cdot}6912205 = L\sin 29^\circ\, 25'$

${\cdot}0001680 = x''$ এর জন্য অন্তর

$$\therefore\quad \frac{x}{60} = \frac{{\cdot}0001680}{{\cdot}0002240} = \frac{168}{224}\;;\quad \therefore\; x = \frac{168}{224}\times 60 = 45.$$

$$\therefore\quad \theta = 29^\circ\, 25'\, 45''.$$

প্রশ্নমালা 5

Find, from the tables, the values of :

1. sin $60° 28'$. **2.** cos $38° 42'$.

3. tan $25° 25'$. **4.** cot $65° 45'$.

5. sec $26° 21'$. **6.** cosec $55° 15'$.

Find the values of :

7. $L \sin 36° 35'$. **8.** $L \cos 72° 28'$.

9. (a) $L \tan 45° 35'$. (b) $L \cot 22° 41'$.

10. If $L \cos \theta = {}^{\cdot}95652$, find θ to the nearest minute.

11. Given $\log 23512 = 4{\cdot}3712896$ and $\log 23513 = 4{\cdot}3713080$, find $\log 235126$.

12. Given $\log 4350 = 3{\cdot}6384893$ and $\log 4351 = 3{\cdot}6385891$, find $\log 43501$ and $\log {}^{\cdot}435$.

13. Given $\log 23454 = 4{\cdot}3702199$ and $\log 23{\cdot}453 = 1{\cdot}3701984$, find $\log 234{\cdot}535$.

14. Given $\log 3381{\cdot}4 = 3{\cdot}5290965$ and $\log {}^{\cdot}33813 = \bar{1}{\cdot}5290837$, find the number of which the logarithm is $\bar{3}{\cdot}5290898$.

15. Given $\log 3 = 0{\cdot}4771213$, $\log 74008 = 4{\cdot}8692787$ and diff. for $1 = 59$, find the 20th root of ${}^{\cdot}00243$.

16. Given $\sin 62° 24' = 0{\cdot}8862036$ and $\sin 62° 25' = {}^{\cdot}8863383$, find $\sin 62° 24' 40''$.

17. Given $\tan 49° 35' = 1{\cdot}1743038$ and $\tan 49° 34' = 1{\cdot}1736120$, find $\tan 49° 34' 40''$.

18. Given $\cos 40° 47' = 0{\cdot}7571851$ and $\cos 40° 48' = 0{\cdot}7569951$, find the angle whose cosine is ${}^{\cdot}7570711$.

19. Given $\text{cosec}\, 34° 27' = 1{\cdot}7677625$ and $\text{cosec}\, 34° 28' = 1{\cdot}7670133$, find the angle whose cosecant is $1{\cdot}7672006$.

20. Given $L \sin 5° 25' = 8{\cdot}9749624$ and $L \sin 5° 26' = 8{\cdot}9762926$, find $L \sin 5° 25' 38''$.

21. Given $L \sin 37° 43' 50'' = 9{\cdot}7867152$ and $L \sin 37° 44' = 9{\cdot}7867424$, find $L \sin 37° 43' 56''$. [C. U. 1910]

22. Given $L \cos 42° 25' = 9{\cdot}8682088$ and $L \cos 42° 26' = 9{\cdot}8680234$, find the angle whose $L \cos$ is $9{\cdot}8681318$.

23. Given $L \tan 79° 51' 40'' = 10{\cdot}7475657$ and $L \tan 79° 51' 50'' = 10{\cdot}7476872$, find the angle whose $L \tan$ is $10{\cdot}7476532$.

[C. U. 1921]

24. Given $L \cot 68° 52' 50'' = 9{\cdot}5868773$ and difference for $10'' = {\cdot}0000626$, find the angle whose $L \cot$ is $9{\cdot}5868939$.

25. Prove that $L \sin \theta + L \operatorname{cosec} \theta = L \cos \theta + L \sec \theta = L \tan \theta + L \cot \theta = 20$.

26. Prove that (i) $L \sin \theta - L \operatorname{cosec} \theta = 2 \log \sin \theta$,

(ii) $L \cos \theta - L \sec \theta = 2 \log \cos \theta$

and (iii) $L \tan \theta - L \cot \theta = 2 \log \tan \theta$.

27. Given $L \cos 36° 22' = 9{\cdot}9059247$, find $L \sec 36° 22'$.

28. Given $L \sin 61° 55' = 9{\cdot}94560$ and $L \cos 61° 55' = 9{\cdot}67281$, find $L \tan 61° 55'$.

29. Find the value of

$$\frac{\sin 67° 14' \times \cos 38° 26'}{\tan 47° 24'},$$

given $L \sin 51° 34' = 9{\cdot}8939458$,

$L \cos 22° 46' = 9{\cdot}9647726$,

$L \tan 42° 36' = 9{\cdot}9635740$,

and $\log 6642 = 3{\cdot}8222924$.

30. Solve for θ, if $\tan \theta = {\cdot}981$,

given $\log 3 = 0{\cdot}47712$,

$\log 10{\cdot}9 = 1{\cdot}03743$,

$L \tan 44° 27' = 9{\cdot}99166$

diff. for $1' = 25$.

পঞ্চম অধ্যায়

ত্রিভুজের সমাধান

(Solution of Triangles)

5·1. ত্রিভুজের সমাধান।

কোন ত্রিভুজের তিনটি বাহু ও তিনটি কোণের প্রত্যেককে ত্রিভুজের এক একটি অঙ্গ (element) বলে। ত্রিভুজের এই সকল অঙ্গের পরস্পরের মধ্যে কোন-না-কোন সম্পর্ক থাকে। এইজন্য এই অঙ্গসমূহের মধ্যে সাধারণতঃ যে-কোন তিনটি দেওয়া থাকিলে অবশিষ্ট তিনটি নির্ণয় করা যায়। প্রদত্ত অঙ্গসমূহ হইতে অবশিষ্ট অঙ্গসমূহ নির্ণয়ের এই প্রক্রিয়াকে **ত্রিভুজের সমাধান** বলে।

ত্রিভুজের সমাধানের জন্য যে-কোন তিনটি অঙ্গ দেওয়া থাকিতে পারে :

(i) তিনটি বাহু,

(ii) তিনটি কোণ,

(iii) দুইটি কোণ এবং একটি বাহু,

(iv) দুইটি বাহু এবং উহাদের অন্তর্ভূত কোণ,

(v) দুইটি বাহু এবং উহাদের একটির বিপরীত কোণ।

ইহাদের মধ্যে দ্বিতীয় ক্ষেত্র ছাড়া সকল ক্ষেত্রেই ত্রিভুজের যথাযথ সমাধান সম্ভব। কিন্তু দ্বিতীয় ক্ষেত্রে ত্রিভুজের সমাধান করিয়া কেবলমাত্র বাহুগুলির অনুপাতই পাওয়া যায় ; বাহুগুলির যথার্থ দৈর্ঘ্য জানা যায় না।

5·2. প্রদত্ত তিনটি বাহু হইতে ত্রিভুজের সমাধান।

কোন ত্রিভুজের তিনটি বাহু a, b, c দেওয়া থাকিলে ত্রিভুজের কোণ তিনটি নির্ণয় করা যায় ; তৃতীয় অধ্যায়ে আমরা দেখিয়াছি :

(1) $\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$,

(2) $\sin A = \dfrac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, যেখানে $2s = a+b+c$,

(3) $\sin \dfrac{A}{2} = \sqrt{\dfrac{(s-b)(s-c)}{bc}}$,

(4) $\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$,

(5) $\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$.

এই সকল সূত্রের যে-কোনটির সাহায্যেই A কোণটিকে নির্ণয় করা যায়। অনুরূপ সূত্রসমূহের সাহায্যে B ও C এর মান নির্ণয় করা যায়।

দ্বিতীয় সূত্র হইতে A কোণ নির্ণয় করিতে গেলে 0 হইতে π এর মধ্যে A কোণের দুইটি মান পাওয়া যাইবে। কারণ, $\sin A=\sin(\pi-A)$. সুতরাং, এই সূত্র ব্যবহার করা চলে না।

প্রথম সূত্রের সাহায্যে $\cos A$ এর মান জানা যায়। 0 হইতে π এর মধ্যে প্রত্যেক কোণের কোসাইন স্বতন্ত্র বলিয়া এক্ষেত্রে কোসাইন-তালিকার সাহায্যে A কোণের কেবলমাত্র একটি মানই পাওয়া যাইবে। এদিক দিয়া প্রথম সূত্রের ব্যবহার যুক্তিযুক্ত। কিন্তু $\cos A$ এর মান নির্ণয়ে লগারিদ্‌মের ব্যবহার খুব সুবিধাজনক নহে। a, b, c এর মান বড় হইলে প্রক্রিয়াটি দীর্ঘ এবং সময়-সাপেক্ষ হইয়া পড়ে। এইজন্য কেবলমাত্র a, b, c এর মান ক্ষুদ্র হইলে এই সূত্র ব্যবহার করা যায়।

অবশিষ্ট সূত্রগুলি হইতে লগারিদ্‌মের সাহায্যে সহজেই কোণটির মান জানা যায়।

বিভিন্ন তালিকা হইতে এই কোণের যে মান নিরূপণ করা হয়, অধিকাংশ ক্ষেত্রে তাহার সকল মানই আসন্ন মান মাত্র। উচ্চতর গণিতে প্রমাণ করা হইয়াছে যে, কোন কোণের বিভিন্ন তালিকা হইতে প্রাপ্ত আসন্ন মানসমূহের মধ্যে লগারিদ্‌মিক ট্যানজেণ্ট (logarithmic tangent) তালিকা হইতে প্রাপ্ত আসন্ন মানই সর্ব্বাপেক্ষা শুদ্ধ। সুতরাং কোণগুলির যথাসম্ভব শুদ্ধ মান পাইবার জন্য কার্য্যক্ষেত্রে উপরিউক্ত পঞ্চম সূত্রই ব্যবহৃত হইয়া থাকে।

পঞ্চম সূত্র হইতে আমরা জানি,

$$\tan\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}},$$

$$\therefore\ L\tan\frac{A}{2}=10+\log\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$$

$$=10+\tfrac{1}{2}[\log(s-b)+\log(s-c)-\log s-\log(s-a)].$$

উদা. 1. The sides of a triangle are 15, 19, 24. Find the greatest angle of the triangle; given $\log 5\cdot7 = 0\cdot75587$, $L \cos 88° 59' = 8\cdot24903$ and difference for $1' = 718$. [C. U. 1936]

24 বৃহত্তম বাহু। স্থতরাং, এই বাহুর বিপরীত কোণটিই ত্রিভুজটির বৃহত্তম কোণ হইবে। এক্ষেত্রে $a = 15$, $b = 19$, $c = 24$ ধরিলে,

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$= \frac{15^2 + 19^2 - 24^2}{2 \times 19 \times 15} = \frac{225 + 361 - 576}{570}$$

$$= \frac{10}{570} = \frac{1}{57};$$

$$\therefore \quad L \cos C = 10 + \log \frac{1}{57},$$

$$= 10 - \log 57 = 10 - 1\cdot75587 = 8\cdot24413;$$

দেওয়া আছে $L \cos 88° 59' = 8\cdot24903$.

মনে কর, $\angle C = 88° 59' x''$,

$\therefore$ x'' এর অন্তর $= 8\cdot24903 - 8\cdot24413 = \cdot00490$.

কিন্তু $1'$ বা $60''$ এর অন্তর $= \cdot00718$;

$\therefore$ $\dfrac{x}{60} = \dfrac{\cdot00490}{\cdot00718}$, বা, $x = \dfrac{490}{718} \times 60 = \dfrac{29400}{718} = 41$ (প্রায়);

$\therefore$ $\angle C = 88° 59' 41''$ (প্রায়)।

উদা. 2. The sides of a triangle are 9, 10 and 11. Find the angle opposite to the side 10; given $\log 2 = \cdot30103$, $L \tan 29° 30' = 9\cdot7526420$, $L \tan 29° 29' = 9\cdot7523472$. [C. U. 1943]

এক্ষেত্রে $a = 9$, $b = 10$, $c = 11$ ধরিলে, $s = \frac{1}{2}(a + b + c) = \frac{1}{2}(9 + 10 + 11) = 15$; স্থতরাং, $s - a = 15 - 9 = 6$, $s - b = 15 - 10 = 5$, $s - c = 15 - 11 = 4$.

10 বাহুর বিপরীত কোণ B. B কোণ নির্ণেয়।

$$\tan \frac{B}{2} = \sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}} = \sqrt{\frac{4\cdot6}{15\cdot5}} = \sqrt{\frac{8}{25}} = \sqrt{\frac{32}{100}}$$

$$= \frac{2^{\frac{5}{2}}}{10}.$$

$\therefore \quad L \tan \frac{B}{2} = 10 + \frac{5}{2} \log 2 - \log 10$

$= 10 + \frac{5}{2} + {\cdot}30103 - 1 = 9{\cdot}752575.$

প্রদত্ত মান হইতে দেখা যাইতেছে যে, $L \tan \frac{B}{2}$ এর মান $L \tan 29°29'$ ও $L \tan 29°30'$ এর মধ্যে রহিয়াছে। সুতরাং, মনে কর, $\frac{B}{2} = 29°\ 29'\ x''$.

$\therefore \quad x''$ এর অন্তর $= 9{\cdot}752575 - 9{\cdot}7523472 = {\cdot}0002278$;

আবার $1'$ বা $60''$ এর অন্তর $= 9{\cdot}7526420 - 9{\cdot}7523472 = {\cdot}0002948$;

$\therefore \quad \frac{x}{60} = \frac{{\cdot}0002278}{{\cdot}0002948} = \frac{2278}{2948},$

$\therefore \quad x = \frac{2278}{2948} \times 60 = 46{\cdot}363$ (প্রায়) ;

সুতরাং $\frac{B}{2} = 29°29'46{\cdot}363''$; $\therefore$ **$B = 58°59'32{\cdot}73''$** (প্রায়) ।

প্রশ্নমালা 6

1. In a plane triangle, $a = 18$, $b = 20$, $c = 22$; calculate the value of $L \tan \frac{A}{2}$. Given, $\log 2 = {\cdot}30103$, $\log 3 = {\cdot}4771212$.

[C. U. 1915]

2. The sides of a triangle are 7, 8, 9. Find all the angles. Given, $\log 2 = {\cdot}3010300$, $L \tan 24°5'40'' = 9{\cdot}6505069$, $L \tan 24°5'50'' = 9{\cdot}6505634$, $L \tan 29°12'20'' = 9{\cdot}7474183$ and $L \tan 29°12'30'' = 9{\cdot}7474677$. [C. U. 1938 ; B. H. U. 1938]

3. Find the greatest angle of the triangle whose sides are 2, 3, 4. Given, $\log 2 = {\cdot}30103$, $\log 3 = {\cdot}4771213$; $L \tan 52°14' = 10{\cdot}1108395$, $L \tan 52°15' = 10{\cdot}1111004$.

[C. U. 1929 ; B. H. U. 1952]

4. The sides of a triangle are 315, 420, 531. Find the angle opposite to the side 420, having given, $\log 633 = 2{\cdot}8014037$, $\log 318 = 2{\cdot}5024271$, $\log 213 = 2{\cdot}3283796$, $\log 102 = 2{\cdot}0086002$; $L \tan 26°\ 7'\ 37{\cdot}43'' = 9{\cdot}6906220$.

5. Find the greatest angle of the triangle whose sides are 32, 40, 66. Given $\log 207 = 2\cdot3159703$, $\log 1073 = 3\cdot0305997$, $L \cos 66°18' = 9\cdot6424342$, diff. for $1' = \cdot0003431$. [C. U. 1955]

6. The sides of a triangle are 4, 5, 6. Find the angles opposite to the side 5, having given $\log 2 = \cdot30103$, $L \cos 27°53' = 9\cdot9464040$, diff. for $1' = \cdot0000669$. [C. U. 1941]

7. Find the greatest angle of the triangle whose sides are 5, 6, 7. Given $\log 6 = \cdot7781513$, $L \cos 39°14' = 9\cdot8890644$, diff. for $1' = 1032$. [U. P. B. 1944 ; Pat. U. 1933]

8. Find the greatest angle of the triangle whose sides are 12, 15, 16. (Use logarithmic tables) [C. U. 1957]

9. The sides of a triangle are 7, 8, 9 ; solve the triangle. (Use logarithmic tables) [C. U. 1938]

10. The sides of a triangle are 2, 3, 4 ; solve the triangle. (Use logarithmic tables)

5·3. প্রদত্ত দুইটি কোণ ও একটি বাহু হইতে ত্রিভুজের সমাধান।

মনে কর, কোন ত্রিভুজের দুইটি কোণ A ও B দেওয়া আছে ; এবং যে-কোন বাহু a দেওয়া আছে। ত্রিভুজের অপর দুই বাহু ও অবশিষ্ট কোণ নির্ণয় করিতে হইবে।

আমরা জানি, $A + B + C = 180°$; $\therefore \quad C = 180° - (A + B)$.

আবার, $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$ বলিয়া,

$$b = \frac{a \sin B}{\sin A}, \quad c = \frac{a \sin C}{\sin A}.$$

উদা. 3. If $a = 39$, $A = 81°35'$, $B = 27°55'$; solve the triangle. [C. U. 1933]

$$C = 180° - (A + B) = 180° - (81°35' + 27°55') = 70°30'.$$

তালিকা হইতে জানা যায়, $L \sin 81°35' = 9\cdot99530$, $L \sin 27°55' = 9\cdot67044$, $L \sin 70°\ 30' = 9\cdot97435$.

$$b = a\frac{\sin B}{\sin A} = 39 \times \frac{\sin 27°55'}{\sin 81°35'},$$

$\therefore \quad \log b = \log 39 + \log \sin 27° \; 55' - \log \sin 81° \; 35'$
$= \log 39 + L \sin 27° \; 55' - L \sin 81° \; 35'$
$= 1{\cdot}59106 + 9{\cdot}67044 - 9{\cdot}99530$
$= 1{\cdot}26620,$

$\therefore \quad b = 18{\cdot}46.$

আবার, $\quad c = a \times \dfrac{\sin C}{\sin A} = 39 \times \dfrac{\sin 70° \; 30'}{\sin 81° \; 35'}$

$\therefore \quad \log c = \log 39 + L \sin 70° \; 30' - L \sin 81° \; 35'$
$= 1{\cdot}59106 + 9{\cdot}97435 - 9{\cdot}99530$
$= 1{\cdot}57011,$

$\therefore \quad c = 37{\cdot}16,$

$\therefore \quad \mathbf{b = 18{\cdot}46, \; c = 37{\cdot}16, \; C = 70° \; 30'}.$

5·4. প্রদত্ত দুই বাহু ও তদন্তর্ভূত কোণ হইতে ত্রিভুজের সমাধান।

ত্রিভুজের দুই বাহু b ও c এবং তাহাদের অন্তর্ভূত কোণ A দেওয়া আছে। ত্রিভুজের সমাধান করিতে হইবে।

মনে কর, $b > c$; তাহা হইলে $\angle B > \angle C$ হইবে।

$$B + C = 180° - A \; ; \quad \therefore \quad \frac{B+C}{2} = 90° - \frac{A}{2}.$$

আবার, $\tan \dfrac{B-C}{2} = \dfrac{b-c}{b+c} \cot \dfrac{A}{2},$

$$\therefore \quad L \tan \frac{B-C}{2} = 10 + \log \left(\frac{b-c}{b+c} \cot \frac{A}{2} \right)$$

$$= \log (b-c) - \log (b+c) + L \cot \frac{A}{2}.$$

b, c ও A এর মান জানা থাকায়, দক্ষিণ পক্ষের মান নির্ণয় করিলে $L \tan \dfrac{B-C}{2}$ এর মান পাওয়া যায়। $L \tan \dfrac{B-C}{2}$ এর মান হইতে $\dfrac{B-C}{2}$ এর মান জানা যায়।

$\dfrac{B+C}{2}$ এবং $\dfrac{B-C}{2}$ এর মান হইতে সহজেই B ও C এর মান জানা যায়। এইরূপে প্রদত্ত A কোণকে লইয়া ত্রিভুজের তিনটি কোণই জানা গেল।

এখন, $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$, সূত্রটির সাহায্যে a এর মান পূর্ব্বের প্রক্রিয়ায় নির্ণয় করা যাইবে।

উদা. 4. Two sides of a triangle are 80 ft. and 100 ft. and the included angle is 60°. Find the other angles, having given, $\log 3 = \cdot 47712$ and $L \tan 10° 53' 36'' = 9\cdot 28432$. [C. U. 1923, '46]

মনে কর, $b=100'$, $c=80'$; তাহা হইলে, $A=60°$.

এখন, $\tan\dfrac{B-C}{2}=\dfrac{b-c}{b+c}\cot\frac{1}{2}A=\dfrac{100-80}{100+80}\cot 30°=\frac{1}{9}\sqrt{3}$;

$$\therefore\quad L\tan\frac{B-C}{2}=10+\log\tfrac{1}{9}\sqrt{3}=10+\log 3^{-\frac{3}{2}}=10-\tfrac{3}{2}\log 3$$

$$=10-\tfrac{3}{2}\times\cdot 47712=10-71568=9\cdot 28432$$

$$=L\tan 10°\,53'\,36''.$$

$$\therefore\quad \frac{B-C}{2}=10°\,53'\,36'';$$

আবার, $\dfrac{B+C}{2}=90°-\dfrac{A}{2}=90°-30°=60°.$

$\therefore$ $\mathbf{B=70°\,53'\,36''}$,

$\mathbf{C=49°\,6'\,24''}$.

উদা. 5. Two sides of a triangle are 3 and 5 feet and the included angle is 120°. Find the other angles. Given, $\log 48 = 1\cdot 6812412$, $L\tan 8° 12' = 9\cdot 1586706$, and diff. for $1' = \cdot 0008940$.

[C. U. 1940, '49]

এক্ষেত্রে মনে কর, $b=5'$, $c=3'$, সুতরাং, $120°=A$.

এখন, $\tan\dfrac{B-C}{2}=\dfrac{b-c}{b+c}\cot\dfrac{A}{2}=\dfrac{5-3}{5+3}\cot 60°=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{1}{\sqrt{48}}$,

$$\therefore\quad L\tan\frac{B-C}{2}=10+\log\frac{1}{\sqrt{48}}=10-\tfrac{1}{2}\log 48$$

$$=10-\tfrac{1}{2}\times 1\cdot 6812412=10-\cdot 8406206$$

$$=9\cdot 1593794.$$

দেওয়া আছে, $L \tan 8^\circ\ 12' = 9{\cdot}1586706$ এবং $1'$ এর অন্তর $= {\cdot}0008940$.

মনে কর, $\dfrac{B-C}{2} = 8^\circ\ 12'\ x''$.

$\therefore$ x'' এর অন্তর $= 9{\cdot}1593794 - 9{\cdot}1586706 = {\cdot}0037088$,

$\therefore \quad \dfrac{x}{60} = \dfrac{{\cdot}0007088}{{\cdot}0008940}$ বা $x = \dfrac{7088}{8940} \times 60 = 47{\cdot}6$ (প্রায়),

$$\therefore\ \frac{B-C}{2} = 8^\circ\ 12'\ 47{\cdot}6'',$$

$$\frac{B+C}{2} = 90^\circ - \frac{A}{2} = 90^\circ - 60^\circ = 30^\circ,$$

$$\therefore \quad \mathbf{B = 38^\circ\ 12'\ 47{\cdot}6'',\ C = 21^\circ\ 47'\ 12{\cdot}4''.}$$

প্রশ্নমালা 7

1. If in a triangle ABC, $a = 19$, $B = 52^\circ\ 28'$ and $C = 93^\circ\ 40'$, find b; having given $\log 19 = 1{\cdot}2787536$, $L \sin 52^\circ\ 28' = 9{\cdot}8992727$, $\log 27037 = 4{\cdot}4319585$, $\log 27038 = 4{\cdot}4319746$, $L \sin 33^\circ\ 52' = 9{\cdot}7460595$. [Pat. U. 1936]

2. Given $b = 10$, $A = 45^\circ$, $B = 66^\circ\ 42'\ 20''$, find a; given that $\log 2 = {\cdot}3010300$, $\log 7{\cdot}698622 = {\cdot}8864131$, $L \sin 66^\circ\ 42' = 9{\cdot}9630538$, diff. for $1' = 544$. [C. U. 1906]

3. If $B = 45^\circ$, $C = 10^\circ$, and $a = 200$ ft., find b; having given $\log 2 = {\cdot}3010300$, $\log 1726{\cdot}4 = 3{\cdot}2371414$, $\log 1726{\cdot}5 = 3{\cdot}2371666$, $L \sin 55^\circ = 9{\cdot}9133645$. [C. U. 1947]

4. The angles of a triangle are 40°, 60°, 80°, and the greatest side is 22 ft.; find the least side, given that

$L \sin 40^\circ = 9{\cdot}8080675$, $L \sin 80^\circ = 9{\cdot}9933515$,

$\log 22 = 1{\cdot}3424227$, $\log 14359 = 4{\cdot}1571242$,

diff. for $1 = {\cdot}0000302$. [Bombay, 1899]

5. Two sides of a triangle are 5 and 4 yds. and the included angle is 60°, find the other angles; having given $\log 3 = {\cdot}47712$, $L \tan 10^\circ\ 53' = 9{\cdot}28390$, $L \tan 10^\circ\ 54' = 9{\cdot}28458$.

6. In a plane triangle $b=540$, $c=420$, and $A=52° 6'$, find B and C; having given, $L \tan 26° 3' = 9{\cdot}6891430$, $L \tan 14° 20' = 9{\cdot}4074189$, $L \tan 14° 21' = 9{\cdot}4079543$.

[C. U. 1934 ; Pat. U. 1950]

7. If the sides a and b are in the ratio 7 : 3 and the included angle C is 60°, find A and B; given $\log 2 = {\cdot}3010300$, $\log 3 = {\cdot}4771213$, $L \tan 34° 42' = 9{\cdot}8403776$, diff. for $1' = 2699$.

[Pat. U. 1940 ; B. H. U. 1940]

8. Two sides of a plane triangle are 14 and 11 and the included angle is 60°. Find the remaining angles, having given, $\log 2 = {\cdot}3010300$, $\log 3 = {\cdot}4771213$, $L \tan 11° 44' = 9{\cdot}3174299$, $L \tan 11° 45' = 9{\cdot}3180640$. [C. U. 1944 ; B. H. U. 1948]

9. Two sides of a triangle are 18 and 2 ft. and the included angle is 55°. Find the remaining angles; having given, $\log 2 = {\cdot}3010300$, $L \cot 27° 30' = 10{\cdot}2835233$, $L \tan 56° 46' = 10{\cdot}1863769$ and diff. for $1' = {\cdot}0002763$. [C. U. 1942]

10. If $b=\sqrt{3}$, $c=1$ and $A=30°$, solve the triangle.

[C. U. 1951]

5·5. প্রদত্ত দুই বাহু এবং বাহুদ্বয়ের একটির বিপরীত কোণ হইতে ত্রিভুজের সমাধান।

কোন ত্রিভুজের দুই বাহু a, b এবং a বাহুর বিপরীত কোণ A দেওয়া আছে। ত্রিভুজটির সমাধান করিতে হইবে।

আমরা জানি, $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$.

$$\therefore \quad \sin B = \frac{b}{a} \sin A \quad \cdots \quad \cdots \quad \text{(i)}$$

$$\therefore \quad L \sin B = \log b - \log a + L \sin A \quad \cdots \quad \text{(ii)}$$

a, b এবং A এর মান জানা থাকায়, এই সমীকরণ হইতে B এর মান জানা যাইবে। এইরূপে A ও B এর মান জানিলে $\angle C$ এর মান সহজেই জানা যাইবে। কারণ, $\angle C = 180° - (A+B)$.

আবার, $c = \dfrac{a \sin C}{\sin A}$,

$$\text{বা,} \quad \log c = \log a + L \sin C - L \sin A. \quad \cdots \quad \cdots \quad \text{(iii)}$$

এই সমীকরণ হইতে c এর মান জানা যাইবে।

প্রথম সমীকরণ হইতে ত্রিভুজ সম্পর্কে প্রদত্ত উপাত্ত বিষয়ে তিনটি সম্ভাবনা দেখা যাইতেছে। প্রদত্ত উপাত্ত হইতে

(1) কোন ত্রিভুজই অঙ্কন করা সম্ভব নহে।

(2) মাত্র একটি ত্রিভুজ অঙ্কন সম্ভব।

(3) দুইটি ত্রিভুজ অঙ্কন সম্ভব।

(1) যদি $b \sin A > a$ অর্থাৎ $a < b \sin A$ হয়, তাহা হইলে

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a} > 1$$

হইবে; অর্থাৎ $\sin B$ এর মান 1 অপেক্ষা বড় হইবে। কিন্তু বাস্তব ক্ষেত্রে কোন কোণের sine 1 অপেক্ষা বড় হইতে পারে না। সুতরাং এরূপ কোণের অস্তিত্ব অসম্ভব বলিয়া এক্ষেত্রে **কোন ত্রিভুজই অঙ্কন করা সম্ভব হইবে না।**

(2) যদি $b \sin A = a$ হয়, তাহা হইলে $\sin B = \frac{b \sin A}{a} = 1$ হইবে; অর্থাৎ $B = 90°$ হইবে। এক্ষেত্রে **একটিমাত্র সমকোণী ত্রিভুজ অঙ্কন সম্ভব** যদি $b > a$ হয়। কিন্তু $b = a$ হইলে **কোন ত্রিভুজই অঙ্কন করা সম্ভব হইবে না।**

(3) যদি $b \sin A < a$ অর্থাৎ $a > b \sin A$ হয়, তাহা হইলে

$$\sin B = \frac{b \sin A}{a} < 1$$

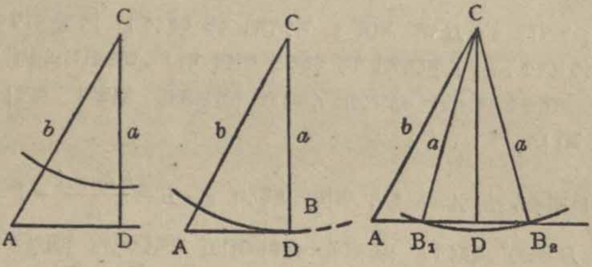
হইবে; অর্থাৎ $\sin B$ এর মান 1 অপেক্ষা কম হইবে। কিন্তু $\sin (\pi - B) = \sin B$ বলিয়া $\pi - B$ ও B উভয় কোণের sine ই সমান হইবে। এক্ষেত্রে ইহাদের মধ্যে একটি কোণ সূক্ষ্মকোণ হইবে এবং অপর কোণটি স্থূলকোণ হইবে।

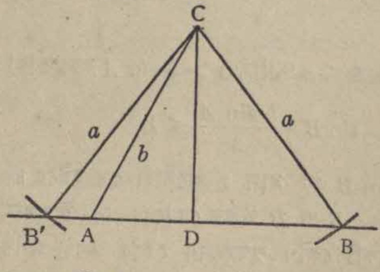
যদি $b < a$ হয় তবে $B < A$ হইবে। সুতরাং B কোণটিকে অবশ্যই সূক্ষ্মকোণ লইতে হইবে। আবার $b = a$ হইলেও $B = A$ হইবে, এবং এক্ষেত্রেও B কোণটি সূক্ষ্মকোণ হওয়া আবশ্যক। সুতরাং $b \leqslant a$ হইলে B কোণের দুইটি মানের মধ্যে 90° অপেক্ষা কম মান (সূক্ষ্মকোণ) লইতে হইবে। অতএব এক্ষেত্রে **একটিই মাত্র** ত্রিভুজ অঙ্কন করা যাইবে।

কিন্তু যদি $b > a$, তাহা হইলে $B > A$ হইবে। এক্ষেত্রে B কোণ সূক্ষ্মকোণও হইতে পারে, স্থূলকোণও হইতে পারে। সুতরাং এক্ষেত্রে **দুইটি ত্রিভুজ** অঙ্কন সম্ভব হইবে। সুতরাং $a > b \sin A$ কিন্তু $a < b$ হইলে প্রদত্ত উপাত্ত হইতে দুইটি ত্রিভুজ অঙ্কন সম্ভব। ত্রিভুজের সমাধানে ইহাকে **দ্ব্যর্থক ক্ষেত্র** (Ambiguous case) বলা হয়। যে ক্ষেত্রে দুইটি বাহু ও ক্ষুদ্রতর বাহুটির বিপরীত কোণ দেওয়া থাকে, কেবলমাত্র সেই ক্ষেত্রেই দ্ব্যর্থক সমাধানের উদ্ভব হইতে পারে।

5·6. জ্যামিতিক আলোচনা।

উপরের তথ্যগুলি জ্যামিতির সাহায্যে সহজেই দেখানো যায়।





প্রদত্ত b বাহুর সমান করিয়া AC সরল রেখা আঁকা হইয়াছে। প্রদত্ত কোণ A এর সমান করিয়া $\angle CAD$ আঁকা হইয়াছে। CD সরলরেখা C হইতে AD এর উপর লম্ব। সুতরাং, $CD = b \sin A$. C কে কেন্দ্র করিয়া প্রদত্ত বাহু a এর সমান ব্যাসার্দ্ধ লইয়া বৃত্তচাপ অঙ্কিত করা হইল।

(a) $a < b \sin A$ হইলে, এই বৃত্ত AD রেখাকে আদৌ ছেদ করিবে না। সুতরাং এক্ষেত্রে কোন ত্রিভুজই পাওয়া যাইবে না।

(b) $a = b \sin A$ হইলে, এই বৃত্ত AD কে D বিন্দুতে স্পর্শ করিবে। সুতরাং এক্ষেত্রে একটিমাত্র ত্রিভুজ পাওয়া যাইবে এবং তাহা একটি সমকোণী ত্রিভুজ হইবে।

(c) $a > b \sin A$ কিন্তু $a < b$ হইলে, এই বৃত্ত AD কে B_1 ও B_2 বিন্দুতে ছেদ করিবে এবং এক্ষেত্রে দুইটি ত্রিভুজ পাওয়া যাইবে। এবং দুইটি ত্রিভুজেরই অঙ্গসমূহ প্রদত্ত উপাত্তের সহিত সঙ্গতিযুক্ত হইবে।

(d) $a = b$ হইলে, বৃত্তটি AD কে A বিন্দু ছাড়া আর কেবলমাত্র একটি বিন্দু B তে ছেদ করিবে। সুতরাং এক্ষেত্রে একটিই মাত্র ত্রিভুজ পাওয়া যাইবে।

(e) $a > b$ হইলে বৃত্তটি AD কে B' ও B দুইটি বিন্দুতে ছেদ করিবে। কিন্তু কেবলমাত্র CAB ত্রিভুজটিই উপাত্তের সহিত সঙ্গতিপূর্ণ হইবে। কারণ $\angle CAB = \angle A$; কিন্তু CAB' ত্রিভুজে $\angle CAB'$ কোণ A কোণের সমান নহে। সুতরাং এক্ষেত্রেও একটিমাত্র ত্রিভুজ পাওয়া যাইবে।

উদা. 6. If in a triangle ABC, $b = 16$, $c = 25$, and $B = 33°15'$, calculate the other angles, having given,

$$\log 2 = \cdot 30103, \qquad L \sin 33°15' = 9\cdot 7390129,$$

$$L \sin 58°56' = 9\cdot 9327616 \quad \text{and} \quad L \sin 58°57' = 9\cdot 9328376.$$

আমরা জানি, $\dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$; $\therefore \sin C = \dfrac{c \sin B}{b}$;

$$\begin{aligned} \therefore \quad L \sin C &= \log c - \log b + L \sin B \\ &= \log 25 - \log 16 + L \sin 33°15' \\ &= (\log 100 - 2 \log 2) - 4 \log 2 + L \sin 33°15' \\ &= 2 - 6 \log 2 + L \sin 33°15' \\ &= 2 - 6 \times \cdot 30103 + 9\cdot 7390129 \\ &= 2 - 1\cdot 80618 + 9\cdot 7390129 \\ &= 9\cdot 9328329. \end{aligned}$$

দেওয়া আছে, $L \sin 58°57' = 9\cdot 9328376$

এবং $L \sin 58°57' = 9\cdot 9327616$;

$\therefore$ $1'$ এর অন্তর $= \cdot 0000760$.

মনে কর, $C = 58°\ 56'\ x''$.

$\therefore$ x'' এর অন্তর $= 9\cdot 9328329 - 9\cdot 9327616 = \cdot 0000713$;

$\therefore$ $\dfrac{x}{60} = \dfrac{\cdot 0000713}{\cdot 0000760}$, বা, $x = \dfrac{713}{760} \times 60 = 56\cdot 3$ (প্রায়);

$\therefore \quad \mathbf{C = 58°56'56{\cdot}3''}$;

$\therefore \quad \mathbf{A} = 180° - (B + C) = 180° - (33°15' + 58°56'56{\cdot}3'')$

$= 180° - 92°11'56{\cdot}3'' = \mathbf{87°48'3{\cdot}7''}$

কিন্তু এক্ষেত্রে $c > b$ বলিয়া, $C > B$;

$\therefore$ C কোণের অপর মানটি লইয়াও আর একটি ত্রিভুজ অঙ্কন করা যাইবে।

$\mathbf{C'} = 180° - C = 180° - 58°56'56{\cdot}3'' = \mathbf{121°3'3{\cdot}7''}$

এবং $\mathbf{A'} = 180° - (B + C') = 180° - (33°15' + 121°3'3{\cdot}7'')$

$= 180° - 154°18'3{\cdot}7'' = \mathbf{25°41'56{\cdot}3''}$.

উদা. 7. If $a = 5$, $b = 7$, and $A = 30°$, find B in degrees and minutes, having given $\sin 44° = {\cdot}6947$, $\sin 45° = {\cdot}7071$.

[C. U. 1929]

আমরা জানি, $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B}$.

$$\therefore \quad \sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{7 \sin 30°}{5} = \frac{7}{10} = {\cdot}7.$$

দেওয়া আছে, $\sin 45° = {\cdot}7071$, $\sin 44° = {\cdot}6947$.

$\therefore$ $1°$ এর অন্তর $= {\cdot}0124$.

মনে কর, $B = 44°\, x'$; $\therefore$ x' এর অন্তর $= {\cdot}7 - {\cdot}6947 = {\cdot}0053$.

$\therefore \quad \dfrac{x}{60} = \dfrac{{\cdot}0053}{{\cdot}0124}$; $\therefore \quad x = \dfrac{53}{124} \times 60 = 25{\cdot}6$ (প্রায়) ;

$\therefore \quad \mathbf{B = 44°25{\cdot}6'}$.

কিন্তু $b > a$ হওয়ায় $B > A$; সুতরাং, B কোণটি স্থূলকোণও হইতে পারে। B এর অপর মানকে B' দ্বারা সূচিত করিলে,

$\mathbf{B'} = 180° - B = 180° - 44°25{\cdot}6'$

$= \mathbf{135°34{\cdot}4'}$.

5·7. প্রদত্ত তিনটি কোন হইতে ত্রিভুজের সমাধান।

কেবলমাত্র তিনটি কোণ দেওয়া থাকিলে কোন ত্রিভুজের বাহু তিনটিকে যথাযথভাবে নির্ণয় করা যায় না। কারণ কোন ত্রিভুজ ABC এর সদৃশ সকল ত্রিভুজেরই কোণ তিনটি যথাক্রমে ABC এর তিনটি কোণের সমান। এই সকল সদৃশ ত্রিভুজের বাহুগুলি সমানুপাতিক মাত্র, সমান নহে। সুতরাং, তিনটি কোণ দেওয়া থাকিলে 'সাইন-সূত্রের' সাহায্যে ত্রিভুজের বাহু তিনটির কেবলমাত্র অনুপাত নির্ণয় করা যায়।

উদা. 8. The angles of a triangle are as $1:2:3$; find the ratios between the sides.

মনে কর, কোণ তিনটি যথাক্রমে θ, 2θ এবং 3θ.

$\therefore\quad 180^\circ = \theta + 2\theta + 3\theta = 6\theta, \quad \therefore\quad \theta = 30^\circ.$

সুতরাং, কোণগুলি যথাক্রমে 30°, 60° এবং 90°.

আমরা জানি $\dfrac{a}{\sin A} = \dfrac{b}{\sin B} = \dfrac{c}{\sin C}$,

অর্থাৎ, $\mathbf{a : b : c} = \sin A : \sin B : \sin C$

$$= \sin 30^\circ : \sin 60^\circ : \sin 90^\circ$$

$$= \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} : 1$$

$$= \mathbf{1 : \sqrt{3} : 2.}$$

প্রশ্নমালা 8

1. If $A = 45^\circ$, $b = 1 + \sqrt{3}$, $a = 2$, find B, C and c.

2. If in a triangle $a = 5$, $b = 4$ and $A = 45^\circ$, find the remaining angles, having given,

$\log 2 = \cdot 30103$, $L \sin 34^\circ\, 26' = 9\cdot 7523919$,
$L \sin 34^\circ\, 27' = 9\cdot 7525761$. [B. H. U. 1951]

3. If $a = 13$, $b = 20$, $A = 36^\circ\, 52'\, 11\cdot 5''$, solve the triangle, having given, $\log 2 = 0\cdot 3010300$, $\log 11 = 1\cdot 0413927$, $\log 13 = 1\cdot 1139434$, $\log 21 = 1\cdot 3222193$, $L \sin 67^\circ\, 22'\, 48\cdot 5'' = 9\cdot 9652379$, $L \sin 75^\circ 45' = 9\cdot 9864272$, $L \sin 30^\circ\, 30'\, 37'' = 9\cdot 7056006$.

4. Give a complete solution, finding c first, of the case in which $a = 5$ ft., $b = 8$ ft., and $A = 30^\circ$; given that $\sqrt{3} = 1\cdot 732051$, $\sin 83^\circ\, 7' = \cdot 9927922$, diff. for $1' = \cdot 0000349$.

5. If $a = 5$ ft., $b = 8$ ft., $A = 35^\circ$, find the smaller value of c, having given,

$\log 2 = \cdot 30103$, $L \sin 35^\circ = 9\cdot 758591$,
$\log 456706 = 5\cdot 659637$, $L \sin 66^\circ\, 35' = 9\cdot 962672$,
$L \sin 31^\circ\, 35'\, 43'' = 9\cdot 719261$, $L \sin 66^\circ\, 36' = 9\cdot 962727$.
[A. U. 1913]

6. If a, b and A of $\triangle ABC$ be given, prove that in the ambiguous case the difference between the two values of c is $2\sqrt{a^2 - b^2 \sin^2 A}$. [B. H. U. 1941]

7. Show that in the case that admits of two solutions, the two values of C satisfy the equation

$$\frac{(a+b)^2}{1+\cos C} + \frac{(b-a)^2}{1-\cos C} = \frac{2a^2}{\sin^2 A}.$$ [B. H. U. 1942]

8. If, a, b, A are given and if c_1, c_2 be the values of the third side in the ambiguous case, prove the following, if $c_1 > c_2$,

(i) $c_1 - c_2 = 2a \cos B$. [B. H. U. 1928]

(ii) $c_1{}^2 + c_2{}^2 - 2c_1c_2 \cos 2A = 4a^2 \cos^2 A$. [Pat. U. 1936]

9. The angles of a triangle are as 7 : 3 : 2, find the ratios of the sides.

10. The angles of a triangle are 2 : 3 : 4 ; find the ratios of the sides.

ষষ্ঠ অধ্যায়

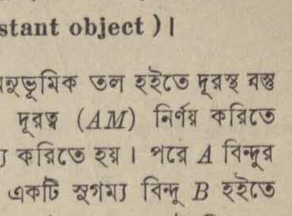
উচ্চতা ও দূরত্ব

(Heights and Distance)

6·1. দূরস্থ বস্তুর উচ্চতা ও দূরত্ব নির্ণয় (Determination of the height and distance of a distant object)।

মনে কর, পর্য্যবেক্ষণ দ্বারা কোন A বিন্দুর অনুভূমিক তল হইতে দূরস্থ বস্তু P এর উচ্চতা এবং A হইতে P এর পাদবিন্দুর দূরত্ব (AM) নির্ণয় করিতে হইবে। প্রথমে A বিন্দু হইতে P এর উন্নতি লক্ষ্য করিতে হয়। পরে A বিন্দুর সহিত একই অনুভূমিক তলে অবস্থিত অপর কোন একটি সুগম্য বিন্দু B হইতে P এর উন্নতির পরিমাপ করিতে হয়। A ও B বিন্দু হইতে P এর উন্নতি এবং AB দূরত্বের পরিমাপ হইতে P এর উচ্চতা নির্ণয় করা যায়।

(a) A ও B বিন্দুদ্বয় P এর সহিত একই উল্লম্ব-তলে অবস্থিত



P হইতে AB রেখার উপর PM লম্ব।

মনে কর, A এবং B বিন্দু হইতে P বিন্দুর উন্নতি যথাক্রমে α ও β; এবং $AB = a$.

মনে কর, A বিন্দুর অনুভূমিক তল হইতে P এর উচ্চতা $PM = h$ এবং $AM = d$. চিত্র হইতে দেখা যাইতেছে,

$$a = AB = AM - BM = h \cot \alpha - h \cot \beta$$

$$= h\left(\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} - \frac{\cos \beta}{\sin \beta}\right)$$

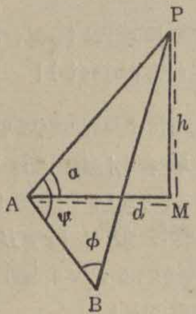
$$= h\left(\frac{\cos \alpha \sin \beta - \sin \alpha \cos \beta}{\sin \alpha \sin \beta}\right) = h\frac{\sin(\beta - \alpha)}{\sin \alpha \sin \beta};$$

$$\therefore \quad h=\frac{\mathbf{a}\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}=\mathbf{a}\sin\alpha\sin\beta\operatorname{cosec}(\beta-\alpha).$$

$$d=AM=h\cot\alpha=a\sin\alpha\sin\beta\operatorname{cosec}(\beta-\alpha)\cot\alpha$$
$$=\mathbf{a}\cos\alpha\sin\beta\operatorname{cosec}(\beta-\alpha).$$

লগারিদ্‌মের সাহায্যে এখন সহজেই h বা d এর মান নির্ণয় করা যায়।

(b) A ও B বিন্দুদ্বয় P এর সহিত বিভিন্ন উল্লম্ব-তলে অবস্থিত



P এবং A যে উল্লম্ব-তলে অবস্থিত, B তাহা হইতে ভিন্ন উল্লম্ব-তলে অবস্থিত।

এক্ষেত্রে P এর উচ্চতা বা দূরত্ব জানিতে হইলে A হইতে P এর উন্নতি α, $\angle PAB=\psi$ এবং $\angle PBA=\phi$ এবং AB এর দূরত্ব a এর পরিমাপ করা প্রয়োজন। এই চারিটি বিষয় জানিলে P এর উচ্চতা $PM(h)$ বা দূরত্ব $AM\ (d)$ সহজেই জানা যাইবে।

আমরা sine-সূত্র হইতে জানি, PAB ত্রিভুজে,

$$\frac{AP}{\sin\phi}=\frac{BP}{\sin\psi}=\frac{AB}{\sin APB};$$

$$\therefore \quad AP=\frac{AB\sin\phi}{\sin APB}=\frac{a\sin\phi}{\sin\{180^\circ-(\phi+\psi)\}}=\frac{a\sin\phi}{\sin(\phi+\psi)}.$$

আবার, PAM ত্রিভুজে, $AP=PM\operatorname{cosec}\alpha=h\operatorname{cosec}\alpha$;

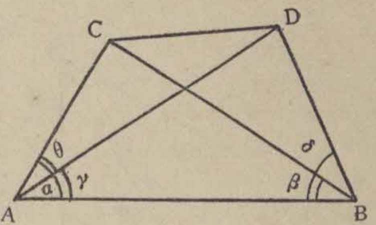
$$\therefore \quad h\operatorname{cosec}\alpha=\frac{a\sin\phi}{\sin(\phi+\psi)}.$$

$$\therefore \quad \mathbf{h}=\frac{\mathbf{a}\sin\phi\sin\alpha}{\sin(\phi+\psi)}$$
$$=\mathbf{a}\sin\phi\sin\alpha\operatorname{cosec}(\phi+\psi).$$

$$\therefore \quad \mathbf{d}=h\cot\alpha=\mathbf{a}\sin\phi\cos\alpha\operatorname{cosec}(\phi+\psi).$$

এই সূত্রদ্বয় হইতেও লগারিদ্‌মের সাহায্যে সহজেই h ও d এর মান নির্ণয় করা যায়।

6·2. দুইটি অগম্য বস্তুর মধ্যবর্তী দূরত্ব (Distance between two inaccessible objects) I



C ও D দুইটি অগম্য বস্তু। উহাদের মধ্যের দূরত্ব CD নির্ণয় করিতে হইবে। কোন বিন্দু A এবং A হইতে সুগম্য আর একটি বিন্দু B হইতে পর্য্যবেক্ষণ করিয়া $\angle CAB=\alpha$, $\angle DAB=\gamma$, $\angle CAD=\theta$, $\angle CBA=\beta$ এবং $\angle DBA=\delta$ নির্ণয় করা হয়। এবার AB এর দূরত্ব a জানিলে CD এর দূরত্ব জানা যাইবে।

CAB ত্রিভুজে, $\dfrac{AC}{\sin CBA}=\dfrac{BC}{\sin CAB}=\dfrac{AB}{\sin ACB}$;

$$\therefore \quad AC=\frac{AB \sin CBA}{\sin ACB}=\frac{a \sin \beta}{\sin (\alpha+\beta)} \qquad \cdots \text{(i)}$$

$$[\because \quad \angle ACB=180^\circ-\alpha-\beta]$$

আবার DAB ত্রিভুজে, $\dfrac{AD}{\sin DBA}=\dfrac{BD}{\sin DAB}=\dfrac{AB}{\sin ADB}$;

$$\therefore \quad AD=\frac{AB \sin DBA}{\sin ADB}=\frac{a \sin \delta}{\sin (\gamma+\delta)} \qquad \cdots \text{(ii)}$$

$$[\because \quad \angle ADB=180^\circ-\gamma-\delta]$$

এখন, ACD ত্রিভুজে,

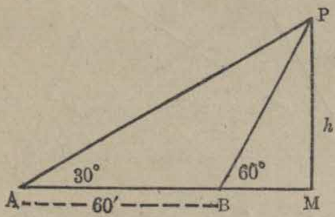
$$CD^2=AC^2+AD^2-2AC.AD \cos \theta \qquad \cdots \text{(iii)}$$

(i) ও (ii) সমীকরণ হইতে AC ও AD এর মান পাওয়া যায়। AC ও AD এর এই মান তৃতীয় সমীকরণে বসাইলে CD এর মান পাওয়া যাইবে।

উদা. 1. The altitude of a tower as observed from two places A and B in the same vertical plane with the tower are respectively 30° and 60°. If the distance between A and B be 60 ft., find the height of the tower.

মনে কর, উচ্চতা $= h$.

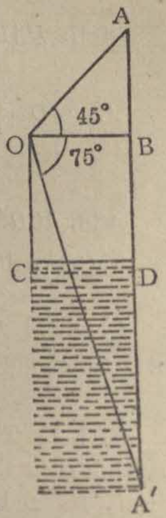
নিম্নস্থ চিত্র হইতে দেখা যাইতেছে,



$$AB = AM - BM$$
$$= PM \cot 30^\circ - PM \cot 60^\circ$$
$$= h(\cot 30^\circ - \cot 60^\circ)$$
$$= h\left(\sqrt{3} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = h \cdot \frac{2}{\sqrt{3}}.$$
$$\therefore\ h = \frac{\sqrt{3}}{2} AB = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 60'$$
$$= 30' \times 1{\cdot}732 \text{ (প্রায়)}$$
$$= 51{\cdot}96 \text{ ফুট (প্রায়)।}$$

$\therefore$ উচ্চতা $= 51{\cdot}96$ ফুট (প্রায়)।

উদা. 2. The angle of elevation of an aeroplane from a point 200 ft. above a lake is 45° and the angle of depression of its reflection is 75°. Find the height of the aeroplane above the surface of the lake. Assume that the image is vertically below the aeroplane at a depth below the lake surface equal to the height above the surface. [B. H. U. 1943]



মনে কর, এরোপ্লেনটি A এবং A' উহার প্রতিবিম্ব ; CD জলতল। AA' উল্লম্ব-রেখা। $DA = DA'$. পর্য্যবেক্ষণ-কেন্দ্র O জলতল হইতে 200 ফুট উচ্চে। O বিন্দুতে A এর উন্নতি 45° এবং A' এর অবনতি 75°, অতএব, AA' এর উপর OB লম্ব হইলে $\angle BOA = 45^\circ$ এবং $\angle BOA' = 75^\circ$, এবং $BD = 200$ ফুট ;

$$\therefore\ \frac{AB}{A'B} = \frac{OB \tan 45^\circ}{OB \tan 75^\circ} = \frac{\tan 45^\circ}{\tan 75^\circ};$$

$$\therefore\ \frac{AB + A'B}{A'B - AB} = \frac{\tan 45^\circ + \tan 75^\circ}{\tan 75^\circ - \tan 45^\circ},$$

বা, $$\frac{AA'}{2BD} = \frac{\sin 45^\circ \cos 75^\circ + \sin 75^\circ \cos 45^\circ}{\sin 75^\circ \cos 45^\circ - \sin 45^\circ \cos 75^\circ},$$

বা, $$\frac{2AD}{2BD} = \frac{\sin (45^\circ + 75^\circ)}{\sin (75^\circ - 45^\circ)} = \frac{\sin 120^\circ}{\sin 30^\circ} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}.$$

$$\left[\begin{array}{l} AB + A'B = AD + A'D = 2AD, \\ A'B - AB = (A'D + BD) - (AD - BD) = 2BD \end{array}\right]$$

$\therefore\ AD = \sqrt{3}BD = \sqrt{3} \times 200$ ফুট

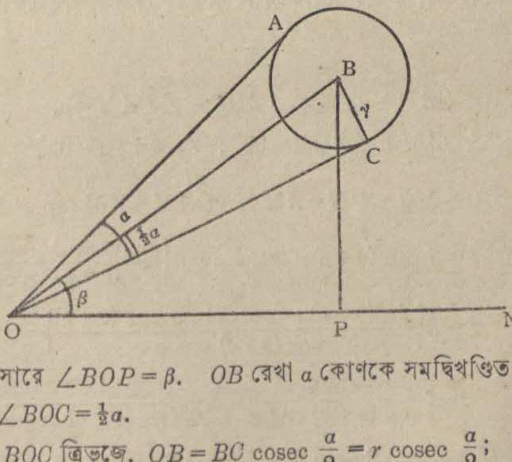
$= 200 \times 1{\cdot}732$ ফুট $= 346{\cdot}4$ ফুট।

$\therefore$ **নির্ণেয় উচ্চতা $= 346{\cdot}4$ ফুট।**

উদা. 3. A spherical balloon whose radius is r feet subtends at an observer's eye an angle α, when the angular elevation of its centre is β. Determine the height of the centre of the balloon. [C. U. 1953]

মনে কর, O দর্শকের চক্ষু। AC বেলুন O বিন্দুতে α কোণ ধারণ করে ; অর্থাৎ O হইতে B কেন্দ্রীয় AC গোলকে OA এবং OC স্পর্শক টানিলে $\angle AOC = \alpha$ হইবে।

ON অনুভূমিক রেখা O বিন্দুর মধ্য দিয়া গিয়াছে। B হইতে ON এর উপর BP লম্ব টানা হইল। BP ই বেলুনের কেন্দ্রের উদ্দিষ্ট উচ্চতা। OB যোগ কর।



শর্তানুসারে $\angle BOP = \beta$. OB রেখা α কোণকে সমদ্বিখণ্ডিত করিয়াছে।

$\therefore\ \angle BOC = \frac{1}{2}\alpha.$

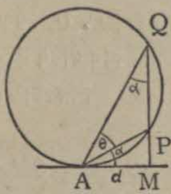
এখন, BOC ত্রিভুজে, $OB = BC \operatorname{cosec} \frac{\alpha}{2} = r \operatorname{cosec} \frac{\alpha}{2}$;

$\therefore\ BOP$ ত্রিভুজে, $BP = OB \sin\beta = r \operatorname{cosec} \frac{\alpha}{2} \sin\beta.$

$\therefore$ **নির্ণেয় উচ্চতা $= \mathbf{r \operatorname{cosec} \frac{\alpha}{2} \sin\beta}$.**

উদা. 4. A man, walking towards a building on which a flagstaff is fixed, observes the angle subtended by the flagstaff to be the greatest when he is at a distance of d from the building. If θ be the observed greatest angle, find the length of the flagstaff and the height of the building. [P. U. 1941]

মনে কর, PM একটি অট্টালিকা এবং উহার উপর অবস্থিত PQ একটি



পতাকাদণ্ড। PM হইতে A বিন্দুর দূরত্ব যেন d ; সুতরাং, প্রদত্ত শর্ত অনুসারে A বিন্দুতে PQ এর সম্মুখকোণ বৃহত্তম (অর্থাৎ AM এর উপর যে-কোন বিন্দুতে PQ এর সম্মুখকোণ θ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর)। PQ ও PM এর মান নির্ণয় করিতে হইবে। জ্যামিতির সাহায্যে জানা যায় যে, P, Q ও A বিন্দুত্রয় দিয়া অঙ্কিত বৃত্তটি যদি AM কে A বিন্দুতে স্পর্শ করে, তবেই AM এর উপর A বিন্দুতে PQ এর সম্মুখকোণটি বৃহত্তম হইবে।

মনে কর, $\angle PAM = \alpha, \quad \therefore \angle AQP = \angle PAM = \alpha,$

$\because \angle QAM + \angle AQM = 90^\circ ; \quad \therefore \theta + 2\alpha = 90^\circ.$

এক্ষণে, $PQ = MQ - PM = AM \tan QAM - AM \tan PAM$

$$= d \tan(\theta+\alpha) - d \tan \alpha = d\left\{\frac{\sin(\theta+\alpha)}{\cos(\theta+\alpha)} - \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}\right\}$$

$$= d\left\{\frac{\sin(\theta+\alpha)\cos\alpha - \sin\alpha\cos(\theta+\alpha)}{\cos(\theta+\alpha)\cos\alpha}\right\}$$

$$= d\,\frac{\sin\theta}{\cos(\theta+\alpha)\cos\alpha} = d\,\frac{2\sin\theta}{2\cos(\theta+\alpha)\cos\alpha}$$

$$= \frac{2d\sin\theta}{\cos(\theta+2\alpha)+\cos\theta} = \frac{2d\sin\theta}{\cos 90^\circ + \cos\theta}$$

[$\because \theta + 2\alpha = 90^\circ$]

$$= \frac{2d\sin\theta}{\cos\theta} = 2d\tan\theta. \quad [\because \cos 90^\circ = 0]$$

আবার, $\because\ \theta + 2\alpha = 90°$, $\therefore\ \alpha = 45° - \frac{1}{2}\theta = \frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}$.

$$\therefore\quad PM = d \tan \alpha = d \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right).$$

প্রশ্নমালা 9

1. A is the top of a tower, B and C are two points in the horizontal plane on which it stands. The elevation of A as observed from B, C are β and γ respectively. Show that

$$\tan ABC = \frac{\sin \alpha \sin \beta}{\sin \gamma - \cos \alpha \sin \beta}, \tan ACB = \frac{\sin \alpha \sin \gamma}{\sin \beta - \cos \alpha \sin \gamma},$$

where α is the angle subtended at A by BC.

2. A vertical tower c ft. in height stands on the top of a hill. A and B are two points on the same horizontal plane at the foot of the hill. From A the tower lies due north and the angular elevation of the base and the top of the tower are α and β. From B the tower lies due west, and the angular elevation of the summit is 45°. Show that the distance from A to B is $c \cos \alpha / \sin(\beta - \alpha)$.

3. The elevation of a tower due north of a point A is θ and at a point B due west of A is ϕ ; prove that the altitude is

$$\frac{AB \sin \theta \sin \phi}{\sqrt{(\sin^2\theta - \sin^2\phi)}}$$ [P. U. 1938, Sup.]

4. From a point on a hill-side of constant inclination, the altitude of the highest point of an obelisk at the top of the hill is observed to be α ; a ft. nearer the top of the hill, it is observed to be β ; show that if h be the height of the obelisk, θ the inclination of the hill to the horizon,

$$\cos \theta = \frac{a \sin(\alpha - \theta) \sin(\beta - \theta)}{h \sin(\beta - \alpha)}.$$

5. The upper half of a pole, seen from a point on a level with the foot of the pole, subtends an angle whose tangent is $\frac{1}{3}$. Find the tangent of the angle subtended at the same point by the whole post. [B. H. U. 1942]

6. A person standing on the slope of a hill of inclination α observes that the angle of elevation of the top of a pillar standing at the foot of the hill is 30°. He then walks a distance a down the hill towards the pillar, and finds the angle of elevation of the top of the pillar to be 60°. Show that the height of the pillar is

$$\tfrac{1}{2}a\,(\sqrt{3}\sec\alpha + 4\sin\alpha).$$

7. At each end of a horizontal base of length $2a$, it is found that the angular height of a certain peak is θ and that at the middle point of it is ϕ. Prove that the vertical height of the peak is

$$\frac{a\sin\theta\sin\phi}{\sqrt{\sin(\phi+\theta)\sin(\phi-\theta)}}$$ [U. P. B. 1955]

8. The angular elevation of a tower at a plane A due south of it is 30° and at a place B due west of A at a distance a from it, the elevation is 18°. Show that the height of the tower is

$$\frac{a}{\sqrt{(2+2\sqrt{5})}}.$$

9. From an aeroplane vertically over a straight horizontal road, the angles of depression of two consecutive mile-stones on two opposite sides of the aeroplane are observed to be α and β. Show that the height in miles of the aeroplane above the road is given by

$$\frac{\tan\alpha\tan\beta}{\tan\alpha+\tan\beta}.$$ [C. U. 1952]

10. The angles of depression of two objects 360 ft. apart from the top of a hill are 27° 12′ and 18° 24′ respectively. Find the height of the hill, assuming the objects and the top of the hill are in the same vertical plane.

[Given, $\log 360 = 2{\cdot}5563$, $\log 339{\cdot}4 = 2{\cdot}5308$, $\log\sin 27°\,12' = \bar{1}{\cdot}6600$, $\log\sin 18°\,24' = \bar{1}{\cdot}4992$, $\log\sin 8°\,48' = \bar{1}{\cdot}1847$].

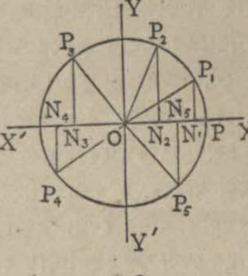
[C. U. 1958]

সপ্তম অধ্যায়

লেখ (Graphs)

7·1. কোণের পরিমাণ-বৃদ্ধির সহিত ত্রৈকোণমিতিক অনুপাতের পরিবর্তন।

মনে কর, কোন ঘূর্ণ্যমান সরলরেখা OP উহার প্রথম অবস্থান OX হইতে আরম্ভ করিয়া ঘড়ির কাঁটার বিপরীত দিকে $0°$ হইতে ক্রমশঃ $360°$ কোণ পর্য্যন্ত ঘুরিল।



O কে কেন্দ্র করিয়া এবং যে-কোন ব্যাসার্দ্ধ লইয়া একটি বৃত্ত আঁক। P_1, P_2 ইত্যাদি ঘূর্ণ্যমান সরলরেখা OP এর বিভিন্ন অবস্থানে বৃত্তের সহিত উহার ছেদবিন্দুসমূহ। স্পষ্টই বৃত্তের ব্যাসার্দ্ধ $= OP_1 = OP_2 = OP_3 = OP_4 = OP_5$. OP এর বিভিন্ন অবস্থানে XOP কোণের ত্রৈকোণমিতিক অনুপাত-সমূহ নির্ণয়ে, সহজেই অনুমেয়, P_1, P_2 প্রভৃতি বিন্দু হইতে P_1N_1, P_2N_2, P_3N_3, P_4N_4, P_5N_5, OX এর উপর লম্ব হইলে, ঐ সকল ক্ষেত্রে OP_1, OP_2, OP_3, OP_4, OP_5 হইবে অতিভুজ, ON_1, ON_2, ON_3, ON_4, ON_5 হইবে সন্নিহিত বাহু এবং P_1N_1, P_2N_2, P_3N_3, P_4N_4, P_5N_5 হইবে বিপরীত বাহু।

(i) কোণের sine এর মানের পরিবর্ত্তন :

$\text{Sine} = \dfrac{\text{বিপরীত বাহু}}{\text{অতিভুজ}}$. যখন ঘূর্ণ্যমান সরলরেখাটি OX এর সহিত মিলিয়া থাকে, তখন XOP কোণের পরিমাণ $0°$, এবং তখন অতিভুজ = বৃত্তের ব্যাসার্দ্ধ, কিন্তু বিপরীত বাহুর পরিমাণ 0 ; সুতরাং, $\sin 0° = 0$. কোণ $0°$ হইতে $90°$ পর্য্যন্ত বাড়িতে থাকিলে, স্পষ্টই অতিভুজ সর্ব্বদা ব্যাসার্দ্ধের সমান থাকে, কিন্তু চিত্রটি পরীক্ষা করিলে দেখা যাইবে, বিপরীত বাহু P_1N_1, P_2N_2 ক্রমেই বাড়িয়া চলিবে ; তাহা হইলে $\angle XOP = \theta$ মনে করিলে, $\sin \theta$ ও θ এর $0°$ হইতে $90°$ মানের জন্য ক্রমেই বাড়িয়া চলিবে। যখন $\theta = 90°$ হইবে, তখন অতিভুজ ও বিপরীত বাহু সমান হইবে বলিয়া $\sin \theta = 1$ হইবে। θ যখন $90°$ হইতে বাড়িয়া $180°$ পর্য্যন্ত অগ্রসর হয়, তখন চিত্র হইতে দেখা যায়, অতিভুজ OP_3 ব্যাসার্দ্ধের সমানই থাকে, কিন্তু বিপরীত বাহু P_3N_3

ক্রমেই কমিতে কমিতে θ যখন 180° হয়, তখন উহা 0 হয় এবং সেইজন্য $\sin\theta$ এর মান 0 হয়। অতএব, θ যখন 90° হইতে বাড়িয়া 180° পর্য্যন্ত অগ্রসর হয়, তখন $\sin\theta$ এর মান 1 হইতে কমিয়া 0 হয়। θ যখন বাড়িয়া তৃতীয় পাদে আসে, তখন অতিভুজ ধনাত্মক থাকিবে, কিন্তু বিপরীত বাহু ঋণাত্মক হইবে; অতএব, তৃতীয় পাদে $\sin\theta$ এর মান সর্ব্বদাই ঋণাত্মক হইবে। অধিকন্তু, এক্ষেত্রে অতিভুজটি সর্ব্বদাই ব্যাসার্দ্ধের সমান থাকিবে, কিন্তু বিপরীত বাহু বাড়িতে বাড়িতে θ যখন 270° এর সমান হইবে, তখন উহার দৈর্ঘ্য ব্যাসার্দ্ধের সমান হইবে এবং সেইজন্য θ যখন বাড়িয়া 180° হইতে 270° তে আসে, তখন $\sin\theta$ এর মান 0 হইতে কমিতে কমিতে -1 এ আসে। চতুর্থ পাদেও বিপরীত বাহু সর্ব্বদাই ঋণাত্মক, কিন্তু অতিভুজটি সর্ব্বদাই ধনাত্মক; সুতরাং, এই পাদে $\sin\theta$ এর মান সর্ব্বদাই ঋণাত্মক। অধিকন্তু, চিত্র হইতে দেখা যাইবে, θ যখন বাড়িতে বাড়িতে 270° হইতে 360° এর দিকে আসে, বিপরীত বাহুর দৈর্ঘ্য তখন কমিতে থাকে এবং θ যখন 360°, তখন বিপরীত বাহুর দৈর্ঘ্য শূন্য হইয়া যায় বলিয়া $\sin\theta$ ও 0 শূন্য হয়। অতএব দেখা গেল,

প্রথম পাদে, θ যখন 0° হইতে 90° পর্য্যন্ত বাড়ে;

তখন $\sin\theta$ এর মান 0 হইতে 1 পর্য্যন্ত বাড়ে;

দ্বিতীয় পাদে, θ যখন 90° হইতে 180° পর্য্যন্ত বাড়ে,

তখন $\sin\theta$ এর মান 1 হইতে কমিতে কমিতে 0 এ আসে;

তৃতীয় পাদে, θ যখন 180° হইতে 270 পর্য্যন্ত বাড়ে,

তখন $\sin\theta$ এর মান 0 হইতে কমিতে কমিতে -1 এ আসে;

এবং চতুর্থ পাদে, θ যখন 270° হইতে 360° পর্য্যন্ত বাড়ে,

তখন $\sin\theta$ এর মান -1 হইতে বাড়িতে বাড়িতে 0 এ আসে।

(ii) কোণের cosine এর মানের পরিবর্ত্তন :

$\text{Cosine} = \dfrac{\text{সন্নিহিত বাহু}}{\text{অতিভুজ}}$. যখন ঘূর্ণ্যমান সরলরেখাটি OX এর সহিত মিলিয়া থাকে, তখন XOP কোণের পরিমাণ 0° এবং তখন অতিভুজ বৃত্তের ব্যাসার্দ্ধের এবং সন্নিহিত বাহুও তখন বৃত্তের ব্যাসার্দ্ধের সমান; সুতরাং, স্পষ্টই $\cos 0° = 1$. কোণ 0° হইতে 90° পর্য্যন্ত বাড়িতে থাকিলে স্পষ্টই অতিভুজ সর্ব্বদা ব্যাসার্দ্ধের সমান থাকে, কিন্তু চিত্রটি পরীক্ষা করিলে দেখা যাইবে সন্নিহিত বাহু ON_1, ON_2 ক্রমশঃ কমিতে থাকিবে; তাহা হইলে $\cos\theta$ ও, ইহা $\dfrac{\text{সন্নিহিত বাহু } ON_1}{\text{অতিভুজ}}$ এর সমান বলিয়া θ এর 0° হইতে 90°

পর্য্যন্ত ক্রমবর্দ্ধমান মানসমূহের জন্য ক্রমশঃই কমিতে থাকিবে। যখন $\theta = 90°$ হইবে, তখন অতিভুজ ব্যাসার্দ্ধের সমান থাকিবে, কিন্তু সন্নিহিত বাহু 0 হইবে বলিয়া $\cos\theta = 0$ হইবে। θ যখন $90°$ হইতে বাড়িয়া দ্বিতীয় পাদে $180°$ পর্য্যন্ত অগ্রসর হয়, তখন চিত্র হইতে দেখা যায়, অতিভুজ OP_3 ব্যাসার্দ্ধের সমানই থাকে, এবং ইহা সর্ব্বদাই ধনাত্মক, কিন্তু সন্নিহিত বাহু এই পাদে সর্ব্বদাই ঋণাত্মক। অতএব, $\cos\theta$ এর মান এই পাদে সর্ব্বদা ঋণাত্মক হইবে এবং চিত্র হইতে দেখা যায়, ইহার দৈর্ঘ্য 0 হইতে ক্রমশঃ বাড়িয়া ব্যাসার্দ্ধের সমান হয়; অতএব, এই পাদে $\cos\theta$ এর মান শূন্য হইতে কমিতে কমিতে θ যখন $180°$ হয়, তখন -1 হয়। θ যখন আরও বাড়িয়া তৃতীয় পাদে আসে, তখনও এই পাদের সকল অবস্থানেই সন্নিহিত বাহু ঋণাত্মক থাকে, কিন্তু অতিভুজ সর্ব্বদাই ধনাত্মক; সুতরাং, তৃতীয় পাদেও $\cos\theta$ ঋণাত্মক; অধিকন্তু, এক্ষেত্রে অতিভুজটি সর্ব্বদাই ব্যাসার্দ্ধের সমান এবং ধনাত্মক থাকিবে, কিন্তু সন্নিহিত বাহুর দৈর্ঘ্য কমিতে কমিতে θ যখন $270°$ হইবে, তখন 0 হইবে; অতএব, এই পাদে $\cos\theta$ এর মান -1 হইতে বাড়িতে বাড়িতে θ যখন $270°$ হইবে, তখন 0 হইবে। চিত্র হইতে স্পষ্টই দেখা যায়, চতুর্থ পাদে সন্নিহিত বাহু ধনাত্মক; সুতরাং, অতিভুজ সর্ব্বদাই ধনাত্মক বলিয়া এই পাদে $\cos\theta$ সর্ব্বদাই ধনাত্মক হইবে। অধিকন্তু, এই পাদে সন্নিহিত বাহু সর্ব্বদাই ধনাত্মক থাকিয়া 0 হইতে বাড়িতে বাড়িতে θ যখন $360°$ হইবে, তখন ব্যাসার্দ্ধের সমান হইবে; সুতরাং, $\cos\theta$ এর মান এই পাদে 0 হইতে বাড়িয়া 1 হইবে।

অতএব, দেখা গেল,

প্রথম পাদে θ যখন $0°$ হইতে $90°$ পর্য্যন্ত বাড়ে,
তখন $\cos\theta$ এর মান 1 হইতে ক্রমশঃ কমিয়া 0 হয়;

দ্বিতীয় পাদে θ যখন $90°$ হইতে $180°$ পর্য্যন্ত বাড়ে,
তখন $\cos\theta$ এর মান 0 হইতে ক্রমশঃ কমিয়া -1 হয়;

তৃতীয় পাদে θ যখন $180°$ হইতে $270°$ পর্য্যন্ত বাড়ে,
তখন $\cos\theta$ এর মান -1 হইতে ক্রমশঃ বাড়িতে বাড়িতে 0 হয়;

এবং চতুর্থ পাদে θ যখন $270°$ হইতে $360°$ পর্য্যন্ত বাড়ে,
তখন $\cos\theta$ এর মান 0 হইতে ক্রমশঃ বাড়িতে বাড়িতে 1 হয়।

(iii) কোণের tangent এর মানের পরিবর্ত্তন :

Tangent $=\dfrac{\text{বিপরীত বাহু}}{\text{সন্নিহিত বাহু}}$, যখন ঘূর্ণ্যমান সরলরেখাটি OXএর সহিত মিলিয়া থাকে, তখন $X\dot{O}P$ কোণের পরিমাণ 0° এবং তখন, চিত্র হইতে দেখা যায়, বিপরীত বাহুর দৈর্ঘ্য 0 হইবে, এবং সন্নিহিত বাহু ব্যাসার্দ্ধের সমান হইবে ; অতএব, $\tan 0^\circ=0$. কোণ 0° হইতে 90° পর্য্যন্ত বাড়িতে থাকিলে স্পষ্টই বিপরীত বাহুর দৈর্ঘ্য 0 হইতে বাড়িয়া ব্যাসার্দ্ধের সমান হইবে আর সন্নিহিত বাহুর দৈর্ঘ্য ক্রমশঃ কমিতে কমিতে θ যখন 90° হইবে, তখন 0 হইবে। অতএব, $\tan\theta=\dfrac{\text{বিপরীত বাহু}}{\text{সন্নিহিত বাহু}}$ বলিয়া এবং হরের (সন্নিহিত বাহুর) দৈর্ঘ্য ক্রমশঃই কমিয়া আসে বলিয়া $\tan\theta$ এর মান ক্রমশঃই বাড়িতে থাকে ; θ যখন 90° এর অতি নিকটবর্ত্তী হয়, তখন সন্নিহিত বাহুর মানও অতি ক্ষুদ্র হয় এবং $\tan\theta$, তখন অতিবৃহৎ হয় এবং θ যতই 90° এর নিকটবর্ত্তী হয় $\tan\theta$ ও তত বৃহৎ হইতে থাকে, কিন্তু θ যখন 90° হয়, তখন সন্নিহিত বাহুর দৈর্ঘ্য 0 হইয়া পড়ে এবং শূন্য হরবিশিষ্ট ভগ্নাংশ অর্থহীন বলিয়া $\tan\theta$ ও তখন অনির্দ্দিষ্ট হয়। θ যখন 90° হইতে বাড়িয়া দ্বিতীয় পাদে 180° পর্য্যন্ত অগ্রসর হয়, তখন চিত্র হইতে দেখা যায়, সন্নিহিত বাহু ON_3 শূন্য হইতে ক্রমশঃ বাড়িতে বাড়িতে, θ যখন 180° এর সমান হয়, তখন ব্যাসার্দ্ধের সমান হয় ; আর বিপরীত বাহু কমিতে কমিতে শূন্য হয়। অধিকন্তু এই পাদে বিপরীত বাহু সর্ব্বদাই ধনাত্মক, কিন্তু সন্নিহিত বাহু সর্ব্বদাই ঋণাত্মক ; সুতরাং, এই পাদে $\tan\theta$ সর্ব্বদাই ঋণাত্মক হইবে এবং ইহার মান, θ প্রথম পাদ অতিক্রম করিয়া দ্বিতীয় পাদে আসামাত্রই ধনাত্মক সুবৃহৎ মান হইতে, সন্নিহিত বাহু এই পাদে সর্ব্বদাই ঋণাত্মক, কিন্তু বিপরীত বাহু ধনাত্মক বলিয়া, সুবৃহৎ পরম মান-বিশিষ্ট ঋণাত্মক মানযুক্ত হইয়া পড়ে, এই পরম মান হইতে কমিতে কমিতে $\theta=180^\circ$ হইলে, $\tan\theta=0$ হইবে। তৃতীয় পাদে বিপরীত বাহু এবং সন্নিহিত বাহু উভয়ই ঋণাত্মক বলিয়া এই পাদে $\tan\theta$ সর্ব্বদাই ধনাত্মক ; অধিকন্তু, θ 180° হইতে 270° পর্য্যন্ত বাড়িয়া চলিলে বিপরীত বাহুর দৈর্ঘ্য 0 হইতে বাড়িয়া ব্যাসার্দ্ধের সমান হইবে, আর সন্নিহিত বাহু কমিতে কমিতে শূন্য হইবে। সুতরাং, এক্ষেত্রে $\tan\theta$ এর মান, θ যত 270° দিকে যাইবে ততই বাড়িতে থাকিবে ; কিন্তু θ যখন 270° হইবে, তখন সন্নিহিত বাহুর দৈর্ঘ্য 0 হয় বলিয়া $\tan\theta$ $\tan 90^\circ$ এর ন্যায় অর্থহীন, অনির্দ্দিষ্ট হইয়া পড়ে। অতএব, $\tan\theta$ এর মান, এই পাদে, শূন্য হইতে 270° এর পূর্ব্ব পর্য্যন্ত ক্রমেই বাড়িতে থাকিবে, কিন্তু

$\theta = 270°$ হইলে $\tan\theta$ এর মান কত, নির্দ্দিষ্ট করিয়া বলা যাইবে না, অর্থাৎ $\tan\theta$ তখন অনির্দ্দিষ্ট হইবে। চতুর্থ পাদে সন্নিহিত বাহু ধনাত্মক, কিন্তু বিপরীত বাহু ঋণাত্মক ; সুতরাং, এই পাদে $\tan\theta$ সর্ব্বদাই ঋণাত্মক। এই পাদে θ যখন $270°$ এর অতি নিকটবর্ত্তী থাকে, তখন সন্নিহিত বাহু অতিক্ষুদ্র বলিয়া $\tan\theta$ ঋণাত্মক হইলেও উহার পরম মান অতিবৃহৎ হইবে। সুতরাং, θ, $270°$ অতিক্রম করিয়া চতুর্থ পাদে আসিলে $\tan\theta$ এর ধনাত্মক সুবৃহৎ মান হঠাৎ ঋণাত্মক কিন্তু পরম মান সুবৃহৎ এইরূপ মানে পরিবর্ত্তিত হয়। তারপর θ যতই $360°$ এর দিকে অগ্রসর হয় ততই $\tan\theta$ এর পরম মান কমিতে কমিতে শূন্য হয়, অথবা বলা চলে $\tan\theta$ এর মান বাড়িতে বাড়িতে শূন্য হয়। অতএব,

প্রথম পাদে θ এর মান যখন $0°$ হইতে $90°$ পর্য্যন্ত বাড়ে, তখন $\tan\theta$ এর মান 0 হইতে ক্রমাগত বাড়িয়াই চলে, কিন্তু সর্ব্বদাই সসীম থাকে ; θ এর $90°$ এর নিকটবর্ত্তী মানসমূহের জন্য $\tan\theta$ এর মান সসীম হইলেও সুবৃহৎ ; কিন্তু $\theta = 90°$ হইলে, $\tan\theta$ অনির্দ্দিষ্ট হইয়া পড়ে।

θ এর মান প্রথম পাদ অতিক্রম করিয়া দ্বিতীয় পাদে আসিবামাত্রই $\tan\theta$ এর মান ঋণাত্মক কিন্তু $90°$ এর অব্যবহিত পূর্ব্বে যেরূপ ছিল সেইরূপ অতিবৃহৎ পরম মান-বিশিষ্ট হইয়া পড়ে এবং θ যতই বাড়িতে থাকে এই পরম মান ততই কমিতে থাকে এবং কমিয়া কমিয়া θ যখন $180°$ হয় তখন $\tan\theta$ এর মান 0 হয়।

তৃতীয় পাদে $\tan\theta$ এর মান সর্ব্বদাই ধনাত্মক এবং θ, $180°$ হইতে $270°$ পর্য্যন্ত যতই বাড়িতে থাকিবে, $\tan\theta$ ও শূন্য হইতে ততই বাড়িতে থাকে, θ এর $270°$ এর নিকটতম মানসমূহের জন্য $\tan\theta$ এর মান সসীম হইলেও সুবৃহৎ ; কিন্তু $\theta = 270°$ হইলে $\tan\theta$ আবার অনির্দ্দিষ্ট হইয়া পড়ে।

θ এর মান তৃতীয় পাদ অতিক্রম করিয়া চতুর্থ পাদে আসিবামাত্রই $\tan\theta$ এর মান ঋণাত্মক, কিন্তু $270°$ এর অব্যবহিত পূর্ব্বে যেরূপ ছিল সেইরূপ অতিবৃহৎ পরম মান-বিশিষ্ট হইয়া পড়ে এবং θ যতই বাড়িতে থাকে এই পরম মান ততই কমিতে থাকে এবং কমিয়া কমিয়া θ যখন $360°$ হয় তখন 0 হয়।

(iv) কোণের cosecant এর মানের পরিবর্ত্তন :

$\operatorname{cosec}\theta = \frac{1}{\sin\theta}$ বলিয়া $\theta = 0°$ হইলে $\operatorname{cosec}\theta$ অনির্দ্দিষ্ট হয়, কিন্তু $0°$ এর নিকটবর্ত্তী মানসমূহের জন্য ইহার মান সসীম কিন্তু সুবৃহৎ ; θ যতই

90° এর দিকে যায়, cosec θও ততই কমিতে থাকে এবং যখন $\theta = 90^\circ$ হয়, তখন cosec $\theta = 1$ হয়।

দ্বিতীয় পাদে cosec θ ধনাত্মক এবং θ যখন বাড়িতে বাড়িতে 90° হইতে 180°তে যায়, cosec θ এর মান আবার 1 হইতে বাড়িতে বাড়িতে সর্ব্বদা সসীম থাকিলেও 180° এর নিকটবর্ত্তী মানসমূহের জন্য ধনাত্মক কিন্তু সুবৃহৎ হইয়া পড়ে ; এবং 180°তে cosec θ অনির্দ্দিষ্ট হয়।

তৃতীয় পাদে cosec θ সর্ব্বদাই ঋণাত্মক এবং θ দ্বিতীয় পাদ অতিক্রম করিয়া তৃতীয় পাদে আসিবামাত্রই cosec θ এর মান, ধনাত্মক সুবৃহৎ হইতে ঋণাত্মক কিন্তু সুবৃহৎ পরম মান-বিশিষ্ট হইয়া পড়ে এবং বাড়িতে বাড়িতে যখন $\theta = 270^\circ$ হয়, তখন cosec $\theta = -1$ হয়।

চতুর্থ পাদেও cosec θ ঋণাত্মক। θ, 270° হইতে 360° পর্য্যন্ত বাড়িতে থাকিলে cosec θ -1 হইতে ক্রমশঃ কমিতে থাকে এবং ইহার পরম মান ক্রমশঃ বৃদ্ধি পাইতে থাকে। θ এর 360° এর নিকটবর্ত্তী মানসমূহের জন্য cosec θ ঋণাত্মক কিন্তু সুবৃহৎ পরম মান-বিশিষ্ট হয় ; $\theta = 360^\circ$ হইলে, cosec θ অনির্দ্দিষ্ট হইয়া পড়ে।

(v) কোণের secant এর মানের পরিবর্ত্তন :

$\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$ বলিয়া θ কোণ যখন 0°, তখন $\sec\theta = 1$. প্রথম পাদে sec θ সর্ব্বদাই ধনাত্মক এবং ইহার মান, θ যতই 90° এর দিকে যায় ধনাত্মক এবং সসীম থাকিয়া ততই বাড়িতে থাকে। 90° এর নিকটবর্ত্তী মানসমূহের জন্য sec θ ধনাত্মক, সসীম কিন্তু সুবৃহৎ পরম মান-বিশিষ্ট হয়। যখন $\theta = 90^\circ$, তখন sec θ অনির্দ্দিষ্ট হইয়া পড়ে।

দ্বিতীয় পাদে sec θ ঋণাত্মক। θ এর মান 90° অতিক্রম করিয়া দ্বিতীয় পাদে আসিবামাত্রই sec θ এর মান ঋণাত্মক কিন্তু সুবৃহৎ এবং সসীম পরম মান-বিশিষ্ট হইয়া পড়ে এবং θ যতই 180° দিকে যায়, ততই sec θ এর মান ক্রমশঃ বাড়িতে বাড়িতে -1 এর দিকে যায়। $\theta = 180^\circ$ হইলে $\sec\theta = -1$ হয়।

তৃতীয় পাদে sec θ ঋণাত্মক। এই পাদে θ যতই বাড়িতে থাকে sec এর মানও ততই -1 হইতে কমিতে থাকে এবং θ এর মান 270° এর নিকটবর্ত্তী মানসমূহের জন্য sec θ ঋণাত্মক, কিন্তু সসীম ও সুবৃহৎ পরম মান-বিশিষ্ট হয়। $\theta = 270^\circ$ হইলে, sec θ অনির্দ্দিষ্ট হইয়া পড়ে।

চতুর্থ পাদে sec θ ধনাত্মক। θ এর মান 270° অতিক্রম করিয়া চতুর্থ পাদে আসিলেই sec θ ধনাত্মক কিন্তু সসীম ও সুবৃহৎ পরম মান-বিশিষ্ট হইয়া পড়ে এবং θ যতই 360° এর দিকে যায়, sec θ কমিতে কমিতে θ যখন 360° হয়, তখন উহা 1 হয়।

(vi) কোণের cotangent এর মানের পরিবর্ত্তন :

$\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$ বলিয়া প্রথম পাদে $\cot\theta$ ধনাত্মক ; θ কোণ যখন 0°, তখন $\cot\theta$ অনির্দ্দিষ্ট ; θ কোণ 0° হইতে একটু বাড়িলেই $\cot\theta$ ধনাত্মক কিন্তু সসীম ও সুবৃহৎ হইয়া পড়ে এবং θ কোণ বাড়িতে বাড়িতে 90° পর্য্যন্ত অগ্রসর হইলে $\cot\theta$ কমিতে কমিতে 0 হয়।

দ্বিতীয় পাদে $\cot\theta$ ঋণাত্মক এবং θ যখন বাড়িতে বাড়িতে 180° দিকে যায় $\cot\theta$ ঋণাত্মক থাকিয়াই ক্রমবর্দ্ধমান পরম মান-বিশিষ্ট হয়। θ কোণের 180° এর নিকটবর্ত্তী মানসমূহের জন্য $\cot\theta$ ঋণাত্মক কিন্তু সসীম ও সুবৃহৎ পরম মান-বিশিষ্ট হয়। $\theta = 180^\circ$ হইলে $\cot\theta$ অনির্দ্দিষ্ট হইয়া পড়ে।

তৃতীয় পাদে $\cot\theta$ ধনাত্মক। θ কোণ 180° অতিক্রম করিয়া তৃতীয় পাদে আসিবামাত্রই $\cot\theta$ এর মান ধনাত্মক কিন্তু সুবৃহৎ ও সসীম পরম মান-বিশিষ্ট হইয়া পড়ে এবং θ যতই 180° হইতে 270° এর দিকে অগ্রসর হয়, $\cot\theta$ এর মান ততই কমিতে কমিতে θ যখন 270° হয়, তখন 0 হয়।

চতুর্থ পাদে $\cot\theta$ ঋণাত্মক। θ এর মান 270° হহতে যতই 360° দিকে যায় $\cot\theta$ এর মান 0 হইতে ততই কমিতে থাকে। চতুর্থ পাদে 360° এর নিকটবর্ত্তী মানসমূহের জন্য $\cot\theta$ ঋণাত্মক, কিন্তু সসীম ও সুবৃহৎ পরম-মান বিশিষ্ট হয়। θ যখন 360° হয়, তখন $\cot\theta$ অনির্দ্দিষ্ট হইয়া পড়ে।

ত্রৈকোণমিতিক অপেক্ষকের লেখ

(Graphs of Trigonometrical Functions)

7·2. বীজগণিতের ন্যায় ত্রৈকোণমিতিক অপেক্ষকের লেখ অঙ্কন করিবার সময় দুইটি পরস্পরচ্ছেদী সরলরেখাকে XOX' এবং YOY' অক্ষ হিসাবে লওয়া হয়। x-অক্ষ বরাবর কোণের মান এবং y-অক্ষ বরাবর ঐ সকল কোণের অনুরূপ ত্রৈকোণমিতিক অনুপাতগুলির মান বসানো হয়। এইরূপে কোণ ও তাহার ত্রৈকোণমিতিক অপেক্ষক-প্রকাশক যে সকল বিভিন্ন বিন্দু পাওয়া যায়, তাহাদিগকে একটি সন্তত রেখা দ্বারা যোগ করিলে ত্রৈকোণমিতিক অপেক্ষকটির লেখ পাওয়া যায়।

7·3. sin x এর লেখ।

মনে কর, $y = \sin x$; x এর বিভিন্ন মান এবং এই সমীকরণ হইতে প্রাপ্ত y এর অনুরূপ মানসমূহ লইয়া নিম্নের তালিকা প্রস্তুত করা হইল।

x	$-90°$	$-80°$	$-70°$	$-60°$	$-50°$	$-40°$	$-30°$	$-20°$	$-10°$	$0°$
$y=\sin x$	-1	$-·98$	$-·94$	$-·87$	$-·77$	$-·64$	$-·50$	$-·34$	$-·17$	0

x	$10°$	$20°$	$30°$	$40°$	$50°$	$60°$	$70°$	$80°$	$90°$
$y=\sin x$	·17	·34	·50	·64	·77	·87	·94	·98	1

x	$100°$	$110°$	$120°$	$130°$	$140°$	$150°$	$160°$	$170°$	$180°$
$y=\sin x$	·98	·94	·87	·77	·64	·50	·34	·17	0

x-অক্ষ বরাবর ছক-কাগজের ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্যকে $10°$ এবং y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর 10 গুণকে দৈর্ঘ্যের একক ধরিয়া উপরের বিন্দুগুলি স্থাপন করা হইল এবং একটি সন্তত রেখার দ্বারা উহাদিগকে যোগ করা হইল। প্রাপ্ত রেখাই (পরপৃষ্ঠার চিত্র) এই অপেক্ষকের লেখ।

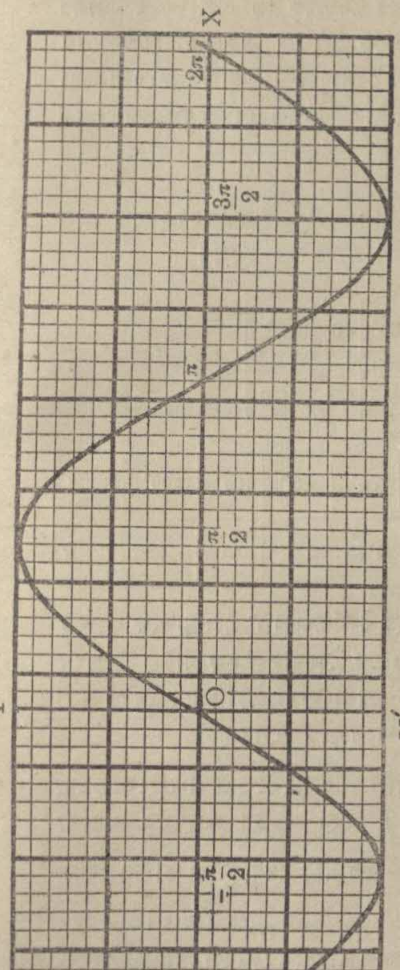
7·4. cos x এর লেখ।

মনে কর, $y = \cos x$.

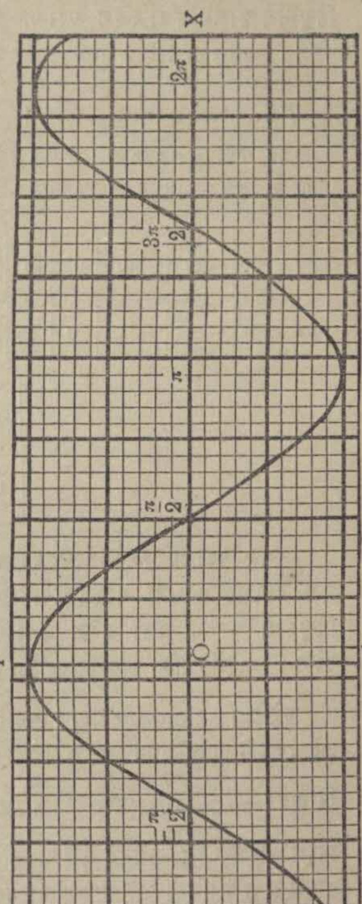
x এর বিভিন্ন মান এবং এই সমীকরণ হইতে প্রাপ্ত y এর অনুরূপ মানসমূহ লইয়া নিম্নের তালিকা প্রস্তুত করা হইল।

x	$-90°$	$-80°$	$-70°$	$-60°$	$-50°$	$-40°$	$-30°$	$-20°$	$-10°$
$y=\cos x$	0	·17	·34	·50	·64	·77	·87	·94	·98

x	$0°$	$10°$	$20°$	$30°$	$40°$	$50°$	$60°$	$70°$	$80°$	$90°$	$100°$	$110°$	ইত্যাদি
$y=\cos x$	1	·98	·94	·87	·77	·64	·50	·34	·17	0	$-·17$	$-·34$	ইত্যাদি



Sine এর লেখ



Cosine এর লেখ

x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের 1 বাহুর দৈর্ঘ্যকে 10° এবং y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের 1 বাহুর দৈর্ঘ্যের 10 গুণকে দৈর্ঘ্যের একক ধরিয়া উপরের বিন্দুগুলি স্থাপন করা হইল এবং একটি সন্তত রেখার দ্বারা উহাদিগকে যোগ করা হইল। প্রাপ্ত রেখাই (পৃষ্ঠা 111 এর ডানদিকের চিত্র) এই অপেক্ষকের লেখ।

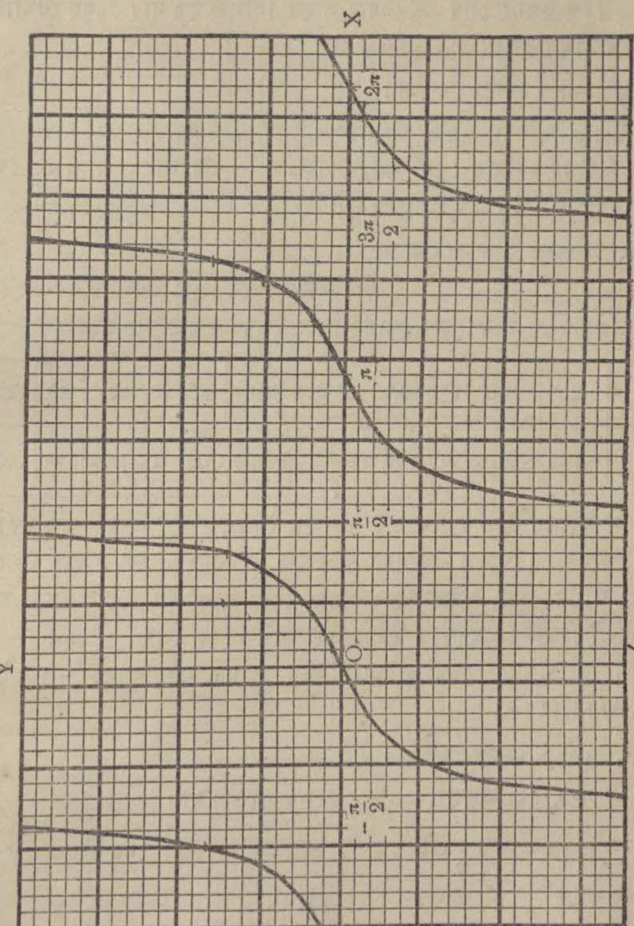
7·5. tan x এর লেখ।

মনে কর, $y=\tan x$; x এর বিভিন্ন মান এবং এই সমীকরণ হইতে প্রাপ্ত y এর অনুরূপ মানসমূহ লইয়া নিম্নের তালিকা প্রস্তুত করা হইল।

x	−20°	−10°	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°	100°	ইত্যাদি
$y=\tan x$	−·36	−·18	0	·18	·36	·58	·84	1·19	1·73	2·75	5·67	∞	−5·67	ইত্যাদি

x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের 1 বাহুর দৈর্ঘ্যকে 10° এবং y অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্যের 3 গুণকে দৈর্ঘ্যের একক ধরিয়া উপরের বিন্দুগুলি স্থাপন করা হইল এবং সন্তত রেখা দ্বারা উহাদিগকে যোগ করা হইল। এই চিত্রটি (পরপৃষ্ঠার চিত্র) এই অপেক্ষকের লেখ।

দ্রষ্টব্য। tangent লেখ এর বৈশিষ্ট্য ঃ চিত্র হইতে দেখা যাইতেছে যে, এই লেখটি একটিমাত্র সন্তত রেখা নহে। ইহা অনুরূপ আকৃতির অসংখ্য বিচ্ছিন্ন (separate) অংশ লইয়া গঠিত। x এর মান যখন $\frac{\pi}{2}$ বা তাহার কোন অযুগ্ম গুণিতক হয়, তখনই এই অসন্ততি (discontinuity) দেখা যায়। x যখন বাম হইতে আসিয়া এই সকল মানের দক্ষিণে যায় (যেমন 80° বা 85° হইতে 95° বা 96° তে গেলে) তখন $\tan x$ এর মান সহসা অতিবৃহৎ ধনাত্মক মান হইতে পরিবর্ত্তিত হইয়া অতিবৃহৎ ঋণাত্মক মানে পরিণত হয়। x এর মান $\frac{\pi}{2}$ বা তাহার অযুগ্ম গুণিতকের যত নিকটে আসে লেখটিও সেই বিন্দু $\left(\frac{\pi}{2}\right.$ বা তাহার অযুগ্ম গুণিতক) দিয়া y রেখার সমান্তরাল রেখার তত নিকটে চলিয়া



Tangent এর লেখ

আসে। কিন্তু কখনই লেখ এই রেখার সহিত মিলিত হয় না। সেই রেখাটিকে লেখটির **অসীম রেখা** (asymptote) বলে।

7·6. cot x এর লেখ।

$y = \cot x$ ধরিয়া $\tan x$ এর ন্যায় এই লেখটিও অঙ্কিত করা যায়। এই লেখটিও অসংখ্য অসন্তত রেখা লইয়া গঠিত। x এর মান 0 বা π এর কোন গুণিতক হইলেই এই লেখে অসন্ততি আসিয়া পড়ে।

7·7. cosec x এর লেখ।

মনে কর, $y = \text{cosec}\, x$; x এর বিভিন্ন মান এবং এই সমীকরণ হইতে প্রাপ্ত y এর অনুরূপ মানসমূহ লইয়া নিম্নের তালিকা প্রস্তুত করা হইল।

x	$-20°$	$-10°$	$0°$	$10°$	$20°$	$30°$	ইত্যাদি	$80°$	$90°$	$100°$	$110°$	ইত্যাদি
$y = \text{cosec}\, x$	$-2·92$	$-5·76$	∞	$5·76$	$2·92$	2	ইত্যাদি	$1·02$	1	$1·02$	$1·06$	ইত্যাদি

x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের 1 বাহুর দৈর্ঘ্যকে $10°$ এবং y অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের 1 বাহুর দৈর্ঘ্যের 3 গুণকে দৈর্ঘ্যের একক ধরিয়া উপরের বিন্দুগুলি স্থাপন করা হইল এবং সন্তত রেখা দ্বারা উহাদিগকে যোগ করা হইল। এই চিত্রটি (পরপৃষ্ঠার চিত্র) এই অপেক্ষকের লেখ। [$\text{cosec}\, x$ এর লেখও অসংখ্য অসন্তত রেখা লইয়া গঠিত। y এর মান কখনই -1 হইতে 1 এর মধ্যে থাকিবে না]

7·8. sec x এর লেখ।

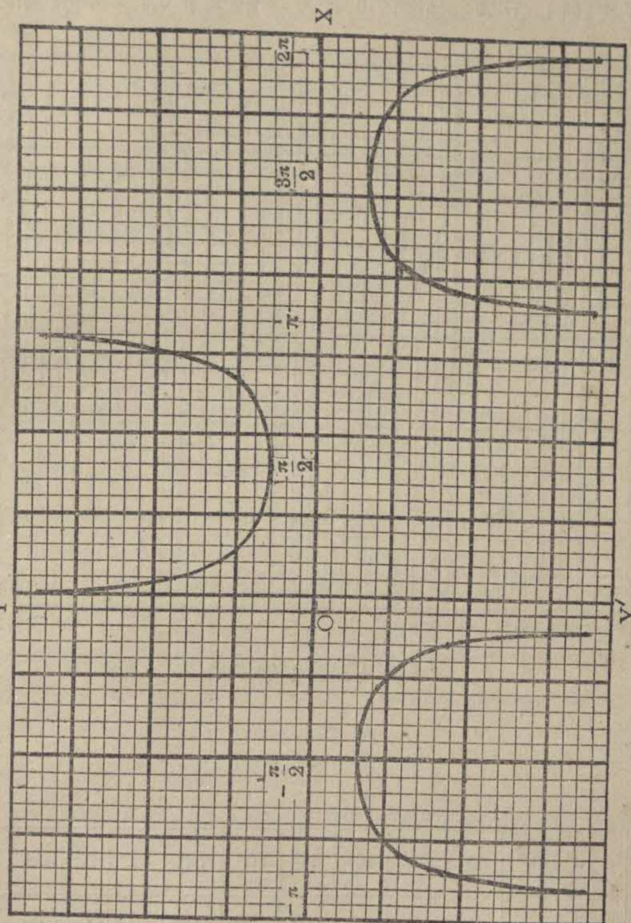
$y = \sec x$ ধরিয়া অনুরূপ $\sec x$ এর লেখ পাওয়া যায়।

এস্থলে $\sec x = \dfrac{1}{\cos x}$ এই সূত্র হইতে x এর বিভিন্ন মানের জন্য $\sec x$ এর মান নির্ণয় করিয়া চিত্রটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

7·9. উদা. 1. Draw the graph of $y = \sin x + \cos x$ between the range $x = 0$ to $x = 2\pi$, and find from the graph the values of x for which (i) $y = 0$, (ii) y is maximum, (iii) y is minimum.

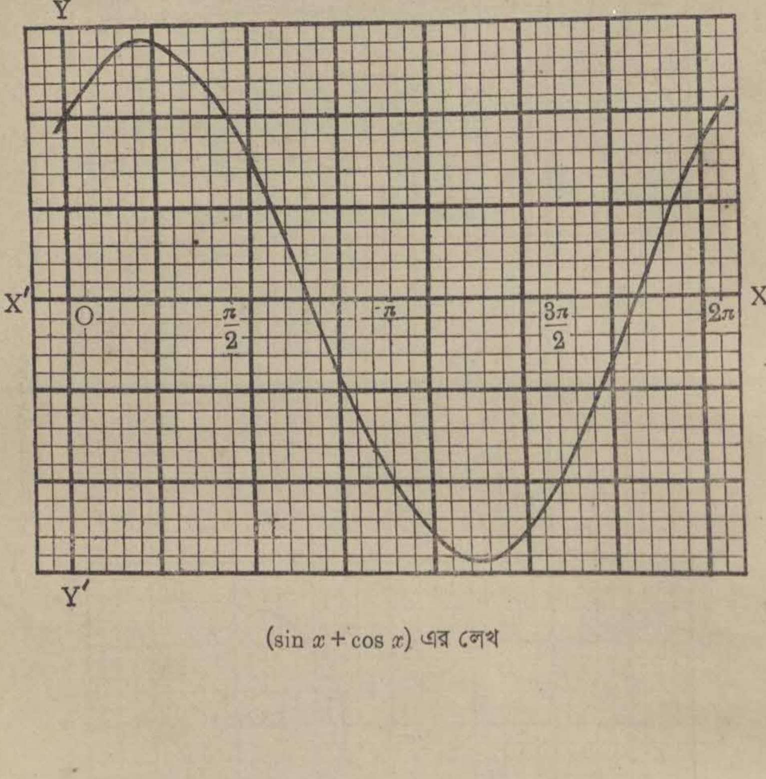
[C. U. 1934]

সাইন ও কোসাইন তালিকা হইতে x এর বিভিন্ন মানের অনুরূপ সাইন ও কোসাইন এর মান নির্ণয় করিয়া এই সমীকরণের সাহায্যে y এর মান নির্ণয়



Cosecant এর লেখ

করিতে হইবে। নিম্নের তালিকায় x ও অনুরূপ y এর মানসমূহ সন্নিবিষ্ট



$(\sin x + \cos x)$ এর লেখ

x	0°	10°	20°	30°	40°	50°	60°	70°	80°	90°	100°
y	1	1·15	1·27	1·37	1·41	1·41	1·37	1·27	1·15	1	·81

x	110°	120°	130°	140°	150°	160°	170°	180°	190°	200°
y	·59	·37	·13	−·13	−·37	−·59	−·81	−1	−1·15	−1·27

x	210°	220°	230°	240°	250°	260°	270°	280°
y	−1·37	−1·41	−1·41	−1·37	−1·27	−1·15	−1	−·81

x	290°	300°	310°	320°	330°	340°	350°	360°
y	−·59	−·37	−·13	·13	·37	·59	·81	1

x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্যকে 10° এবং y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের এক বাহুর দৈর্ঘ্যের 10 গুণকে দৈর্ঘ্যের একক ধরিয়া এই বিন্দুগুলি স্থাপন করা হইল এবং একটি সন্তত রেখার দ্বারা উহাদিগকে যোগ করা হইল। প্রাপ্ত রেখাই (পূর্ব্বপৃষ্ঠার চিত্র) উদ্দিষ্ট লেখ।

লেখ হইতে দেখা যাইতেছে, (i) $y=0$ যখন, $x=135°$ এবং $x=315°$, (ii) y এর মান চরম, যখন $x=45°$, (ii) y এর মান অবম, যখন $x=225°$.

7·10. ত্রৈকোণমিতিক সমীকরণের লৈখিক সমাধান (Trigonometrical solutions of equations)।

বীজগণিতের সমীকরণের ন্যায়ই সাধারণতঃ সমীকরণের দুই পক্ষের দুইটি লেখ অঙ্কন করিয়া ত্রৈকোণমিতিক সমীকরণেরও সমাধান করা যায়। সময়ে সময়ে অবশ্য পক্ষান্তর করিয়া একপক্ষকে একেবারে শূন্য করিয়া, অথবা, সুবিধামত পক্ষান্তর করিয়া এবং সূত্র-সাহায্যে যে-কোন অথবা উভয় পক্ষস্থ অপেক্ষককে অপেক্ষাকৃত সরল করিয়া লইয়া সমাধান করা হয়।

উদা. 2. Solve graphically the equation $2\sin^2 x = \cos 2x$, giving only those solutions of x which lie between $-\frac{\pi}{2}$ and $\frac{3\pi}{2}$.

[C. U. 1938, '46, '48]

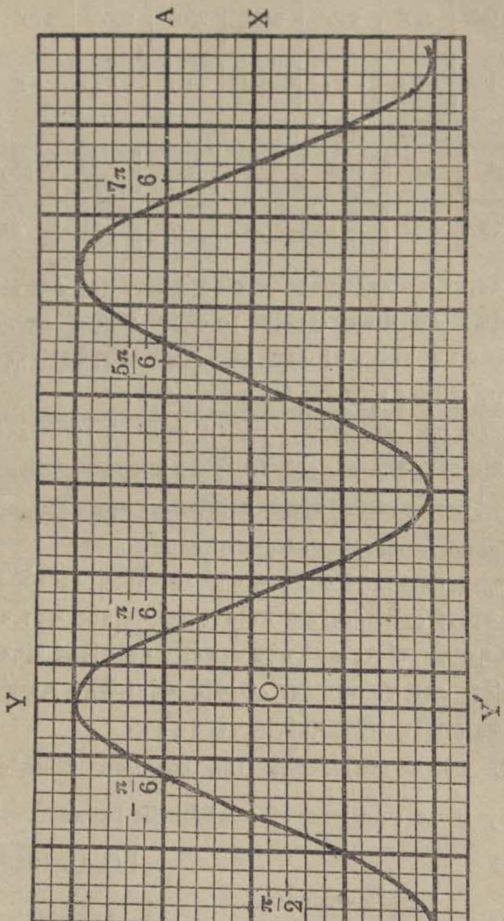
এস্থলে, $2\sin^2 x = \cos 2x$

বা, $1-\cos 2x = \cos 2x$, বা, $1 = 2\cos 2x$,

বা, $\frac{1}{2} = \cos 2x$.

অতএব, (i) $y=\frac{1}{2}$ এবং (ii) $y=\cos 2x$ এর লেখ দুইটি অঙ্কিত করিয়া উহাদের ছেদবিন্দুর x-স্থানাঙ্কই নির্ণেয় বীজ হইবে।

(i) x-অক্ষের সমান্তরাল এবং উহা হইতে y-অক্ষের ধনাত্মক দিকে $\frac{1}{2}$ একক দূরে অবস্থিত সরল রেখাটিই $y=\frac{1}{2}$ এর লেখ। y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের



$2\sin^2 x = \cos 2x$ এর লৈখিক সমাধান

বাহুর 10 গুণকে দৈর্ঘ্যের একক ধরিয়া লেখটি অঙ্কিত করা হইল। চিত্রে লেখটি AB রেখা দ্বারা সূচিত হইয়াছে।

(ii) $y=\cos 2x$ এর লেখ অঙ্কিত করিবার জন্য সমীকরণটিকে সিদ্ধ করে এইরূপ x এবং অনুরূপ y এর মান নির্ণয় করিয়া নিম্নের তালিকাটি প্রস্তুত করা হইল :

x	$-90°$	$-75°$	$-60°$	$-45°$	$-30°$	$-15°$	$0°$
y	-1	$-\dot{}87$	$-\dot{}5$	0	$\dot{}5$	$\dot{}87$	1

x	$15°$	$30°$	$45°$	$60°$	$75°$	$90°$	$105°$
y	$\dot{}87$	$\dot{}5$	0	$-\dot{}5$	$-\dot{}87$	-1	$-\dot{}87$

x	$120°$	$135°$	$150°$	$165°$	$180°$	$195°$	$210°$	$225°$	$240°$	$255°$	$270°$
y	$-\dot{}5$	0	$\dot{}5$	$\dot{}87$	1	$\dot{}87$	$\dot{}5$	0	$-5.$	$-\dot{}87$	-1

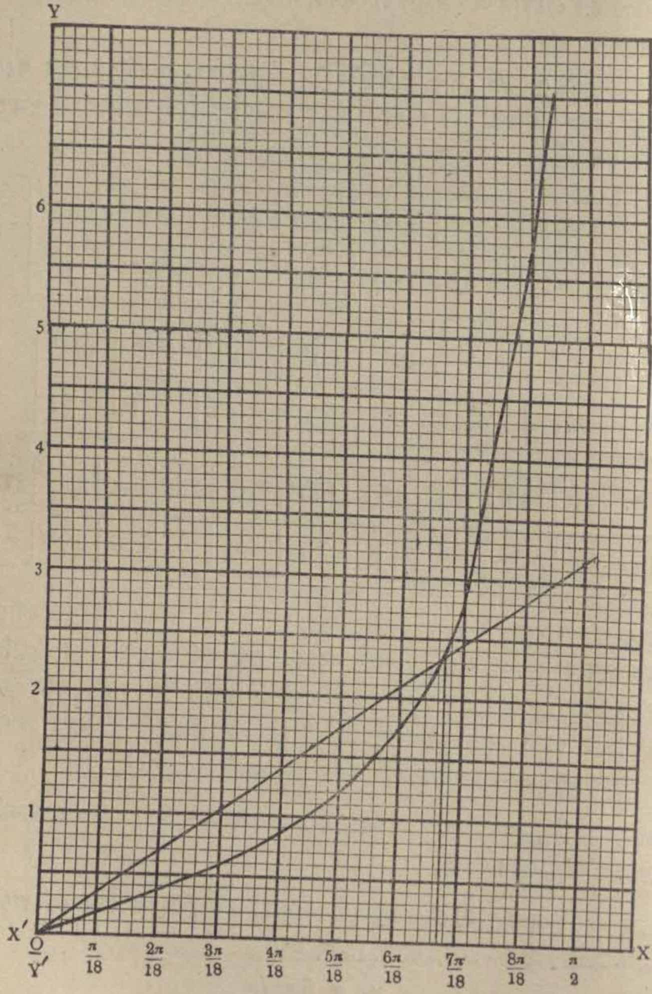
এখন ছক-কাগজে, x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের বাহুর দ্বিগুণ দৈর্ঘ্যকে $15°$ এর সমান ধরিয়া এবং y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্যের 10 গুণ দৈর্ঘ্যকে দৈর্ঘ্যের একক ধরিয়া উপরের বিন্দুগুলি স্থাপন করা হইল এবং একটি সন্তত রেখা দ্বারা উহাদিগকে সংযুক্ত করা হইল। প্রাপ্ত রেখাই (পূর্ব্বপৃষ্ঠার চিত্র) $\cos 2x$ এর লেখ।

একই মূলবিন্দু এবং অক্ষ লইয়া এবং একই এককে $y=\frac{1}{2}$ এর লেখটিও অঙ্কিত করা হইয়াছে।

চিত্র হইতে দেখা যায়, লেখ দুইটি পরস্পর চারিটি বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। ছেদবিন্দু চারটির ভুজ $-30°$, $30°$, $150°$, $210°$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমাধান $\mathbf{x}=-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}$.

উদা. 3. Solve graphically $\tan x=2x$ between $x=0$ and $x=\frac{\pi}{2}$. [C. U. 1939]



$\tan x = 2x$ এর লৈখিক সমাধান

এস্থলে x রেডিয়ানে প্রকাশিত হইয়াছে মনে করিতে হইবে।

(i) $y=\tan x$ এবং (ii) $y=2x$ এর লেখ দুইটি অঙ্কিত করিলে উহাদের ছেদবিন্দুর x-স্থানাঙ্কই নির্ণেয় বীজ।

$x=0$ এবং $x=\frac{\pi}{2}$ সীমার মধ্যে সমীকরণকে সিদ্ধ করে এইরূপ x এর মান-সমূহ এবং অনুরূপ y এর মানসমূহ লইয়া নিম্নের তালিকাটি প্রস্তুত করা হইল :

x (রেডিয়ানে প্রকাশিত)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
y	0	1·05	2·10	3·15

(ii)

x (রেডিয়ানে প্রকাশিত)	0	$\frac{\pi}{18}$	$\frac{2\pi}{18}$	$\frac{3\pi}{18}$	$\frac{4\pi}{18}$	$\frac{5\pi}{18}$	$\frac{6\pi}{18}$	$\frac{7\pi}{18}$	$\frac{8\pi}{18}$	$\frac{\pi}{2}$
y	0	·18	·36	·57	·84	1·19	1·73	2·75	5·67	অনির্দ্দিষ্ট

এখন ছক-কাগজে x-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের বাহুর 5 গুণ দৈর্ঘ্যকে $\frac{\pi}{18}$ রেডিয়ানের সমান এবং y-অক্ষ বরাবর ক্ষুদ্র বর্গক্ষেত্রের বাহুর দৈর্ঘ্যের 10 গুণ দৈর্ঘ্যকে দৈর্ঘ্যের একক ধরিয়া উপরের বিন্দুগুলি স্থাপন করা হইল এবং প্রতি ক্ষেত্রে একটি সন্তত রেখা দ্বারা প্রত্যেকটির বিন্দুগুলিকে সংযুক্ত করা হইল। প্রাপ্ত রেখা দুইটি (পূর্ব্বপৃষ্ঠার চিত্র) (i) এবং (ii) এর লেখ।

চিত্র হইতে দেখা যায় লেখ দুইটি যে দুইটি বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে মূলবিন্দু হইতে x-অক্ষ বরাবর তাহাদের দূরত্ব 0 এবং 33·5 (স্থূলভাবে); অতএব, ঐ দুই ছেদবিন্দুর x-স্থানাঙ্ক $=0$ এবং $\frac{33·5}{5}\times\frac{\pi}{18}$ রেডিয়ান, অর্থাৎ, 0 এবং 1·17 রেডিয়ান (স্থূলভাবে)।

অতএব, $x=0$ এবং $x=\frac{\pi}{2}$ সীমার মধ্যে প্রদত্ত সমীকরণের সমাধান $x=0$ এবং $x=1·17$ (স্থূলভাবে)।

প্রশ্নমালা 10

1. Draw the graphs of :

(i) $\sin 5x$; (ii) $\sin x - \cos x$;

(iii) $\tan 2x$ between $x=0$ to $x=\frac{\pi}{2}$.

2. Draw the graph of $\sin \theta$ and $\cos \theta$ between $\theta=0$ and $\theta=\pi$. Find the points where the graphs intersect. [C. U. 1915, '36]

3. Draw the graph of $\cos x - \sin 2x$ for values of x lying between $0°$ and $90°$, and hence obtain the least value of $\cos x - \sin 2x$ in this range.

4. Solve graphically the equation $\tan x = \cos x$ between $x=0$ and $x=\frac{\pi}{2}$. [C. U. 1956]

5. Draw the graph of $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)$ between the limits $x=-\pi$ and $x=+\pi$.

6. Solve graphically, $x=\tan x$ between $x=0$ and $x=\frac{\pi}{2}$. [C. U. 1945]

7. Sketch the graphs of $y=x$, $y=\sin x$ and $y=\tan x$ in the range $-\frac{\pi}{2}$ and $+\frac{\pi}{2}$ with reference to the same axes of x and y. From the nature of the graph near the origin can you suggest any relation among them at the origin ? [C. U. 1952]

স্থানাঙ্ক জ্যামিতি

প্রথম অধ্যায়

বৃত্ত

(Circle)

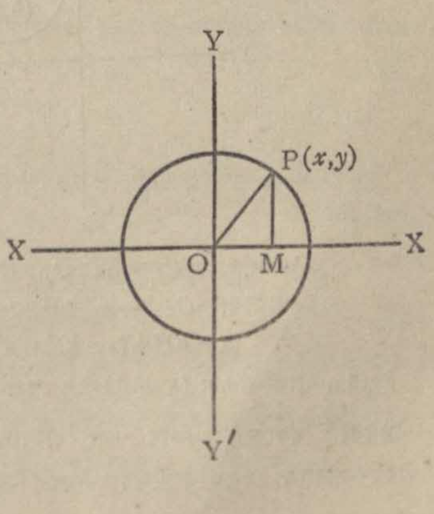
1·1. কোন সমতলের উপর চলমান কোন বিন্দুর দূরত্ব ঐ সমতলে অবস্থিত কোন নির্দ্দিষ্ট বিন্দু হইতে সর্ব্বদা একই হইলে, চলমান বিন্দুটির সঞ্চারপথকে **বৃত্ত** (circle) বলে।

নির্দ্দিষ্ট বিন্দুটিকে এই বৃত্তের কেন্দ্র (centre) এবং এই কেন্দ্র হইতে চলমান বিন্দুর ধ্রুবক দূরত্বকে ঐ বৃত্তের ব্যাসার্দ্ধ (radius) বলে।

1·2. মূলবিন্দুতে কেন্দ্র এবং a ব্যাসার্দ্ধ-বিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ।

[The equation of a circle whose radius is a and whose centre is at the origin.]

O মূলবিন্দু এবং XOX', YOY' দুইটি অক্ষ। বৃত্তের কেন্দ্র মূলবিন্দু O তে অবস্থিত এবং উহার ব্যাসার্দ্ধ a.



বৃত্তের উপরে যে-কোন একটি বিন্দু P লও, মনে কর, ইহার স্থানাঙ্ক (x, y).

OP যোগ কর এবং P হইতে x-অক্ষের উপর PM লম্ব টান। তাহা হইলে, $OM = x$ এবং $PM = y$.

এখন, OPM সমকোণী ত্রিভুজে, $OM^2 + PM^2 = OP^2$,

বা, $\mathbf{x^2 + y^2 = a^2}$;

ইহাই মূলবিন্দুতে কেন্দ্র এবং a ব্যাসার্দ্ধ-বিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ।

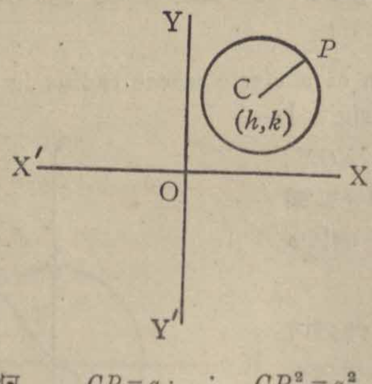
দ্রষ্টব্য : এক্ষেত্রে লক্ষণীয় যে, সমীকরণে x^2 এবং y^2 এর সহগ একই, এবং উহাতে xy-ঘটিত কোন পদ নাই।

1·3. (h, k) স্থানাঙ্কযুক্ত বিন্দুতে কেন্দ্র এবং a ব্যাসার্দ্ধ-বিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ।

[The equation of a circle whose radius is a and the co-ordinates of whose centres are (h, k).]

বৃত্তের ব্যাসার্দ্ধ a এবং উহার কেন্দ্র C বিন্দুতে অবস্থিত। XOX' এবং YOY' অক্ষদ্বয় অনুসারে C বিন্দুর স্থানাঙ্ক (h, k).

বৃত্তের উপরে যে-কোন বিন্দু P লও এবং মনে কর, ইহার স্থানাঙ্ক (x, y). CP যোগ কর।



এখন, $CP = a$; $\therefore$ $CP^2 = a^2$.

আবার, $CP^2 = (x-h)^2 + (y-k)^2$.

$\therefore$ $\mathbf{(x-h)^2 + (y-k)^2 = a^2}$;

ইহাই a ব্যাসার্দ্ধ এবং (h, k) বিন্দুতে কেন্দ্র-বিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ।

দ্রষ্টব্য : কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক এবং ব্যাসার্দ্ধ দেওয়া থাকিলে, উপরিউক্ত সমীকরণ-সাহায্যে যে-কোন বৃত্তের সমীকরণ নির্ণয় করা যায়। যেমন,

(i) কেন্দ্র $(3, 5)$, ব্যাসার্দ্ধ 4 ; সমীকরণ : $(x-3)^2+(y-5)^2=4^2$, অর্থাৎ 16.

(ii) কেন্দ্র $(7, -3)$, ব্যাসার্দ্ধ 5 ; সমীকরণ : $(x-7)^2+\{y-(-3)\}^2=5^2$, বা, $(x-7)^2+(y+3)^2=25$.

বিপরীতক্রমে, কোন বৃত্তের সমীকরণ দেওয়া থাকিলে অনায়াসেই বৃত্তটির কেন্দ্র এবং ব্যাসার্দ্ধ নিরূপণ করা যায়। যেমন,

সমীকরণ : $(x-h)^2+(y-k)^2=a^2$; কেন্দ্র (h, k), ব্যাসার্দ্ধ a (দক্ষিণ-পক্ষস্থ রাশির বর্গমূল)।

সমীকরণ : $(x-3)^2+(y-4)^2=25$; কেন্দ্র $(3, 4)$, ব্যাসার্দ্ধ $\sqrt{25}$, অর্থাৎ, 5.

সমীকরণ : $(x+2)^2+(x-6)^2=64$; কেন্দ্র $(-2, 6)$, ব্যাসার্দ্ধ 8.

1·4. $x^2+y^2+2gx+2fg+c=0$ আকারের দ্বিঘাত-সমীকরণ সর্ব্বদাই $(-g, -f)$ কেন্দ্র এবং $\sqrt{g^2+f^2-c}$ ব্যাসার্দ্ধ-বিশিষ্ট বৃত্ত সূচিত করে।

[Any quadratic equation of the form $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ always represents a circle, the co-ordinates of whose centre is $(-g, -f)$ and whose radius is $\sqrt{g^2+f^2-c}$.]

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0,$$

বা, $x^2+y^2+2gx+2fy+g^2+f^2=g^2+f^2-c$,

(c কে পক্ষান্তর করিয়া এবং উভয় পক্ষে g^2 এবং f^2 যোগ করিয়া)

বা, $(x^2+2gx+g^2)+(y^2+2fy+f^2)=g^2+f^2-c$,

বা, $(x+g)^2+(y+f)^2=(\sqrt{g^2+f^2-c})^2$,

বা, $\{x-(-g)\}^2+\{y-(-f\}^2=(\sqrt{g^2+f^2-c})^2$;

1·3 অনুচ্ছেদের সমীকরণের সহিত মিলাইলে দেখা যায়, ইহা একটি বৃত্তের সমীকরণ এবং বৃত্তের কেন্দ্র $(-g, -f)$, এবং ব্যাসার্দ্ধ $\sqrt{g^2+f^2-c}$.

দ্রষ্টব্য : $g^2+f^2 > c$ হইলে, ব্যাসার্দ্ধ এবং সেইজন্য বৃত্তটি বাস্তব (real) হইবে ;

$g^2+f^2 < c$ হইলে, ব্যাসার্দ্ধ এবং সেইজন্য বৃত্তটিও কাল্পনিক (imaginary) হইবে ;

আবার, $g^2+f^2=c$ হইলে, ব্যাসার্দ্ধ শূন্য হইবে এবং তখন বৃত্তটি একটি বিন্দুতে পরিণত হইবে।

1·5. সাধারণ দ্বিঘাত সমীকরণ $ax^2+by^2+2hxy+2gx+2fy+c=0$ এর বৃত্ত সূচিত করিবার শর্ত।

[The condition that the general quadratic equation of the second degree $ax^2+by^2+2hxy+2gx+2fy+c=0$ may represent a circle.]

$ax^2+by^2+2hxy+2gx+2fy+c=0$, উভয় পক্ষকে a দ্বারা ভাগ করিয়া, $x^2+\frac{b}{a}y^2+\frac{2h}{a}xy+\frac{2g}{a}x+\frac{2f}{a}y+\frac{c}{a}=0.$ $\cdots$ (1)

(1) দ্বারা কোন বৃত্ত সূচিত হইলে, মনে কর, এই বৃত্তের কেন্দ্র $(-g', -f')$ এবং ব্যাসার্দ্ধ $\sqrt{g'^2+f'^2-c'}$ এইরূপ ধরিলে সাধারণত্বের কোন ব্যতিক্রম হয় না। কিন্তু এইরূপ বৃত্তের সমীকরণ

$$x^2+y^2+2g'x+2f'y+c'=0 \qquad \cdots \quad (2)$$

অতএব, (1) এবং (2) সমীকরণ দুইটি একই সমীকরণ।

সমীকরণ দুইটির x^2 এর সহগ দুইটি সমান বলিয়া,

$$x^2+\frac{b}{a}y^2+\frac{2h}{a}xy+\frac{2g}{a}x+\frac{2f}{a}y+\frac{c}{a} \equiv x^2+y^2+2g'x+2f'y+c' ;$$

$$\therefore \quad \frac{b}{a}=1, \ \frac{2h}{a}=0, \ \frac{g}{a}=g', \quad \frac{f}{a}=f', \quad \frac{c}{a}=c' ;$$

শেষের তিনটি হইতে নির্দ্দিষ্ট কিছুই জানা যায় না।

$\therefore \quad \frac{b}{a}=1$ এবং $\frac{2h}{a}=0$ বা $\mathbf{a=b}$ **এবং** $\mathbf{h=0.}$

এই দুইটিই নির্ণেয় শর্ত।

অতএব, সাধারণ দ্বিঘাত সমীকরণ

$$ax^2 + by^2 + 2hxy + 2gx + 2fy + c = 0$$

দ্বারা বৃত্ত সূচিত হইবার শর্ত্ত হইতেছে

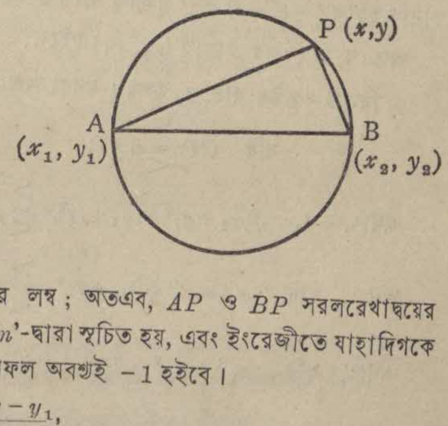
$$\mathbf{a = b} \text{ এবং } \mathbf{h = 0},$$

অর্থাৎ, সমীকরণটিতে x^2 ও y^2-ঘটিত পদদ্বয়ের সহগ সমান এবং xy-ঘটিত পদের অভাব ; এবং দেখা গেল শর্ত্ত দুইটি প্রয়োজনীয় এবং যথেষ্ট উভয়ই।

1·6. (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয় সংযোজক সরলরেখা যে বৃত্তের একটি ব্যাস, তাহার সমীকরণ।

[The equation of the circle having the join of (x_1, y_1) and (x_2, y_2) as a diameter.]

(x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয়কে যথাক্রমে A এবং B দ্বারা সূচিত কর এবং বৃত্তের উপর যে-কোন বিন্দু P লও, মনে কর, ইহার স্থানাঙ্ক (x, y), AP ও BP যোগ কর।



AB ব্যাস বলিয়া, APB অর্দ্ধবৃত্তস্থ কোণ ; APB এক সমকোণের সমান ; সেইজন্য AP ও BP পরস্পর লম্ব ; অতএব, AP ও BP সরলরেখাদ্বয়ের প্রবণতা (যাহারা সাধারণতঃ 'm'-দ্বারা সূচিত হয়, এবং ইংরেজীতে যাহাদিগকে gradient বলা হয়) দুইটির গুণফল অবশ্যই -1 হইবে।

এখন, AP এর প্রবণতা $= \dfrac{y - y_1}{x - x_1}$,

এবং BP এর প্রবণতা $= \dfrac{y - y_2}{x - x_2}$;

$$\therefore \frac{y - y_1}{x - x_1} \cdot \frac{y - y_2}{x - x_2} = -1,$$

বা, $(y - y_1)(y - y_2) = -(x - x_1)(x - x_2)$,

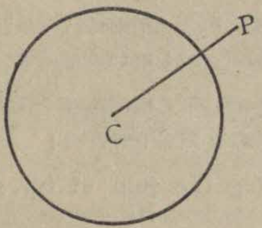
বা, $(y - y_1)(y - y_2) + (x - x_1)(x - x_2) = 0$,

বৃত্তটির নির্ণেয় সমীকরণ।

1·7. বৃত্তের বহিঃস্থ, উপরস্থ এবং অন্তঃস্থ বিন্দু।

[Points lying outside, on or inside a circle.]

মনে কর, বিন্দুটি P, বৃত্তটির কেন্দ্র C এবং ব্যাসার্দ্ধ a ; তাহা হইলে,



$CP > a$ হইলে, P বিন্দুটি বৃত্তটির বহিঃস্থ হইবে ;

$CP = a$ হইলে, P বিন্দুটি বৃত্তটির উপরস্থ হইবে ;

$CP < a$ হইলে, P বিন্দুটি বৃত্তটির অন্তঃস্থ হইবে।

$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ বৃত্তটির সমীকরণ হইলে, কেন্দ্র C বিন্দুর স্থানাঙ্ক হইবে $(-g, -f)$ এবং বৃত্তটির ব্যাস a হইবে $\sqrt{g^2+f^2-c}$.

অতএব, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x_1, y_1) হইলে,

P বিন্দুটি বৃত্তটির বহিঃস্থ, উপরস্থ অথবা অন্তঃস্থ হইবে,

যদি $CP \gtreqless a$ হয়,

অর্থাৎ, যদি, $\sqrt{(x_1+g)^2+(y_1+f)^2} \gtreqless \sqrt{g^2+f^2-c}$ হয়,

অর্থাৎ, যদি, $(x_1+g)^2+(y_1+f)^2 \gtreqless (g^2+f^2-c)$ হয়,

অর্থাৎ, যদি, $x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c \gtreqless 0$ হয়। ... (1)

(1) এর সাহায্যে, কোন বিন্দু কোন বৃত্তের বহিঃস্থ, উপরস্থ অথবা অন্তঃস্থ কিনা অতি সহজেই নির্ণয় করা যায়। এস্থলে লক্ষণীয়, প্রদত্ত বৃত্তের সমীকরণে x এবং y এর স্থলে যথাক্রমে P এর স্থানাঙ্কের ভুজ ও কোটি বসাইয়া (1) এর বাম পক্ষের রাশিমালা পাওয়া গিয়াছে।

1·8. বিবিধ প্রশ্নের সমাধান।

উদা. 1. Find the equation of the circle whose centre is the origin and whose radius is 5.

মূলবিন্দুতে কেন্দ্র এবং a ব্যাসার্দ্ধ-বিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ হইতেছে $x^2+y^2=a^2$; এস্থলে $a=5$ বলিয়া,

নির্ণেয় সমীকরণ হইল $x^2+y^2=5^2$,

বা, $\mathbf{x^2+y^2=25}$.

উদা. 2. Find the equation of the circle whose centre is at the point (2, 5) and whose radius is 4.

(h, k) বিন্দুতে কেন্দ্র এবং a ব্যাসার্দ্ধ-বিশিষ্ট বৃত্তের সমীকরণ হইল,

$$(x-h)^2+(y-k)^2=a^2.$$

এস্থলে, $h=2$, $k=5$ এবং $a=4$ বলিয়া,

নির্ণেয় সমীকরণ হইল $(x-2)^2+(y-5)^2=4^2$,

বা, $x^2-4x+4+y^2-10y+25=16$,

বা, $\mathbf{x^3+y^2-4x-10y+13=0}$.

উদা. 3. Find the equation of the circle whose centre is the origin and which passes through the point (3, 5).

কেন্দ্র মূলবিন্দুতে অবস্থিত বলিয়া, বৃত্তটির সমীকরণ

$$x^2+y^2=a^2 \qquad \cdots \qquad \cdots \quad (1)$$

ধরা যায়।

এখন, বৃত্তটি (3, 5), বিন্দুগামী বলিয়া,

$3^2+5^2=a^2$ বা $a^2=34$.

$\therefore$ (1) হইতে, নির্ণেয় সমীকরণ হইল $\mathbf{x^2+y^2=34}$.

উদা. 4. Obtain the equation of the circle passing through the point (2, −4) and having its centre at the point (−3, 2).

কেন্দ্র (−3, 2) বিন্দুতে অবস্থিত বলিয়া বৃত্তটির সমীকরণ

$$(x+3)^2+(y-2)^2=a^2 \qquad \cdots \qquad \cdots \quad (1)$$

ধরা যায়।

এখন, বৃত্তটি (2, −4) বিন্দুগামী বলিয়া,

$(2+3)^2+(-4-2)^2=a^2$ বা $a^2=5^2+(-6)^2=61$.

$\therefore$ (1) হইতে, নির্ণেয় সমীকরণ হইল $(x+3)^2+(y-2)^2=61$,

বা, $x^2+6x+9+y^2-4y+4=61$,

বা, $\mathbf{x^2+y^2+6x-4y-48=0}$.

উদা. 5. Find the radius and the co-ordinates of the centre of the circle whose equation is $x^2+y^2-6x+10y-15=0$.

$$x^2+y^2-6x+10y-15=0,$$

বা, $(x^2-6x+9)+(y^2+10y+25)=25+9+15,$

(-15 কে পক্ষান্তর করিয়া, এবং উভয় পক্ষে $9+25$ যোগ করিয়া)

বা, $(x-3)^2+(y+5)^2=49=7^2$;

$\therefore$ **বৃত্তটির ব্যাসার্দ্ধ 7 এবং কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (3, – 5).**

উদা. 6. Obtain the equation of the circle whose centre is the point (2, 3) and which passes through the intersection of the straight lines $3x-2y-1=0$ and $4x+y-27=0$. [C. U. 1947]

মনে কর, বৃত্তটির সমীকরণ $(x-2)^2+(y-3)^2=a^2$. ... (2)

সরলরেখা দুইটির ছেদবিন্দু পাইতে হইলে উহাদের সমীকরণ দুইটিকে সহ-সমীকরণরূপে সমাধান করিতে হইবে।

এখন, $3x-2y-1=0,$

এবং $4x+y-27=0$;

$$\therefore \frac{x}{-2\times(-27)-1\times(-1)}=\frac{y}{-1\times4-(-27)\times3}=\frac{1}{3\times1-4\times(-2)},$$

বা, $\frac{x}{55}=\frac{y}{77}=\frac{1}{11}$;

$\therefore x=\frac{55}{11}=5,\ y=\frac{77}{11}=7$;

$\therefore$ সরলরেখা দুইটির ছেদবিন্দু (5, 7).

এখন, বৃত্তটি ছেদবিন্দু (5, 7)-গামী বলিয়া (1) হইতে,

$(5-2)^2+(7-3)^2=a^2$ বা $a^2=3^2+4^2=25.$

$\therefore$ (1) হইতে নির্ণেয় সমীকরণ হইল $(x-2)^2+(y-3)^2=25,$

বা, $x^2-4x+4+y^2-6y+9=25,$

বা, $\mathbf{x^2+y^2-4x-6y-12=0.}$

উদা. 7. Find the equation of the circle having the join of the points $(3, -2)$ and $(-1, 6)$ as its diameter.

$(3, -2)$ এবং $(-1, 6)$ বিন্দু দুইটিকে যথাক্রমে A ও B দ্বারা সূচিত কর। এখন, বৃত্তস্থ যে-কোন বিন্দু P এর স্থানাঙ্ক (x, y) হইলে,

$$AP \text{ এর প্রবণতা (gradient)} = \frac{y+2}{x-3},$$

$$\text{এবং } BP \text{ এর প্রবণতা} = \frac{y-6}{x+1}.$$

AP ও BP সরলরেখাদ্বয় পরস্পর লম্ব বলিয়া,

$$\frac{y+2}{x-3} \cdot \frac{y-6}{x+1} = -1, \text{ বা, } (y+2)(y-6) + (x-3)(x+1) = 0,$$

বা, $y^2 - 4y - 12 + x^2 - 2x - 3 = 0,$

বা, $\mathbf{x^2 + y^2 - 2x - 4y - 15 = 0.}$

উদা. 8. Find the equation to the circle which passes through the points $(3, -4)$, $(4, -1)$ and $(2, -2)$.

মনে কর, বৃত্তটির সমীকরণ $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0.$ ··· (1)

বৃত্তটি প্রদত্ত বিন্দুত্রয়গামী বলিয়া উহাদের স্থানাঙ্ক দ্বারা বৃত্তটির সমীকরণ সিদ্ধ হইবে ;

$\therefore \quad 3^2 + (-4)^2 + 2 \,.\, 3g + 2 \,.\, (-4)f + c = 0,$

বা, $25 + 6g - 8f + c = 0$ ··· (2)

$4^2 + (-1)^2 + 2 \,.\, 4g + 2 \,.\, (-)f + c = 0,$

বা, $17 + 8g - 2f + c = 0$ ··· (3)

এবং $2^2 + (-2)^2 + 2 \,.\, 2g + 2 \,.\, (-2)f + c = 0,$

বা, $8 + 4g - 4f + c = 0.$ ··· (4)

(2), (3) ও (4) সমীকরণ তিনটি সমাধান করিলে পাওয়া যায়,

$$g = -\tfrac{7}{2}, f = \tfrac{5}{2} \text{ এবং } c = 16.$$

$\therefore$ (1) হইতে, নির্ণেয় সমীকরণ হইল

$$x^2 + y^2 + 2 \,.\, (-\tfrac{7}{2})x + 2 \,.\, \tfrac{5}{2}y + 16 = 0,$$

বা, $\mathbf{x^2 + y^2 - 7x + 5y + 16 = 0.}$

উদা. 9. Show that the four points (0, 0), (1, 2), (1, −1) and (2, −1) are concyclic. Find the equation of the circle.

মনে কর, প্রথম বিন্দুত্রয়গামী বৃত্তটির সমীকরণ

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0. \quad \cdots \quad (1)$$

বৃত্তটি প্রথম বিন্দুত্রয়গামী বলিয়া উহাদের স্থানাঙ্ক দ্বারা বৃত্তটির সমীকরণ সিদ্ধ হইবে। অতএব,

$$c=0 \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

$$5+2g+4f+c=0 \quad \cdots \quad \cdots \quad (3)$$

$$2+2g-2f+c=0 \quad \cdots \quad \cdots \quad (4)$$

(2) হইতে (3) এবং (4)-এ $c=0$ বসাইয়া,

$$5+2g+4f=0 \quad \cdots \quad \cdots \quad (5)$$

$$\underline{2+2g-2f=0} \quad \cdots \quad \cdots \quad (6)$$

বিয়োগ করিয়া, $3+6f=0$, বা, $f=-\frac{1}{2}$;

f এর মান (6)-এ বসাইয়া, $2+2g+1=0$ বা $g=-\frac{3}{2}$.

অতএব, (2), (3) এবং (4) সমাধান করিয়া, $f=-\frac{1}{2}$, $g=-\frac{3}{2}$, $c=-0$ পাওয়া গেল।

∴ (1) হইতে, প্রথম বিন্দুত্রয়গামী বৃত্তের সমীকরণ হইল

$$x^2+y^2-3x-y=0.$$

এখন, এই সমীকরণের বাম পক্ষে x এবং y এর পরিবর্তে যথাক্রমে চতুর্থ বিন্দুটির স্থানাঙ্ক (2, −1) এর ভুজ ও কোটি বসাইলে দেখা যায়

বাম পক্ষ $=2^2+(-1)^2-3.2-(-1)$

$=4+1-6+1=0=$ দক্ষিণ পক্ষ ;

অতএব, দেখা গেল, (2, −1) বিন্দুটির স্থানাঙ্ক দ্বারা সমীকরণটি সিদ্ধ হয়। সুতরাং, (2, −1) বিন্দুটি ঐ বৃত্তের উপর অবস্থিত।

∴ প্রমাণিত হইল যে, প্রদত্ত বিন্দু চারিটি একই বৃত্তস্থ এবং সেই বৃত্তের সমীকরণ

$$\mathbf{x^2+y^2-3x-y=0.}$$

উদা. 10. A circle has its centre on the line $2x-3y=0$ and passes through the points $(4, 3)$, $(-2, 5)$. Find its equation.
[C. U. 1950]

মনে কর, বৃত্তটির সমীকরণ $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$. ... (1)

(4, 3) এবং (–2, 5) বিন্দুদ্বয় বৃত্তটির উপর অবস্থিত বলিয়া,

$$25+8g+6f+c=0 \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

এবং $29-4g+10f+c=0$ ... ... (3)

আবার (1) এর দ্বারা সূচিত বৃত্তটির কেন্দ্র $(-g, -f)$. ইহা $2x-3y=0$ সরলরেখাটির উপর অবস্থিত বলিয়া,

$$-2g+3f=0 \quad \cdots \quad \cdots \quad (4)$$

(2), (3) এবং (4) এর সমীকরণগুলি সমাধান করিলে,

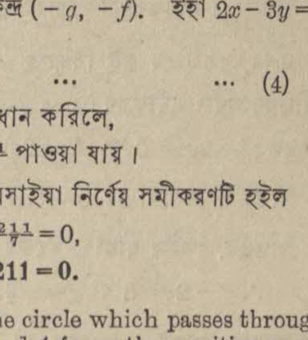
$g=\frac{3}{7}$, $f=\frac{2}{7}$ এবং $c=-\frac{211}{7}$ পাওয়া যায়।

g, f এবং c এর এই সকল মান (1)-এ বসাইয়া নির্ণেয় সমীকরণটি হইল

$$x^2+y^2+\tfrac{6}{7}x+\tfrac{4}{7}y-\tfrac{211}{7}=0,$$

বা, $\mathbf{7x^2+7y^2+6x+4y-211=0}$.

উদা. 11. Find the equation to the circle which passes through the origin and cuts off intercepts 3 and 4 from the positive parts of the axes. [Rajputana, Gwalior & Ajmeer, 1943]



মনে কর, বৃত্তটি x-অক্ষ এবং y-অক্ষকে যথাক্রমে মূলবিন্দু ভিন্ন A ও B বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। বৃত্তটি দ্বারা x ও y-অক্ষ হইতে কর্তিতাংশ যথাক্রমে 3 ও 4 বলিয়া A বিন্দুর স্থানাঙ্ক (3, 0) এবং B বিন্দুর স্থানাঙ্ক (0, 4) হইবে। অতএব, বৃত্তটি (0, 0), (3, 0) এবং (0, 4) বিন্দুত্রয়গামী।

মনে কর, বৃত্তটির সমীকরণ $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ ... (1)

বৃত্তটি (0, 0), (3, 0) এবং (0, 4) বিন্দুত্রয়গামী বলিয়া

$$c=0 \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

$$9+6g+c=0 \quad \cdots \quad \cdots \quad (3)$$

$$16+8f+c=0 \quad \cdots \quad \cdots \quad (4)$$

(2), (3) ও (4) সমীকরণগুলি সমাধান করিয়া, $g=-\frac{3}{2}, f=-2, c=0.$

$\therefore$ (1) হইতে, নির্ণেয় সমীকরণটি হইল $\mathbf{x^2+y^2-3x-4y=0.}$

বিকল্প পদ্ধতি ঃ মনে কর, বৃত্তটির সমীকরণ

$$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0 \qquad \cdots \quad (1)$$

বৃত্তটি মূলবিন্দুগামী বলিয়া, $c=0$.

$\therefore$ (1) সমীকরণটি দাঁড়াইল $x^2+y^2+2gx+2fy=0.$ $\cdots$ (2)

এখন, বৃত্তটি যে দুই বিন্দুতে x-অক্ষকে ছেদ করে তাহাদের ভুজ বৃত্তটির সমীকরণ অর্থাৎ সমীকরণ (2)-এ $y=0$ বসাইয়া পাওয়া যায় ; অতএব, তাহাদের ভুজদ্বয় $x^2+2gx=0$ বা $x(x+2g)=0$ সমীকরণের বীজ ;

অতএব, তাহারা $x=0$ এবং $x=-2g$.

অতএব, বৃত্তটির দ্বারা x-অক্ষের কর্ত্তিতাংশ $=-2g-0=-2g$.

$\therefore \quad -2g=3$ বা $g=-\frac{3}{2}$.

আবার, বৃত্তটি y-অক্ষকে যে দুই বিন্দুতে ছেদ করে তাহাদের কোটি সমীকরণ (2)-এ $x=0$ বসাইয়া দেখা যায়, 0 এবং $-2f$.

$\therefore \quad -2f-0=4$, বা, $f=-2$.

সমীকরণ (2)-এ g এবং f এর মান বসাইলে নির্ণেয় সমীকরণটি হইল

$$\mathbf{x^2+y^2-3x-4y=0.}$$

উদা. 12. Find the equation of the circle concentric with the circle $x^2+y^2-5x+3y-4=0$ and passing through the point $(3, -2)$.

$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ দ্বারা সূচিত বৃত্তটির কেন্দ্র $(-g, -f)$; এই বৃত্তটির সহিত এককেন্দ্রীয় বৃত্তসমূহের কেন্দ্রও $(-g, -f)$ বলিয়া, এই সকল এককেন্দ্রীয় বৃত্তের g ও f প্রদত্ত বৃত্তটির g ও f এর সমান হইবে ; কিন্তু এককেন্দ্রীয় বৃত্তসমূহের ব্যাসার্দ্ধ প্রদত্ত বৃত্তটির ব্যাসার্দ্ধ $\sqrt{g^2+f^2-c}$ হইতে ভিন্ন এবং g ও f প্রদত্ত এককেন্দ্রীয় সকল বৃত্তের ক্ষেত্রে একই বলিয়া c, অর্থাৎ, x ও y বর্জ্জিত রাশিটি, অর্থাৎ, ধ্রুবক রাশিটি প্রদত্ত বৃত্ত এবং এককেন্দ্রীয়

বৃত্তসমূহের সমীকরণে ভিন্ন হইবে। তাহা হইলে প্রদত্ত বৃত্তটির সহিত এক-কেন্দ্রীয় যে-কোন বৃত্তের সমীকরণ

$x^2+y^2-5x+3y+c=0$ ... (1), মনে করা যায়।

এখন, এই বৃত্তটি (3, −2) বিন্দুগামী বলিয়া,

$3^2+(-2)^2-5.3+3(-2)+c=0$, বা, $c=8$.

∴ (1)-এ c এর মান বসাইয়া, নির্ণেয় সমীকরণ হইল

$$\mathbf{x^2+y^2-5x+3y+8=0.}$$

উদা. 13. Prove that the centres of the three circles

$x^2+y^2=1$, $x^2+y^2+6x-2y=1$,

$x^2+y^2-12x+4y=1$

lie on one straight line, and find the equation of the straight line. [C. U. B. A. & B. Sc., 1920]

$x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ দ্বারা সূচিত বৃত্তটির কেন্দ্র $(-g, -f)$;

∴ প্রদত্ত বৃত্ত তিনটির কেন্দ্র (0, 0), (−3, 1), (6, −2).

এখন, প্রথম বিন্দুদ্বয়গামী সরলরেখার সমীকরণ

$$\frac{y-0}{0-1}=\frac{x-0}{0-(-3)}, \text{ বা, } x+3y=0; \quad \cdots (1)$$

এবং তৃতীয় কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক (6, −2) দ্বারা (1) সমীকরণটি সিদ্ধ হয়।

∴ প্রদত্ত বৃত্তসমূহের কেন্দ্রত্রয় একই সরলরেখায় অবস্থিত এবং সেই সরল-রেখার সমীকরণ $\mathbf{x+3y=0}$.

প্রশ্নমালা 1

1. Find the equation of the circle whose centre is at the origin and whose radius is equal to 8.

2. Find the equation to the circle whose centre is at the point

(i) (−2, 0) and whose radius is 4;

(ii) (4, 5) and whose radius is 5;

(iii) (−4, −5) and whose radius is 7;

(iv) (a, b) and whose radius is $a-b$;

(v) (3, −4) and whose radius is $\sqrt{5}$.

3. Find the equation of the circle whose centre is at the point

(i) $(0, 0)$ and which passes through the point $(-2, 1)$;

(ii) $(2, 3)$ and which passes through the point $(5, 7)$; [C. U. 1957]

(iii) $(-2, 5)$ and which passes through the point $(-5, 4)$;

(iv) $(-3, -2)$ and which passes through the point $(2, -3)$.

4. Find the equation to the circle passing through the origin and having its centre

(*a*) on the x-axis at a distance 5 from the origin;

(*b*) at the point $(-g, -f)$.

5. Find the equation of the circle which passes through the point $(1, 1)$ and whose centre is on the y-axis at a distance 7 from the origin.

6. Find the co-ordinates of the centre and the radius of the following circles:

(i) $x^2 + y^2 = 16$; (ii) $x^2 + y^2 = 3$;

(iii) $x^2 + y^2 - 10x + 16 = 0$;

(iv) $x^2 + y^2 + 8y - 20 = 0$;

(v) $x^2 + y^2 - 10x - 12y + 12 = 0$;

(vi) $x^2 + y^2 - 6x + 14y + 33 = 0$; [C. U. B. A. & B.Sc., 1951]

(vii) $9(x^2 + y^2) + 12x - 6y - 4 = 0$;

(viii) $a(x^2 + y^2) + 2bx + 2cy = 0$.

7. Find the equation to the circle passing through the points:

(i) $(0, 0)$, $(0, 5)$ and $(-2, -1)$; [Mysore, 1946]

(ii) $(0, 0)$, $(2, 0)$, $(0, 3)$;

(iii) $(2, -1)$, $(2, 3)$, $(4, -1)$.

8. Show that the four points $(3, 2)$, $(1, 4)$, $(3, 4)$, $(1, 2)$ are concyclic. Find the equation to the circle passing through the points.

9. Find the area of the triangle formed by joining the centres of the three circles

$$x^2+y^2-2x+2y-7=0,\ \ x^2+y^2+8x-2y+8=0$$

and $x^2+y^2-12x+18y+17=0$.

10. Determine the centres and radii of the circles

$$x^2+y^2-2x+2y-7=0,\ \ x^2+y^2-6x-2y-6=0$$

and $x^2+y^2-8x-4y-5=0$

and verify that the centres lie on a straight line, whose equation you are required to obtain. [C. U. 1950]

11. Prove that the radii of the circles $x^2+y^2=1$, $x^2+y^2-2x-6y=6$ and $x^2+y^2-4x-12y=9$ are in arithmetical progression. [C. U. B. A. & B. Sc., 1917]

12. Find the equation to the circle whose centre is the point $(1, -2)$ and which passes through the point of intersection of the straight lines $3x+y=14$ and $2x+5y=18$. [C. U. 1945]

13. Find the equation of the circle passing through the origin and the points at which the straight line $5x-4y=20$ meets the axes.

14. Find the equation of the circle whose centre is at the origin and which meets the straight line

(*a*) $\dfrac{x}{5}-\dfrac{y}{6}=1$ on the axis of x, [C. U. 1940]

(*b*) $\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{5}=1$ on the axis of x.

15. Find the equation to the circle which passes through the points $(2, 1)$, $(1, 2)$ and has its centre on the straight line $3x+4y-7=0$.

16. Find the equation to the circle which passes through the points $(a, 0)$, (m, n) and has its centre on the axis of y.

17. Find the equation of the circle whose centre is the point of intersection of the straight lines $3x+4y+1=0$ and $2x-3y-5=0$ and which passes through the point where the straight line $2x+5y=5$ meets the y-axis.

18. Find the equation to the circle described on the join of $(-2, 6)$ and $(6, -8)$ as diameter.

19. A triangle has its vertices at the points $(0, 1)$, $(-2, 0)$ and $(1, 0)$. Find the equations of the straight lines forming the sides. Find also the equation of the circle which has as a diameter that side of the triangle which lies in the first quadrant.

[C. U. 1950 ; Supplementary]

20. (*a*) Find the equation to the circle which passes through the origin and cuts off intercepts 5 and 3 from the positive parts of the axes of x and y respectively.

(*b*) Find the position of the point $(4, -5)$ with respect to this circle.

21. Find the equation of the circle circumscribing the triangle formed by the straight lines

$x + y = 6$, $2x + y = 4$ and $x + 2y = 5$. [Agra, 1945]

22. Obtain the equation of the circle which passes through the two points on the axis of x which are at a distance 4 from the origin and whose radius is 5.

23. (*a*) Find the equation of the circle concentric with the circle $x^2 + y^2 - 6x + 8y + 9 = 0$ and passing through the point $(3, -4)$.

(*b*) Find the position of the point $(5, 2)$ with respect to this concentric circle.

24. (*a*) Find the equation of the circle concentric with the circle $9(x^2 + y^2) + 12x - 6y - 4 = 0$ and having radius equal to $\frac{1}{3}$.

(*b*) Find the position of the point $(-1, \frac{1}{3})$ with reference to this concentric circle.

25. *ABCD* is a square whose side is a ; taking *AB* and *AD* as axes, prove that the equation to the circle circumscribing the square is $x^2 + y^2 = a(x + y)$. [C. U. 1951]

26. Find the area of an equilateral triangle inscribed in the circle $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$.

[C. U. B. A. & B. Sc., 1918]

1·9. $x^2+y^2=a^2$ বৃত্ত এবং $y=mx+c$ সরলরেখার ছেদবিন্দু।

[Points of intersection of the straight line $y=mx+c$ and the circle $x^2+y^2=a^2$.]

প্রদত্ত বৃত্ত এবং সরলরেখার ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক উভয় সমীকরণকেই যুগপৎ সিদ্ধ করে বলিয়া,

$$x^2+y^2=a^2 \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

$$y=mx+c \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

সমীকরণ দুইটিকে সহ-সমীকরণরূপে সমাধান করিয়া ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করা যাইবে।

(2) হইতে y এর মান (1)-এ বসাইলে,

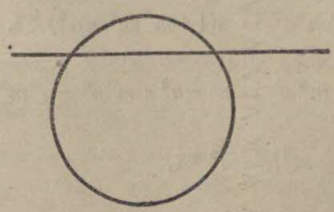
$$x^2+(mx+c)^2=a^2,$$

বা, $$(1+m^2)x^2+2mcx+c^2-a^2=0 \quad \cdots \quad (3)$$

(3) একটি দ্বিঘাত সমীকরণ, ইহাকে সমাধান করিলে x এর দুইটি মান পাওয়া যায় বলিয়া সরলরেখা বৃত্তটিকে দুইটি বিন্দুতে ছেদ করিবে। x এর ঐ মান দুইটি (2)-এ, x এর পরিবর্তে বসাইলে y এর অনুরূপ দুইটি মান পাওয়া যায়। x এর একটি মান এবং y এর অনুরূপ মান বৃত্ত ও সরলরেখার একটি ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক ; আর, x এর অন্য মানটি এবং y এর অনুরূপ মান উহাদের অপর ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক।

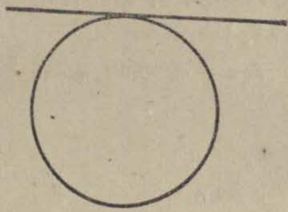
সমীকরণ (3) এর বীজদ্বয়

(ক) বাস্তব এবং ভিন্ন (real and unequal) হইলে, চিত্র 1 এর ন্যায় সরলরেখাটি বৃত্তটিকে পৃথক্ দুইটি বিন্দুতে ছেদ করিবে ;



চিত্র 1

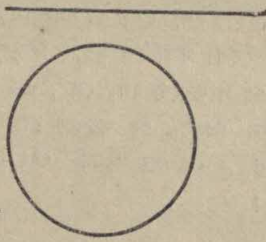
(খ) বাস্তব এবং পরস্পর সমান হইলে, চিত্র 2 এর ন্যায় সরলরেখাটি বৃত্তটিকে পরস্পর মিলিত দুইটি বিন্দুতে ছেদ করিবে (এক্ষেত্রে, দুইটি বিন্দু



চিত্র 2

পরস্পর মিলিত হয় বলিয়া এক বিন্দুও বলা চলে, আর তখন 'ছেদ করে' না বলিয়া 'স্পর্শ করে' বলা উচিত);

(গ) অবাস্তব হইলে, চিত্র 3 এর ন্যায় সরলরেখাটি কোন বিন্দুতেই বৃত্তটিকে ছেদ করিবে না।



চিত্র 3

এখন সমীকরণ (3) হইতে দেখা যায়,

যদি $4m^2c^2 \gtreqless 4(1+m^2)(c^2-a^2)$ হয়,

অর্থাৎ, যদি $m^2c^2 \gtreqless c^2-a^2+m^2c^2-a^2m^2$ হয়,

অর্থাৎ, যদি $a^2(1+m^2) \gtreqless c^2$ হয়,

অর্থাৎ, যদি $c^2 \lesseqgtr a^2(1+m^2)$ হয়,

তাহা হইলে, সমীকরণ (3) এর বীজদ্বয় যথাক্রমে বাস্তব এবং ভিন্ন, বাস্তব এবং পরস্পর সমান অথবা অবাস্তব হয়। অতএব, $y = mx + c$ সরলরেখাটি $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তটিকে

(i) পৃথক্ দুইটি বিন্দুতে ছেদ করে, যদি $c^2 < a^2(1+m^2)$ হয় ;

(ii) পরস্পর মিলিত দুইটি বিন্দুতে ছেদ করে,

অর্থাৎ, স্পর্শ করে, যদি $c^2 = a^2(1+m^2)$ হয় ;

(iii) আদৌ ছেদ করে না, যদি $c^2 > a^2(1+m^2)$ হয়।

1·10. স্পর্শক।

যদি বক্ররেখার উপর অবস্থিত কোন এক সচল বিন্দু ঐ বক্ররেখার উপর অবস্থিত অপর কোন এক নির্দ্দিষ্ট বিন্দু-অভিমুখে ঐ বক্ররেখার উপর থাকিয়াই ক্রমাগত চলিতে চলিতে ইহার এত নিকটবর্ত্তী হয় যে, এই নির্দ্দিষ্ট বিন্দু হইতে চলমান বিন্দুটির দূরত্ব কোন পূর্ব্ব-নির্দ্দিষ্ট ধনাত্মক সংখ্যা যত ক্ষুদ্রই হউক না কেন তদপেক্ষাও ক্ষুদ্রতর হয়, তাহা হইলে সচল বিন্দুটির এই চরম অবস্থানে উক্ত বিন্দুদ্বয়গামী সরলরেখাটিকে নির্দ্দিষ্ট বিন্দুটিতে ঐ বক্ররেখার **স্পর্শক** (tangent) বলা হয়। এবং নির্দ্দিষ্ট বিন্দুটিকে ঐ স্পর্শকের স্পর্শবিন্দু (point of contact) বলা হয়।

1·11. $y = mx + c$ সরলরেখার $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তের স্পর্শক হইবার শর্ত্ত।

[The condition that the straight line $y = mx + c$ may be a tangent to the circle $x^2 + y^2 = a^2$.]

প্রদত্ত সরলরেখা এবং বৃত্তের সমীকরণ,

$$y = mx + c \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

$$\text{এবং } x^2 + y^2 = a^2 \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

কে সহ-সমীকরণরূপে সমাধান করিলে, সরলরেখাটি বৃত্তটিকে যে-দুই বিন্দুতে ছেদ করে তাহাদের ভুজদ্বয়-নির্ণায়ক,

$$(1+m^2)x^2 + 2mcx + (c^2 - a^2) = 0 \quad \cdots \quad (3),$$

দ্বিঘাত সমীকরণটি পাওয়া যায়। সরলরেখাটি স্পর্শক হইলে এই বীজদ্বয় পরস্পর সমান হইবে ;

$\therefore \quad 4m^2c^2 - 4(c^2 - a^2)(1+m^2) = 0,$

বা, $c^2 - a^2(1+m^2) = 0,$

বা, $c^2 = a^2(1+m^2)$;

বা, $\mathbf{c = \pm a\sqrt{1+m^2}}$.

ইহাই নির্ণেয় শর্ত্ত।

অনুসিদ্ধান্ত 1. উপরের ফল হইতে স্পষ্টই প্রতীয়মান হয় যে, m এর সকল মানের জন্যই $y = mx \pm a\sqrt{1+m^2}$ সরলরেখাদ্বয়ের প্রত্যেকটি বৃত্তের একটি স্পর্শক।

অনুসিদ্ধান্ত 2. $y = mx + a\sqrt{1+m^2}$ স্পর্শকটির স্পর্শবিন্দু নির্ণয় করিতে হইলে এই স্পর্শকের সমীকরণটিকে এবং বৃত্তের সমীকরণ $x^2 + y^2 = a^2$ কে সহ-সমীকরণরূপে সমাধান করিতে হইবে। অতএব, প্রথম সমীকরণ হইতে $y = mx + a\sqrt{1+m^2}$ দ্বিতীয় সমীকরণে বসাইয়া,

$$x^2 + \{mx + a\sqrt{1+m^2}\}^2 = a^2,$$

বা, $(1+m^2)x^2 + 2am\sqrt{1+m^2}.x + a^2m^2 = 0,$

বা, $(\sqrt{1+m^2}x + am)^2 = 0$; $\quad \therefore \quad x = -\dfrac{am}{\sqrt{1+m^2}}, -\dfrac{am}{\sqrt{1+m^2}}$;

ইহাই স্পর্শবিন্দুর ভুজ। স্পর্শকের সমীকরণে x এর এই মান বসাইয়া,

$$y = m.\left(\frac{-am}{\sqrt{1+m^2}}\right) + a\sqrt{1+m^2} = \frac{a}{\sqrt{1+m^2}} ; \frac{a}{\sqrt{1+m^2}}.$$

অতএব, $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্ত এবং উহার স্পর্শক $y = mx + a\sqrt{1+m^2}$ এর স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\dfrac{-am}{\sqrt{1+m^2}}$ এবং $\dfrac{a}{\sqrt{1+m^2}}$.

এইরূপে, $y = mx - a\sqrt{1+m^2}$ স্পর্শকটির স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক হইবে,

$$\frac{am}{\sqrt{1+m^2}} \text{ এবং } \frac{-a}{\sqrt{1+m^2}}.$$

1·12. $\mathbf{x^2 + y^2 = a^2}$ বৃত্তের যে-কোন বিন্দু $\mathbf{(x_1, y_1)}$ এ স্পর্শকের সমীকরণ।

[Equation of the tangent at any point (x_1, y_1) of the circle $x^2 + y^2 = a^2$.]

বৃত্তটির উপর অবস্থিত প্রদত্ত বিন্দু (x_1, y_1) এর অতি নিকটবর্ত্তী এবং ঐ বৃত্তের উপরই অপর একটি বিন্দু (x_2, y_2) লও।

(x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয়গামী সরলরেখার সমীকরণ

$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1) \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

এখন, (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) উভয়ই প্রদত্ত বৃত্তটির উপর অবস্থিত বলিয়া,

$$x_1^2 + y_1^2 = a^2 \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

এবং $x_2^2 + y_2^2 = a^2 \quad \cdots \quad \cdots \quad (3)$

$\therefore \quad (x_1^2 - x_2^2) + (y_1^2 - y_2^2) = 0,$ [(2) হইতে (3) বিয়োগ করিয়া]

বা, $(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) + (y_1 - y_2)(y_1 + y_2) = 0,$

বা, $(y_1 - y_2)(y_1 + y_2) = -(x_1 - x_2)(x_1 + x_2)$;

$$\therefore \quad \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{x_1 + x_2}{y_1 - y_2}.$$

$\therefore$ (1) হইতে, (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয়গামী সরলরেখার সমীকরণ হইল,

$$y - y_1 = -\frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2}(x - x_1) \quad \cdots \quad \cdots \quad (4)$$

$\left[\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} \right.$ এর পরিবর্ত্তে $\left. -\frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2} \right.$ বসাইয়া $\left. \right]$

এখন, যদি (x_2, y_2) বিন্দুটি ঐ বৃত্তের উপর থাকিয়াই ক্রমাগত (x_1, y_1) বিন্দু অভিমুখে চলিতে চলিতে অবশেষে উহার সহিত মিলিয়া যায়, তখনই (x_1, y_1) ও (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয়গামী সরলরেখা স্পর্শক হইবে।

$\therefore$ সমীকরণ (4)এ $-\frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2}$ এ $x_2 = x_1$ এবং $y_2 = y_1$ বসাইয়া স্পর্শকের সমীকরণ হইল,

$$y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1}(x - x_1),$$

বা, $yy_1 - y_1^2 = -xx_1 + x_1^2,$

বা, $xx_1 + yy_1 = x_1^2 + y_1^2 = a^2,$

[$\because$ (x_1, y_1) বৃত্তের উপর অবস্থিত বলিয়া, $x_1^2 + y_1^2 = a^2$.]

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ হইল $\mathbf{xx_1 + yy_1 = a^2}$.

বিকল্প পদ্ধতি ঃ (x_1, y_1) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ,

$$y - y_1 \equiv m(x - x_1), \qquad \cdots \qquad \cdots \quad (1)$$

বা, $y = mx + (y_1 - mx_1)$.

সরলরেখাটি বৃত্তটির স্পর্শক হইলে, অনু. 1'11 অনুসারে,

$$y_1 - mx_1 = a \pm \sqrt{1+m^2},$$

বা, $y_1{}^2 - 2mx_1y_1 + m^2x_1{}^2 = a^2(1+m^2)$

$$= (x_1{}^2 + y_1{}^2)(1+m^2)$$

[(x_1, y_1) বিন্দুটি বৃত্তের উপর অবস্থিত বলিয়া, $x_1{}^2 + y_1{}^2 = a^2$;]

$$= x_1{}^2 + y_1{}^2 + m^2x_1{}^2 + m^2y_1{}^2,$$

বা, $(x_1 + my_1)^2 = 0$; $\therefore \quad m = -\dfrac{x_1}{y_1}$.

m এর এই মান (1)-এ বসাইলে,

$$y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1}(x - x_1),$$

বা, $yy_1 - y_1{}^2 = -xx_1 + x_1{}^2$,

বা, $xx_1 + yy_1 = x_1{}^2 + y_1{}^2 = a^2$.

$\therefore$ $x^2 + y^2 = a^2$ বৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে, উহার স্পর্শকের সমীকরণ হইল $\mathbf{xx_1 + yy_1 = a^2}$.

1'13. $\mathbf{x^2+y^2+2gx+2fy+c=0}$ দ্বারা সূচিত বৃত্তের যে-কোন বিন্দু $\mathbf{(x_1, y_1)}$ এ স্পর্শকের সমীকরণ।

[Equation of the tangent at any point (x_1, y_1) of the circle $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$.]

বৃত্তটির উপর প্রদত্ত বিন্দু (x_1, y_1) এর অতি নিকটবর্তী অপর একটি বিন্দু (x_2, y_2) লও।

(x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয়গামী সরলরেখার সমীকরণ

$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1). \qquad \cdots \qquad \cdots \quad (1)$$

এখন, (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) উভয়ই বৃত্তটির উপর অবস্থিত বলিয়া,

$$x_1{}^2 + y_1{}^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c = 0, \qquad \cdots \quad (2)$$

এবং $$x_2{}^2 + y_2{}^2 + 2gx_2 + 2fy_2 + c = 0 ; \qquad \cdots \quad (3)$$

$\therefore$ (2) হইতে (3) বিয়োগ করিয়া,

$$(x_1^2 - x_2^2) + (y_1^2 - y_2^2) + 2g(x_1 - x_2) + 2f(y_1 - y_2) = 0,$$

বা, $$(x_1 - x_2)(x_1 + x_2 + 2g) + (y_1 - y_2)(y_1 + y_2 + 2f) = 0\ ;$$

$$\therefore \quad \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = -\frac{x_1 + x_2 + 2g}{y_1 + y_2 + 2f}.$$

$\therefore$ (1) হইতে, (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয়গামী সরলরেখার সমীকরণ হইল

$$y - y_1 = -\frac{x_1 + x_2 + 2g}{y_1 + y_2 + 2f}(x - x_1), \quad \cdots \quad \cdots \quad (4)$$

অতএব, (4)-এ $x_2 = x_1$ এবং $y_2 = y_1$ বসাইয়া, (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ হইল

$$y - y_1 = -\frac{x_1 + g}{y_1 + f}(x - x_1),$$

বা, $$yy_1 + fy - y_1^2 - fy_1 = -xx_1 + x_1^2 - gx + gx_1,$$

বা, $$xx_1 + yy_1 + gx + fy = x_1^2 + y_1^2 + gx_1 + fy_1$$
$$= (x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1) - gx_1 - fy_1,$$

বা, $$xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) = x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1,$$

বা, $$xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c$$
$$= x_1^2 + y_1^2 + 2gx_1 + 2fy_1 + c = 0.$$

(উভয় পক্ষে c যোগ করিয়া)

$\therefore$ (x_1, y_1) বিন্দুতে বৃত্তটির স্পর্শকের সমীকরণ হইল

$$\mathbf{xx_1 + yy_1 = g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0.}$$

1·14. অভিলম্ব।

বক্ররেখার উপর অবস্থিত কোন বিন্দুগামী সরলরেখা ঐ বিন্দুতে বক্ররেখাটির স্পর্শকের লম্ব হইলে, সরলরেখাটিকে বক্ররেখাটির ঐ বিন্দুতে **অভিলম্ব** (normal) বলা হয়।

1·15. $\mathbf{x^2 + y^2 = a^2}$ বৃত্তের যে-কোন বিন্দু $\mathbf{(x_1, y_1)}$-এ অভিলম্বের সমীকরণ।

[Equation of the normal at any point (x_1, y_1) of the circle $x^2 + y^2 = a^2$.]

অভিলম্বটি (i) (x_1, y_1) বিন্দুগামী হইবে,

এবং (ii) (x_1, y_1) বিন্দুতে বৃত্তের স্পর্শকের লম্ব হইবে।

এখন, (x_1, y_1) বিন্দুগামী যে-কোন সরলরেখার সমীকরণ

$$y - y_1 = m(x - x_1). \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

সরলরেখাটি বৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে বৃত্তটির অভিলম্ব হইলে, উহা (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের লম্ব হইবে। এই স্পর্শকের সমীকরণ $xx_1 + yy_1 = a^2$,

অর্থাৎ, $$y = -\frac{x_1}{y_1}x + \frac{a^2}{y_1}. \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

$\therefore$ (1) এবং (2) হইতে, $m \times \left(-\frac{x_1}{y_1}\right) = -1$,

বা, $$m = \frac{y_1}{x_1}.$$

$\therefore$ (1)-এ m এর স্থলে, m এর এই মান বসাইয়া, (x_1, y_1) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ হইল

$$y - y_1 = \frac{y_1}{x_1}(x - x_1),$$

বা, $$yx_1 - x_1y_1 = xy_1 - x_1y_1,$$

বা, $$\mathbf{xy_1 - yx_1 = 0.}$$

দ্রষ্টব্য ঃ অভিলম্বের সমীকরণটি ধ্রুবক পদ-বর্জ্জিত বলিয়া অভিলম্বটি মূল-বিন্দুগামী, অতএব বৃত্তের কেন্দ্রগামী হইবে।

1·16. $\mathbf{x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0}$ বৃত্তের যে-কোন বিন্দু $\mathbf{(x_1, y_1)}$-এ অভিলম্বের সমীকরণ।

[Equation of the normal at any point (x_1, y_1) of the circle $x^2 + y^2 + 2gx = 2fy + c = 0$.]

(x_1, y_1) বিন্দুগামী যে-কোন সরলরেখার সমীকরণ

$$y - y_1 = m(x - x_1). \quad \cdots \quad (1)$$

এই সরলরেখা বৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে বৃত্তটির অভিলম্ব হইলে, উহা (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের লম্ব হইবে। এই স্পর্শকের সমীকরণ

$$xx_1 + yy_1 + g(x + x_1) + f(y + y_1) + c = 0,$$

বা, $y = -\frac{x_1+g}{y_1+f}x - \frac{gx_1+fy_1+c}{y_1+f}$. ... ... (2)

$\therefore$ (1) এবং (2) হইতে, $m \times \left(-\frac{x_1+g}{y_1+f}\right) = -1$, বা, $m = \frac{y_1+f}{x_1+g}$.

$\therefore$ (1)-এ m এর পরিবর্তে m এর এই মান বসাইয়া, (x_1, y_1) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ হইল

$$y - y_1 = \frac{y_1+f}{x_1+g}(x - x_1),$$

বা, $y(x_1+g) - x_1y_1 - gy_1 = x(y_1+f) - x_1y_1 - fx_1,$

বা, $\mathbf{x(y_1+f) - y(x_1+g) + gy_1 - fx_1 = 0.}$

দ্রষ্টব্য ঃ অভিলম্বের সমীকরণটি বৃত্তটির কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক $(-g, -f)$ দ্বারা সিদ্ধ হয় বলিয়া, অভিলম্বটি বৃত্তটির কেন্দ্রগামী। এস্থলে, বৃত্তের সাধারণ সমীকরণ ধরা হইয়াছে এবং এই সাধারণ সমীকরণ দ্বারা সূচিত বৃত্তের উপর অবস্থিত যে-কোন বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ নির্ণয় করা হইয়াছে। অতএব, সকল বৃত্তের ক্ষেত্রেই অভিলম্ব কেন্দ্রগামী।

1·17. নির্দ্দিষ্ট বিন্দু হইতে অঙ্কিত স্পর্শকসমূহের সংখ্যা।

[Number of tangents that can be drawn from a given point.]

কোন নির্দ্দিষ্ট বিন্দু (x_1, y_1) হইতে $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শক-সমূহের সংখ্যা ও প্রকৃতি-সম্বন্ধে এস্থলে আলোচনা করা হইবে।

$x^2+y^2=a^2$ বৃত্তের যে-কোন স্পর্শকের সমীকরণ।

$$y = mx \pm a\sqrt{1+m^2}; \quad \cdots \quad (1)$$

(এস্থলে + অথবা − চিহ্নের যে-কোন একটি গ্রহণ করিতে হইবে)

এই সরলরেখা (x_1, y_1) বিন্দুগামী হইলে,

$$y_1 = mx_1 \pm a\sqrt{1+m^2},$$

বা, $(y_1 - mx_1)^2 = a^2(1+m^2),$

বা, $(x_1^2 - a^2)m^2 - 2x_1y_1m + y_1^2 - a^2 = 0.$ ... (2)

সমীকরণটি m এর দ্বিঘাত সমীকরণ বলিয়া, ইহাকে সমাধান করিলে m এর দুইটি মান পাওয়া যায়; অতএব, (x_1, y_1) বিন্দু হইতে $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তে দুইটি স্পর্শক টানা যায়।

1·18. স্পর্শবিন্দুগামী জ্যা।

বৃত্তের বাহিরে অবস্থিত কোন বিন্দু হইতে ঐ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শক-যুগ্মের স্পর্শবিন্দুদ্বয়গামী সরলরেখাকে ঐ বিন্দু হইতে বৃত্তটিতে অঙ্কিত স্পর্শকের **স্পর্শবিন্দুগামী জ্যা** (chord of contact) বলে।

1·19. $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তের বাহিরে অবস্থিত (x_1, y_1) বিন্দু হইতে বৃত্তটিতে অঙ্কিত স্পর্শক-যুগ্মের স্পর্শ-বিন্দুগামী জ্যাএর সমীকরণ।

[Equation of the chord of contact of tangent drawn to the circle $x^2+y^2=a^2$ from the external point (x_1, y_1).]

মনে কর, (x_1, y_1) বিন্দু হইতে $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তটিতে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয়ের স্পর্শবিন্দু (x_2, y_2) এবং (x_3, y_3). স্পষ্টই, এই দুই বিন্দু বৃত্তটির উপর অবস্থিত এবং এই দুই বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক (x_1, y_1) বিন্দুগামী।

এখন, (x_2, y_2) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $xx_2+yy_2=a^2$.

এই স্পর্শক (x_1, y_1) বিন্দুগামী বলিয়া, $x_1x_2+y_1y_2=a^2$, ··· (1)

(1) হইতে সুস্পষ্ট যে (x_2, y_2) বিন্দুটি $xx_1+yy_1=a^2$ সরলরেখার উপর অবস্থিত। ··· (2)

আবার, (x_3, y_3) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $xx_3+yy_3=a^2$.

এই স্পর্শক (x_1, y_1) বিন্দুগামী বলিয়া, $x_1x_3+y_1y_3=a^2$. ··· (3)

(3) হইতে সুস্পষ্ট যে, (x_3, y_3) বিন্দুটি $xx_1+yy_1=a^2$ সরলরেখার উপর অবস্থিত। ··· ··· (4)

(2) এবং (4) হইতে দেখা যাইতেছে (x_2, y_2) এবং (x_3, y_3) স্পর্শবিন্দুদ্বয়ের উভয়ই $xx_1+yy_1=a^2$ সরলরেখার উপর অবস্থিত; অতএব,

$$xx_1+yy_1=a^2$$

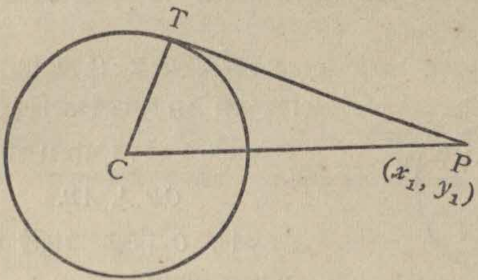
দ্বারা সূচিত সরলরেখাটি (x_2, y_2) এবং (x_3, y_3) স্পর্শবিন্দুদ্বয়গামী বলিয়া, উহা (x_1, y_1) বিন্দু হইতে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয়ের স্পর্শবিন্দুগামী জ্যাএর সমীকরণ।

1·20. স্পর্শকের দৈর্ঘ্য।

বহিঃস্থ (x_1, y_1) বিন্দু হইতে (i) $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তে এবং (ii) $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ বৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য।

[Length of the tangent drawn from the external point (x_1, y_1) to the circle

$$\text{(i) } x^2+y^2=a^2,$$
$$\text{and (ii) } x^2+y^2+2gx+2fy+c=0. \text{]}$$



বৃত্তের কেন্দ্র C এবং PT বৃত্তের বহিঃস্থ $P(x_1, y_1)$ বিন্দু হইতে বৃত্তটিতে অঙ্কিত স্পর্শক। CP, CT যোগ কর।

(i) স্পষ্টই, (1) CT বৃত্তটির ব্যাসার্দ্ধ এবং CT এর দৈর্ঘ্য a ;

(2) $CT \perp PT$; এবং (3) কেন্দ্র C এর স্থানাঙ্ক (0, 0).

$\therefore$ (স্পর্শকের দৈর্ঘ্য $PT)^2 = CP^2 - CT^2$

$$= \{(x_1-0)^2+(y_1-0)^2\} - a^2$$
$$= x_1^2+y_1^2-a^2.$$

$\therefore$ $P(x_1, y_1)$ হইতে অঙ্কিত স্পর্শকের দৈর্ঘ্য

$$= \sqrt{x_1^2+y_1^2-a^2}.$$

(ii) এক্ষেত্রে (1) CT বৃত্তটির ব্যাসার্দ্ধ এবং CT এর দৈর্ঘ্য $= \sqrt{g^2+f^2-c}$;

(2) $CT \perp PT$; এবং (3) কেন্দ্র C এর স্থানাঙ্ক $(-g, -f)$.

$\therefore$ (স্পর্শকের দৈর্ঘ্য $PT)^2 = CP^2 - CT^2$

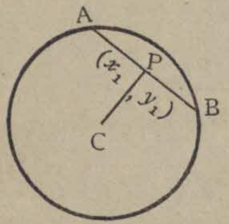
$$= \{(x_1-g)^2+(y_1+f)^2\} - (\sqrt{g^2+f^2-c})^2$$
$$= x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+g^2+f^2-g^2-f^2+c$$
$$= x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c ;$$

$\therefore$ স্পর্শকের দৈর্ঘ্য $= \sqrt{x_1^2+y_1^2+2gx_1+2fy_1+c}$.

দ্রষ্টব্য ঃ (x_1, y_1) বৃত্তের উপর অবস্থিত হইলে, ইহার মান $=0$ হইবে। দেখা গেল, দক্ষিণ পক্ষ শূন্য হইবে, এইরূপে বৃত্তের সমীকরণ লিখিয়া এই সমীকরণের বাম পক্ষে x এর পরিবর্তে x_1 এবং y এর পরিবর্তে y_1 লিখিলে স্পর্শকের বর্গ পাওয়া যায়।

1·21. নির্দ্দিষ্ট বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত জ্যা-এর সমীকরণ।

[Equation of the chord which is bisected at a given point.]



বৃত্তটির কেন্দ্র C, $P(x_1, y_1)$ নির্দ্দিষ্ট বিন্দু এবং AB জ্যাএর মধ্যবিন্দু P.

জ্যামিতি হইতে আমরা জানি

$$CP \perp AB.$$

এখন, C বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(0, 0)$ এবং P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x_1, y_1) ;

$$\therefore \quad OP \text{ এর প্রবণতা (gradient)} = \frac{y_1 - 0}{x_1 - 0} = \frac{y_1}{x_1}. \qquad \cdots (1)$$

সুতরাং, AB এর প্রবণতা m হইলে,

$$m \times \frac{y_1}{x_1} = -1 \text{ বা } m = -\frac{x_1}{y_1}.$$

$\therefore$ AB, অর্থাৎ, যে জ্যা (x_1, y_1) বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয় তাহার সমীকরণ, জ্যা-টি (x_1, y_1) বিন্দুগামী এবং উহার প্রবণতা $(m) -\frac{x_1}{y_1}$ বলিয়া,

$$y - y_1 = -\frac{x_1}{y_1}(x - x_1),$$

বা, $yy_1 - y_1^2 = -xx_1 + x_1^2$ বা $xx_1 + yy_1 = x_1^2 + y_1^2$.

দ্রষ্টব্য ঃ অনায়াসেই, বৃত্তের সমীকরণ $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$-রূপে প্রদত্ত হইলেও কোন নির্দ্দিষ্ট বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত জ্যা-এর সমীকরণ নির্ণয় করা যায়।

উদাহরণ। *Find the locus of the middle points of the chords of the circle $x^2 + y^2 = a^2$, which pass through the fixed point (h, k).*

[C. U. B. A. & B. Sc., 1935, '37]

(h, k) বিন্দুগামী যে-কোন জ্যা-এর মধ্যবিন্দু (x_1, y_1) হইলে, উহার সমীকরণ হইবে $xx_1 + yy_1 = x_1^2 + y_1^2$.

জ্যা-টি (h, k) বিন্দুগামী বলিয়া, $hx_1 + ky_1 = x_1^2 + y_1^2$;

$\therefore$ (x_1, y_1) বা মধ্যবিন্দুর সঞ্চারপথ $hx + ky = x^2 + y^2$,

বা, $x^2 + y^2 - hx - ky = 0$.

স্পষ্টই, সঞ্চারপথটি একটি বৃত্ত এবং সমীকরণ ধ্রুবক রাশিবর্জ্জিত বলিয়া বৃত্তটি মূলবিন্দুগামী।

1·22. বিবিধ উদাহরণমালা।

উদা. 1. Find the length of the chord intercepted by the circle $x^2 + y^2 = 25$ on the straight line $y = 3x + 5$.

বৃত্ত এবং সরলরেখার সমীকরণ দুইটি সহ-সমীকরণরূপে সমাধান করিলে দেখা যায়, সরলরেখাটি বৃত্তটিকে $(-3, -4)$ এবং $(0, 5)$ বিন্দুদ্বয়ে ছেদ করিয়াছে।

$\therefore$ বৃত্ত দ্বারা সরলরেখার ছিন্ন অংশের দৈর্ঘ্য

$$= \sqrt{(-3-0)^2 + (-4-5)^2} = \sqrt{90}.$$

উদা. 2. Find the length of the chords formed by the interception of the circle $x^2 + y^2 + 7x + 5y + 6 = 0$ on the x and y-axes.

x-অক্ষের সমীকরণ $y = 0$ বলিয়া, বৃত্তটি x-অক্ষকে যে-দুই বিন্দুতে ছেদ করে, তাহাদের ভুজ বৃত্তের সমীকরণে $y = 0$ বসাইয়া পাওয়া যায়। এই ভুজদ্বয়ের অন্তরই বৃত্তটি দ্বারা x-অক্ষের ছিন্ন অংশের দৈর্ঘ্য।

$\therefore$ বৃত্তের সমীকরণে $y = 0$ বসাইয়া,

$$x^2 + 7x + 6 = 0 \text{ বা } (x+6)(x+1) = 0.$$

$\therefore$ $x = -6, -1$.

$\therefore$ x-অক্ষের ছিন্ন অংশের দৈর্ঘ্য $= |-6-(-1)| = |-5| = 5$.

এইরূপ, বৃত্তের সমীকরণে $x = 0$ বসাইয়া, $y^2 + 5y + 6 = 0$,

বা, $(y+3)(y+2) = 0$;

$\therefore$ $y = -3, -2$.

$\therefore$ y-অক্ষের ছিন্ন অংশের দৈর্ঘ্য $= |-3-(-2)| = 1$.

উদা. 3. Show that the straight line $2x + y - 5 = 0$ touches the circle $x^2 + y^2 - 4x + 3y + 5 = 0$. What are the co-ordinates of the point of contact ?

সরলরেখার সমীকরণ হইতে $y=-2x+5$ বৃত্তের সমীকরণে বসাইলে, উহাদের ছেদবিন্দুর ভুজ-নির্ণায়ক

$$x^2+(-2x+5)^2-4x+3(-2x+5)+5=0,$$

বা, $5x^2-30x+45=0,$

বা, $(x-3)^2=0.$

দ্বিঘাত সমীকরণটি পাওয়া যায়। এই দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয় অভিন্ন বলিয়া, সরলরেখাটি বৃত্তটিকে পরস্পর মিলিত দুইটি বিন্দুতে ছেদ করে। অতএব, সরলরেখাটি বৃত্তটির স্পর্শক।

(1)-হইতে এই স্পর্শবিন্দুর ভুজ $=3$, এবং $y=-2x+5$ বলিয়া, কোটি $=-2.3+5=-1$. অতএব, সরলরেখাটি বৃত্তটির স্পর্শক এবং স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক **(3, −1).**

উদা. 4. Find for what values of k, the straight line $x-y=k$ touches the circle $x^2+y^2-4x-6y+11=0$ and find the co-ordinates of the point of contact.

সরলরেখার সমীকরণ হইতে $x=y+k$ বৃত্তের সমীকরণে বসাইলে, উহাদের ছেদবিন্দুদ্বয়ের কোটি-নির্ণায়ক

$$(y+k)^2+y^2-4(y+k)-6y+11=0,$$

বা, $2y^2+(2k-10)y+k^2-4k+11=0 \quad \cdots \quad (1)$

দ্বিঘাত সমীকরণটি পাওয়া যায়। সরলরেখাটি স্পর্শক হইলে,

(1)-এর বীজদ্বয় অভিন্ন হইবে ;

$\therefore \ (2k-10)^2-4.2(k^2-4k+11)=0,$

বা, $-4k^2-8k+12=0$, বা, $k^2+2k-3=0,$

বা, $(k+3)(k-1)=0$;

$\therefore \ k=-3$ **বা 1.**

সমীকরণ (1)-এ $k=-3$ বসাইলে, $2y^2-16y+32=0,$

বা, $y^2-8y+16=0,$

বা, $(y-4)^2=0$; $\therefore \ y=4, 4.$

এক্ষেত্রে, সরলরেখার সমীকরণ হইবে $x-y=-3$, বা, $x=y-3$;

$\therefore \ y=4, 4$ হইলে, $x=1, 1.$

$\therefore \ k=-3$ হইলে, সরলরেখাটি বৃত্তের স্পর্শক হয় এবং স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক হয় **(1, 4).**

এইরূপ, সমীকরণ (1)-এ $k=1$ বসাইলে, $2y^2-8y+8=0$,

বা, $y^2-4y+4=0$,

বা, $(y-2)^2=0$;

$\therefore\ y=2, 2$;

এবং সরলরেখার সমীকরণ হইতে, $x=y+k=y+1$;

$\therefore\ y=2, 2$ হইলে, $x=3, 3$.

$\therefore\ k=1$ হইলেও সরলরেখাটি বৃত্তের স্পর্শক হয় এবং তখন স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক হয় **(3, 2).**

উদা. 5. Find the equation of the circle which touches each axis at its positive side at a distance 5 from the origin.

মনে কর, বৃত্তটির সমীকরণ $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$. ... (1)

স্পষ্টই, x-অক্ষ বৃত্তটির (5, 0) বিন্দুতে বৃত্তটির স্পর্শক হইয়াছে ; অতএব, x-অক্ষের সমীকরণ $y=0$ এবং সমীকরণ (1) সহ-সমীকরণরূপে সমাধান করিলে, x-অক্ষ এবং বৃত্তটির ছেদবিন্দুর ভুজ-নির্ণায়ক যে

$$x^2+2gx+c=0$$

দ্বিঘাত সমীকরণটি পাওয়া যায়, তাহার দুইটি বীজই, x-অক্ষ (5, 0) বিন্দুতে বৃত্তটির স্পর্শক বলিয়া 5 হইবে।

$\therefore\ -2g=5+5=10$ বা $g=-5$;

এবং $c=5.5=25$.

আবার, y-অক্ষ (0, 5) বিন্দুতে বৃত্তটির স্পর্শক ;

অতএব, সমীকরণ (1)-এ $x=0$ বসাইলে, y-অক্ষ এবং বৃত্তটির কোটি-নির্ণায়ক যে

$$y^2+2fy+c=0$$

দ্বিঘাত সমীকরণটি পাওয়া যায়, তাহার দুইটি বীজই, y-অক্ষ (0, 5) বিন্দুতে বৃত্তটির স্পর্শক বলিয়া 5 হইবে।

$\therefore\ -2f=5+5=10$ বা $f=-5$.

g, f এবং c এর মান (1)-এ বসাইয়া, নির্ণেয় সমীকরণ হইল

$$\mathbf{x^2+y^2-10x-10y+25=0.}$$

উদা. 6. A circle of radius 6 touches each of the two axes. Find its equation.

মনে কর, বৃত্তটির সমীকরণ $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$. ··· (1)

এই বৃত্তের ব্যাসার্দ্ধ $\sqrt{g^2+f^2-c}$;

$\therefore\ \sqrt{g^2+f^2-c}=6$ বা $g^2+f^2-c=36$. ··· (2)

এখন, x-অক্ষ বৃত্তটির স্পর্শক বলিয়া, সমীকরণ (1)-এ $y=0$ বসাইলে, যে

$$x^2+2gx+c=0$$

দ্বিঘাত সমীকরণটি পাওয়া যায়, তাহার বীজ দুইটি অভিন্ন হইবে ;

$\therefore\ 4g^2=4c$ বা $g^2=c$. ··· ··· (3)

আবার, y-অক্ষ বৃত্তটির স্পর্শক বলিয়া, সমীকরণ (1)-এ $x=0$ বসাইলে, যে

$$y^2+2fy+c=0$$

দ্বিঘাত সমীকরণটি পাওয়া যায় তাহার বীজ দুইটিও অভিন্ন হইবে ;

$\therefore\ 4f^2=4c$, বা, $f^2=c$. ··· ··· (4)

(2), (3) এবং (4) হইতে, $g=\pm 6, f=\pm 6$ এবং $c=36$.

সমীকরণ (1)-এ g, f এবং c এর এই সকল মান বসাইয়া,

যখন, g	f	c	তখন নির্ণেয়
6	6	36	সমীকরণ : $x^2+y^2+12x+12y+36=0$,
6	-6	36	সমীকরণ : $x^2+y^2+12x-12y+36=0$.
-6	6	36	সমীকরণ : $x^2+y^2-12x-12y+36=0$.
-6	-6	36	সমীকরণ : $x^2+y^2-12x-12y+36=0$.

উদা. 7. Find the equation of the circle which touches the straight line $3x+4y=11$ and has its centre at the point $(2, -5)$.

মনে কর, বৃত্তটির সমীকরণ $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$. ··· (1)

এই বৃত্তের কেন্দ্র $(-g, -f)$; ইহা অবশ্যই $(2, -5)$ হইবে ;

অতএব, $g=-2$, এবং $f=5$.

অতএব, (1) হইতে, নির্ণেয় সমীকরণ দাঁড়াইল

$$x^2+y^2-4x+10y+c=0. \quad \cdots \quad (2)$$

এখন, $3x+4y=11$ সরলরেখাটি বৃত্তের স্পর্শক বলিয়া সরলরেখার সমীকরণ $3x+4y=11$, অর্থাৎ, $x=\frac{11-4y}{3}$ এবং বৃত্তের সমীকরণ (2) কে সহ-সমীকরণরূপে সমাধান করিলে, যে

$$\left(\frac{11-4y}{3}\right)^2+y^2-4\cdot\frac{11-4y}{3}+10y+c=0,$$

অর্থাৎ, $25y^2+50y+9c-11=0$

দ্বিঘাত সমীকরণটি পাওয়া যায়, তাহার বীজদ্বয় অবশ্যই অভিন্ন হইবে ;

$\therefore$ $(50)^2=4.25(9c-11)$ বা $c=4$.

$\therefore$ (2) হইতে, নির্ণেয় সমীকরণ হইল $\mathbf{x^2+y^2-4x+10y+4=0}$.

উদা. 8. Find the equation of the tangent to the circle (i) $x^2+y^2=34$ at the point $(3, -5)$, and (ii) $x^2+y^2+6x-2y+2=0$ at the point $(-1, 3)$.

$x^2+y^2=a^2$ বৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$xx_1+yy_1=a^2$ এবং $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ বৃত্তে (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $xx_1+yy_1+g(x+x_1)+f(y+y_1)+c=0$;

$\therefore$ (i) নির্ণেয় সমীকরণ $x.3+y.(-5)=34$ বা $\mathbf{3x-5y=34}$.

(ii) নির্ণেয় সমীকরণ $x.(-1)+y.3+3(x-1)-(y+3)+2=0$.

(কারণ, এস্থলে $g=3$, $f=-1$ এবং $c=2$)

বা, $2x+2y=4$ বা $\mathbf{x+y=2}$.

উদা. 9. Find the equations of the tangents to the circle $x^2+y^2=8$ which are parallel to the straight line $x-y=5$.

প্রদত্ত সরলরেখার সমান্তরাল যে-কোন সরলরেখার সমীকরণ

$$x-y=c, \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

এই সরলরেখা বৃত্তটির স্পর্শক হইলে, স্পর্শকের সমীকরণ

$$x-y=c, \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

অর্থাৎ, $x=y+c$ এবং বৃত্তের সমীকরণ $x^2+y^2=8$, সহ-সমীকরণরূপে সমাধান করিলে, যে

$$(y+c)^2+y^2=8 \text{ বা } 2y^2+2cy+c^2-8=0$$

দ্বিঘাত সমীকরণটি পাওয়া যায়, তাহার বীজদ্বয় অবশ্যই অভিন্ন হইবে ;

$\therefore\ (2c)^2 - 4.2.(c^2 - 8) = 0$ বা $4c^2 = 64$,

বা, $c^2 = 16$; $\therefore\ c = \pm 4$.

$\therefore$ (1) হইতে নির্ণেয় সমীকরণ $\mathbf{x - y = 4}$

এবং $x - y = -4$, অর্থাৎ, $\mathbf{x - y + 4 = 0}$.

উদা. 10. Find the equations of the tangents drawn from the point $(-2, 4)$ to the circle $x^2 + y^2 = 2$.

প্রদত্ত বৃত্তের যে-কোন স্পর্শকের সমীকরণ $y = mx + \sqrt{2}\sqrt{1+m^2}$. ...(1)
স্পর্শকটি $(-2, 4)$ বিন্দুগামী বলিয়া, $4 = -2m + \sqrt{2}\sqrt{1+m^2}$,

বা, $(4 + 2m)^2 = 2(1 + m^2)$, বা, $2m^2 + 16m + 14 = 0$,

বা, $m^2 + 8m + 7 = 0$, বা, $(m + 7)(m + 1) = 0$;

$\therefore\ m = -7, -1$.

$\therefore$ (1) হইতে নির্ণেয় সমীকরণ

$y = -7x + \sqrt{2}.\sqrt{50}$ এবং $y = -x + \sqrt{2}.\sqrt{2}$,

বা, $y = -7x + 10$ এবং $y = -x + 2$,

বা, $\mathbf{7x + y = 10}$ এবং $\mathbf{x + y = 2}$.

উদা. 11. Find the equations of the two tangents to the circle $x^2 + y^2 = 3$, which make an angle $60°$ with the x-axis.

[C. U. B. A. & B. Sc., 1955]

বৃত্তের সমীকরণ $x^2 + y^2 = 3 = (\pm\sqrt{3})^2$ বলিয়া, m এর সকল মানের জন্যই

$y = mx + \sqrt{3}\sqrt{1+m^2}$ এবং $y = mx - \sqrt{3}\sqrt{1+m^2}$ ... (1)
সরলরেখাদ্বয় বৃত্তটির স্পর্শক হইবে।

এই স্পর্শকদ্বয়ের উভয়ই x-অক্ষের সহিত $60°$ কোণ গঠন করে ; অতএব, (1)-এর উভয় সমীকরণেই $m = \tan 60° = \sqrt{3}$.

$\therefore$ (1) হইতে নির্ণেয় সমীকরণদ্বয় হইল

$y = \sqrt{3}x + \sqrt{3}\sqrt{1+3}$ এবং $y = \sqrt{3}x - \sqrt{3}\sqrt{1+3}$,

বা, $y = \sqrt{3}x + 2\sqrt{3}$ এবং $y = \sqrt{3}x - 2\sqrt{3}$,

অর্থাৎ, $\mathbf{y = \sqrt{8}x \pm 2\sqrt{3}}$.

উদা. 12. Show that the circles $x^2 + y^2 - 4x + 6y + 8 = 0$ and $x^2 + y^2 - 10x - 6y + 14 = 0$ touch at $(3, -1)$.

[C. U. B. A. & B. Sc., 1932]

(3, −1) বিন্দুটির স্থানাঙ্ক দ্বারা উভয় সমীকরণই সিদ্ধ হয় বলিয়া বিন্দুটি উভয় বৃত্তের উপরই অবস্থিত। এখন, বিন্দুটিতে উভয় বৃত্ত পরস্পরকে স্পর্শ করিলে বিন্দুটিতে অঙ্কিত প্রথম বৃত্তের স্পর্শক দ্বিতীয় বৃত্তেরও স্পর্শক হইবে।

(3, −1) বিন্দুতে প্রথম বৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ

$$3x - y - 2(x+3) + 3(y-1) + 8 = 0, \text{ বা, } x + 2y = 1 \quad \cdots \quad (1)$$

(3, −1) বিন্দুতে দ্বিতীয় বৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ

$$3x - y - 5(x+3) - 3(y-1) + 14 = 0,$$

$$\text{বা, } -2x - 4y + 2 = 0 \quad \text{বা} \quad x + 2y = 1 \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

(1) এবং (2) হইতে দেখা যায়, $x + 2y = 1$ সরলরেখাটি (3, −1) বিন্দুতে উভয় বৃত্তেরই স্পর্শক হইয়াছে।

∴ বৃত্তদ্বয় (3, −1) বিন্দুতে পরস্পরকে স্পর্শ করে।

উদা. 13. Show that the two circles $x^2 + y^2 - 6x + 4y + 12 = 0$ and $x^2 + y^2 - 12x + 4y + 36 = 0$ touch each other and find their point of contact.

বৃত্তের সমীকরণ $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ হইলে,

কেন্দ্র হয় $(-g, -f)$ এবং ব্যাসার্ধ হয় $\sqrt{g^2 + f^2 - c}$.

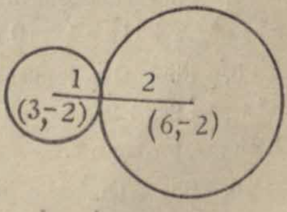
∴ প্রথম বৃত্তের কেন্দ্র (3, −2) এবং ব্যাসার্ধ 1 ;

এবং দ্বিতীয় বৃত্তের কেন্দ্র (6, −2) এবং ব্যাসার্ধ 2.

এখন, কেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব $= \sqrt{(3-6)^2 + (-2+2)^2} = 3$

$= 1 + 2 =$ বৃত্তদ্বয়ের ব্যাসার্ধ-সমষ্টি ;

∴ বৃত্তদ্বয় পরস্পরকে স্পর্শ করে।



এখন, বৃত্তদ্বয় পরস্পরকে স্পর্শ করিলে, কেন্দ্রদ্বয় সংযোজক সরলরেখা স্পর্শবিন্দুগামী হয়, এবং স্পর্শবিন্দু উক্ত সরলরেখাকে ব্যাসার্ধদ্বয়ের অনুপাতে অন্তর্বিভক্ত করে। অতএব, স্পর্শবিন্দুটি (x, y) হইলে,

$$x = \frac{2 \times 3 + 1 \times 6}{1+2} = 4, \text{ এবং } y = \frac{2 \times (-2) + 1 \times (-2)}{1+2} = -2.$$

∴ নির্ণেয় স্পর্শবিন্দু **(4, −2).**

দ্রষ্টব্য : এস্থলে, বৃত্তদ্বয়ের বহিঃস্পর্শ হইয়াছে। অন্তঃস্পর্শের ক্ষেত্রে কেন্দ্রদ্বয়ের দূরত্ব ব্যাসার্দ্ধের অন্তরের সমান।

উদা. 14. If $y=x \sin\alpha+a \sec\alpha$ be a tangent to the circle $x^2+y^2=a^2$, show that $\cos^2\alpha=1$. [C. U. B. A. & B. Sc.]

$y=mx+c$ সরলরেখাটি $x^2+y^2=a^2$ বৃত্তের স্পর্শক হইলে,

$$c^2=a^2(1+m^2);$$

অতএব, এক্ষেত্রে, প্রদত্ত সরলরেখাটি প্রদত্ত বৃত্তের স্পর্শক হইলে,

$$a^2\sec^2\alpha=a^2(1+\sin^2\alpha), \text{ বা, } \sec^2\alpha=1+\sin^2\alpha,$$

বা, $\sec^2\alpha-1=\sin^2\alpha$, বা, $\tan^2\alpha=\sin^2\alpha$,

বা, $\dfrac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}=\sin^2\alpha$, বা, $\dfrac{\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\cos^2\alpha$;

$$\therefore\ \cos^2\alpha=1.$$

প্রশ্নমালা 2

1. Find the points of intersection of the line $x+y=3$ with the circle $x^2+y^2=9$.

2. Find the co-ordinates of the points of intersection of the circle $x^2+y^2-2x+2y=23$ with the straight line $x+7y=19$.

3. Find the length of the chord cut off by the circle

(i) $x^2+y^2=36$ on the straight line $x+y=6$,

(ii) $x^2+y^2=5$ on the straight line $x+y=3$.

4. Find the lengths of the intercepts made by the circle $x^2+y^2-x+11y-12=0$ on the axes of x and y.

5. Find the lengths of the intercepts made by the circle $x^2+y^2+2gx+2fy+c=0$ on the co-ordinate axes, g^2 and f^2 being both greater than c.

6. Show that the length of the chord intercepted by the circle $x^2+y^2=a^2$ on the straight line $y=mx+c$ is

$$2\sqrt{\frac{a^2(1+m^2)-c^2}{1+m^2}}.$$

7. Show that the circle $x^2+y^2=25$ is touched by the straight line $3x+4y=25$. [Utkal, 1948]

8. Prove that the straight line $y-3x=10$ intersects the circle $x^2+y^2=10$ at two coincident points. Find the co-ordinates of this point. [C. U. 1943]

9. Show that the straight line $x+\sqrt{3}y=8$ touches the circle $x^2+y^2=16$ and find the point of contact. [Andhra, 1941]

10. Show that the circle $x^2+y^2-2ax-2ay+a^2=0$ touches the axes of x and y. [U. P. 1944]

11. Prove that the straight lines $x=7$ and $y=8$ touch the circle $x^2+y^2-4x-6y=12$ and find the points of contact.
[C. U. B. A. & B. Sc., 1955]

12. Show that the straight line $3x+4y+7=0$ touches the circle $x^2+y^2-4x-6y-12=0$ and find its point of contact.

13. Prove that the straight line $x+y=2+\sqrt{2}$ touches the circle $x^2+y^2-2x-2y+1=0$ and find the point of contact.
[C. U. B. A. & B. Sc., 1939]

14. Find for what value or values of k, the straight line $2x-3y=k$ touches the circle $x^2+y^2-6x+10y+21=0$ and find the co-ordinates of the point of contact.

15. Find the value of c so that $y=mx+c$ may be a tangent to the circle $x^2+y^2=4y$ for all values of m. [U. P. 1948]

16. Find the equation to the circle which

(i) touches both the axes at their positive sides at a distance 8 from the origin ;

(ii) touches the co-ordinate axes at (1, 0) and (0, 1) ;

(iii) touches the axis of y at a distance 5 from the origin and is of radius 3 ;

(iv) touches the axis of x at a distance 5 from the origin and cuts off a chord of length 24 from the positive part of the axis of y ;

(v) touches the axis of x, passes through the point (1, 1) and whose centre lies in the first quadrant on the straight line $x+y=3$. [C. U. B. A. & B. Sc., 1942]

17. Find the equation to the circle which has its centre at $(1, -3)$ and touches $2x-y-4=0$. [U. P. 1951]

18. Find the equation of the tangent to the circle

(i) $x^2+y^2=20$ at the point $(-2, 4)$;

(ii) $x^2+y^2-16x+4y-5=0$ at the point $(0, -5)$.

19. Find the equations of the tangents to the circle $x^2+y^2=45$ where $y=-6$.

20. Find the equation of the normal to the circle

(i) $x^2+y^2=40$ at the point $(2, 6)$;

(ii) $x^2+y^2+4x-6y+5=0$ at the point $(-4, 5)$.

21. Find the equations of the tangents to the circle $x^2+y^2=25$, which are parallel to the straight line

(i) $4x+3y=0$; [Utkal, 1947]

(ii) $3x+4y=0$. [C. U. 1958]

22. Find the equations of the tangents to the circle $x^2+y^2=9$ which are parallel to the straight line $3x+4y=0$.

[C. U. B. A. & B. Sc., 1923]

23. Find the equations of the tangents to the circle $x^2+y^2-6x+4y=12$, which are parallel to the line $4x+3y+5=0$.

24. Find the equations of the tangents to the circle $x^2+y^2=5$, which are perpendicular to the straight line $2x+y=4$.

25. Find the equations of the tangents to the circle $x^2+y^2-3x+4y-7=0$, which are perpendicular to the line $2x-7y+4=0$.

26. Find the equation of the chord of contact of the point

(i) $(3, -4)$ with respect to the circle $x^2+y^2=16$;

(ii) $(-2, 0)$ with respect to the circle $x^2+y^2=4$.

27. Find the length of the tangent drawn to the circle

(i) $x^2+y^2=12$ from the point $(3, -2)$;

(ii) $x^2+y^2-18x+25y+16=0$ from the point $(0, 0)$.

28. The length of the tangent from (f, g) to the circle $x^2+y^2=6$ is twice the length of the tangent to the circle $x^2+y^2+3x+3y=0$; show that

$$f^2+g^2+4f+4g+2=0.$$ [C. U. B. A. & B. Sc., 1928]

29. Find the equation to the chord of the circle $x^2+y^2=81$, which is bisected at $(-2, 3)$. [C. U. B. A. & B. Sc., 1946]

30. Find the equations of the tangents to the circle $x^2+y^2=25$, which pass through the point $(13, 0)$. [C. U. 1958]

31. Find the equations of the tangents from the origin to the circle $x^2+y^2+20(x+y)+20=0$.

32. Find the equations of the tangents to the circle $x^2+y^2=25$, which are inclined at an angle of 30° to the axis of x.

[U. P. 1946]

33. Show that the two circles $x^2+y^2-8x+6y+21=0$ and $x^2+y^2-14x+6y+57=0$ touch each other at the point $(6, -3)$.

34. Show that the circle $x^2+y^2+8x-4y+15=0$ and $x^2+y^2-8x-12y+7=0$ touch each other externally and find their point of contact.

35. Show that the circles $x^2+y^2-4x+6y-77=0$ and $x^2+y^2-10x+8y+1=0$ touch each other internally and find their point of contact.

36. If the line $lx+my=1$ touches the circle $x^2+y^2=a^2$, then (l, m) lies on a certain circle. Find its equation.

[U. P. 1942]

37. Find the equation to the circle which touches the co-ordinate axes and also the line $x+y=7$.

দ্বিতীয় অধ্যায়

অধিবৃত্ত

(Parabola)

2·1. কনিক।

কোন সমতলের উপর অবস্থিত একটি স্থির ও নির্দ্দিষ্ট বিন্দু এবং একটি স্থির ও নির্দ্দিষ্ট সরলরেখা হইতে ঐ সমতলেরই উপর গতিশীল কোন বিন্দুর দূরত্ব-দ্বয়ের অনুপাত ধ্রুবক হইলে গতিশীল বিন্দুটির সঞ্চারপথকে **কনিক** (Conic) বলে।

ঐ নির্দ্দিষ্ট বিন্দুটিকে বলা হয় কনিকের **নাভি** (Focus), ঐ নির্দ্দিষ্ট সরল-রেখাকে **নিয়ামক** (Directrix) এবং দূরত্বদ্বয়ের ধ্রুবক অনুপাতকে বলা হয় কনিকের **উৎকেন্দ্রতা** (Eccentricity). উৎকেন্দ্রতা সাধারণতঃ e দ্বারা সূচিত হয় ; ইহা দুইটি দূরত্বের অনুপাত বলিয়া সর্ব্বদাই ধনাত্মক। 1 অপেক্ষা বড়, ছোট অথবা 1 এর সমান, e এর এই তিনপ্রকার মান অনুসারে কনিককে তিনভাগে বিভক্ত করা হয় :

$e > 1$ হইলে, কনিকের নাম দেওয়া হয় পরাবৃত্ত (hyperbola),

$e < 1$ হইলে, কনিকের নাম দেওয়া হয় উপবৃত্ত (ellipse),

এবং $e = 1$ হইলে, কনিকের নাম দেওয়া হয় অধিবৃত্ত (parabola).

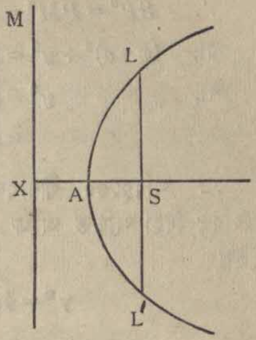
দেখা যাইতেছে, অধিবৃত্তে নির্দ্দিষ্ট বিন্দু এবং নির্দ্দিষ্ট সরলরেখা হইতে চলমান বিন্দুটির দূরত্বের অনুপাত $e=1$; অতএব, এই দূরত্বদ্বয় সর্ব্বদাই সমান, অর্থাৎ চলমান বিন্দুটি নির্দ্দিষ্ট বিন্দু এবং নির্দ্দিষ্ট সরলরেখা হইতে সতত সমদূরবর্ত্তী থাকে ; সুতরাং, অধিবৃত্তের নিম্নলিখিত সংজ্ঞাও পাওয়া যায়।

2·2. অধিবৃত্ত।

কোন সমতলের উপর অবস্থিত একটি স্থির ও নির্দ্দিষ্ট বিন্দু এবং একটি স্থির ও নির্দ্দিষ্ট সরলরেখা হইতে সতত সমদূরবর্ত্তী থাকিয়া ঐ সমতলেরই উপর গতিশীল কোন বিন্দুর সঞ্চারপথকে **অধিবৃত্ত** (Parabola) বলে।

নির্দ্দিষ্ট বিন্দুটিকে ঐ অধিবৃত্তের **নাভি** (Focus) এবং নির্দ্দিষ্ট সরলরেখাকে উহার **নিয়ামক** (Directrix) বলে।

নাভিবিন্দুগামী সরলরেখা নিয়ামকের লম্ব হইলে, তাহাকে অধিবৃত্তের **অক্ষ** (Axis) এবং অক্ষের সহিত অধিবৃত্তের ছেদবিন্দুকে ঐ অধিবৃত্তের **শীর্ষবিন্দু** (Vertex) বলা হয়।

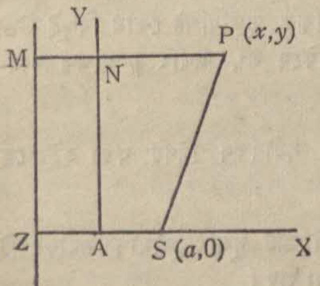


নাভিবিন্দুগামী জ্যা অক্ষের লম্ব হইলে, জ্যাটিকে **নাভিলম্ব** (Latus rectum) বলা হয়।

পার্শ্ববর্তী চিত্রে, LAL' অধিবৃত্ত, S ঐ অধিবৃত্তের নাভি, MX নিয়ামক, (বর্দ্ধিত) XS অক্ষ, A শীর্ষবিন্দু এবং LSL' নাভিলম্ব।

2·3. অধিবৃত্তের সমীকরণ।

অধিবৃত্তের অক্ষকে x-অক্ষ, শীর্ষবিন্দুকে মূলবিন্দু এবং মূলবিন্দু দিয়া অঙ্কিত অক্ষের লম্বরেখাকে y-অক্ষ ধরা হইল।



A অধিবৃত্তের শীর্ষবিন্দু, S নাভি, এবং ZM নিয়ামক। SA যোগ করিয়া বর্দ্ধিত করা হইল ; বর্দ্ধিত SA নিয়ামককে Z বিন্দুতে ছেদ করিল। SZ নিয়ামকের উপর লম্ব। A কে মূলবিন্দু, বর্দ্ধিত ZS কে x-অক্ষ এবং A বিন্দু দিয়া AY সরলরেখা অক্ষের উপর লম্ব টানা হইল। ইহা y-অক্ষ হইবে। এখন, A অধিবৃত্তের শীর্ষবিন্দু বলিয়া, $ZA = AS = a$, মনে কর। অধিবৃত্তের উপর যে-কোন বিন্দু P লও এবং মনে কর, উহার স্থানাঙ্ক (x, y). SP যোগ কর এবং P হইতে নিয়ামকের উপর PM লম্ব টান ; ইহা y-অক্ষকে N বিন্দুতে ছেদ করিল।

স্পষ্টই S বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(a, 0)$ এবং

$$PM = PN + NM = PN + AZ = x + a.$$

P অধিবৃত্তের বিন্দু বলিয়া, $SP = PM$;

$$\therefore \quad SP^2 = PM^2 = (x+a)^2,$$

$$\text{বা,} \quad (x-a)^2 + y^2 = (x+a)^2,$$

$$\text{বা,} \quad y^2 = (x+a)^2 - (x-a)^2$$

$$= 4ax.$$

$\therefore$ অধিবৃত্তের শীর্ষবিন্দুকে মূলবিন্দু, অধিবৃত্তের অক্ষকে x-অক্ষ এবং শীর্ষবিন্দু দিয়া অঙ্কিত অক্ষের লম্বরেখাকে y-অক্ষ ধরিয়া অধিবৃত্তের সমীকরণ হইল

$$\mathbf{y^2 = 4ax.}$$

2·4. অধিবৃত্তের আকার।

অধিবৃত্তের সমীকরণ হইতে উহার আকার-নির্ণায়ক নিম্নলিখিত তথ্যগুলি পাওয়া যায় :

(1) বাস্তব রাশির বর্গ কখনই ঋণাত্মক হইতে পারে না ; অতএব, y^2, অর্থাৎ $4ax$ এবং a দৈর্ঘ্য-জ্ঞাপক বলিয়া সর্ব্বদাই ধনাত্মক, সেইজন্য x কখনই ঋণাত্মক হইতে পারে না। অতএব, ঋণাত্মক ভুজবিশিষ্ট কোন বিন্দুই উক্ত সমীকরণ দ্বারা সূচিত অধিবৃত্তের উপর থাকিবে না, অর্থাৎ y-অক্ষের বাম-পার্শ্বে অধিবৃত্তটির কোন অংশই থাকিবে না।

অধিবৃত্তের শীর্ষবিন্দুকে মূলবিন্দু ধরিয়া সমীকরণ নির্ণয় করা হইয়াছে বলিয়া,

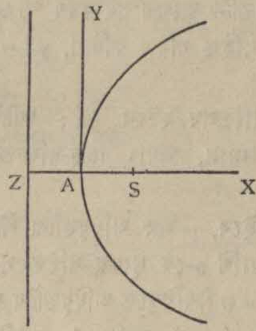
(2) উক্ত সমীকরণটি দ্বারা সূচিত অধিবৃত্তটি মূলবিন্দুগামী ; সমীকরণটি (0, 0) দ্বারা সিদ্ধ হয় বলিয়াও এই সিদ্ধান্ত করা যায়।

(3) x এর যে-কোন ধনাত্মক মানের জন্যই y এর সমান কিন্তু বিপরীত চিহ্ন-বিশিষ্ট দুইটি মান থাকিবে, অর্থাৎ অধিবৃত্তস্থ কোন বিন্দু (x_1, y_1) হইলে $(x_1, -y_1)$ বিন্দুটি অবশ্যই অধিবৃত্তস্থ হইবে ; অতএব, অধিবৃত্তটি x-অক্ষে, অর্থাৎ উহার অক্ষে প্রতিসম (symmetrical).

(4) অধিবৃত্তটি একমাত্র শীর্ষবিন্দুতেই উহার অক্ষকে ছেদ করে ; x এর শূন্য ভিন্ন আর কোন মানের জন্যই y শূন্য হয় না, পরন্তু x ডানদিকে যতই বাড়িয়া চলে, y ও ঐ সমীকরণ অনুযায়ী ততই বাড়িয়া চলিবে ; অতএব,

অধিবৃত্তটি বদ্ধ রেখা (closed curve) নহে, x এর ক্রমবর্দ্ধমান মানের সহিত y এর চিহ্ন-বর্জ্জিত মানযুগ্মও ক্রমবর্দ্ধমান।

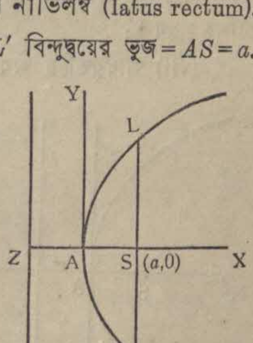
এই সকল তথ্য হইতে এই সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়া যায় যে, অধিবৃত্তটি, নিম্নস্থ চিত্রের ন্যায় মূলবিন্দুগামী, নিজ অক্ষে প্রতিসম এবং y-অক্ষের ডান-দিকে অসীম পর্য্যন্ত বিস্তৃত একটি সন্তত রেখা (continuous curve).



2·5. অধিবৃত্তের নাভিলম্ব।

নাভি S বিন্দুগামী এবং অক্ষের লম্ব LSL' জ্যা নাভিলম্ব (latus rectum). এখন, A বিন্দু $(0, 0)$, S বিন্দু $(a, 0)$ এবং L ও L' বিন্দুদ্বয়ের ভুজ $= AS = a.$ L ও L' বিন্দুদ্বয়ের কোটি $y^2 = 4ax$ সমীকরণে x এর স্থলে a বসাইয়া পাওয়া যায়। ঐ সমীকরণে $x = a$ বসাইলে, $y^2 = 4a^2$;

$\therefore\ y = \pm 2a.$



সুতরাং, L বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(a, 2a)$ এবং L' বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(a, -2a)$.

$\therefore\ LL' = \sqrt{(a-a)^2 + (2a+2a)^2} = 4a.$

অতএব, দেখা গেল অধিবৃত্তটির নাভিলম্ব।

(i) উহার শীর্ষবিন্দু হইতে উহার নাভির দূরত্বের চারিগুণ ;
এবং (ii) অধিবৃত্তটির সমীকরণের x অর্থাৎ একঘাত চলরাশিটির চিহ্ন-বর্জ্জিত সহগের সমান।

2·6. অধিবৃত্ত ও তাহার সমীকরণ-বিষয়ক কয়েকটি জ্ঞাতব্য তথ্য।

(1) অধিবৃত্তের সমীকরণ $\mathbf{y^2=4ax}$ হইলে,

(i) উহার শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক **(0, 0)** ;

(ii) x-অক্ষ উহার অক্ষ ; স্পষ্টই সমীকরণে চলরাশিটির দ্বিঘাতকে শূন্যের সহিত সমিত করিয়া অধিবৃত্তটির অক্ষের সমীকরণ পাওয়া যায় ; এস্থলে, দ্বিঘাত চলরাশি y^2-কে শূন্যের সহিত সমিত করিয়া, $\mathbf{y^2=0}$ বা $\mathbf{y=0}$ অধিবৃত্তটির অক্ষের সমীকরণ ;

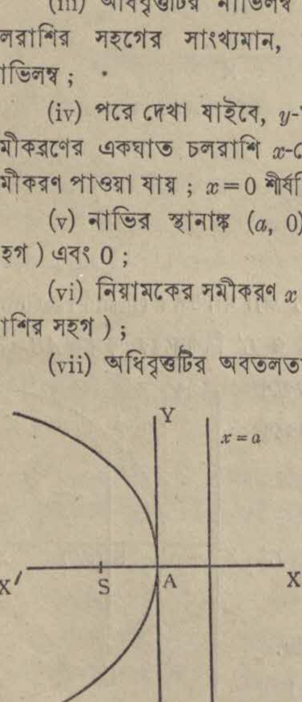
(iii) অধিবৃত্তটির নাভিলম্ব হইবে **4a ;** স্পষ্টই সমীকরণের একঘাত চলরাশির সহগের সাংখ্যমান, অর্থাৎ চিহ্ন-বর্জ্জিত উক্ত সহগ অধিবৃত্তের নাভিলম্ব ;

(iv) পরে দেখা যাইবে, y-অক্ষ অধিবৃত্তটির শীর্ষবিন্দুতে স্পর্শক ; স্পষ্টই, সমীকরণের একঘাত চলরাশি x-কে শূন্যের সহিত সমিত করিয়া এই স্পর্শকের সমীকরণ পাওয়া যায় ; $x=0$ শীর্ষবিন্দুতে অধিবৃত্তটির স্পর্শক ;

(v) নাভির স্থানাঙ্ক $(a, 0)$, অর্থাৎ $\frac{1}{4}$ (সমীকরণের একঘাত রাশির সহগ) এবং 0 ;

(vi) নিয়ামকের সমীকরণ $x=-a$, অর্থাৎ $x=-(\frac{1}{4}$ সমীকরণের একঘাত রাশির সহগ) ;

(vii) অধিবৃত্তটির অবতলতা (concavity) বা বক্রতা x-অক্ষের ধনাত্মক-দিক্‌মুখী ; দেখা যাইবে, a ধনাত্মক হইলে, অবতলতা ধনাত্মক-দিক্‌মুখী এবং a ঋণাত্মক হইলে, অবতলতা ঋণাত্মক-দিক্‌মুখী হয়।



(2) অধিবৃত্তের সমীকরণ $y^2=-4ax$ হইলে, পার্শ্ববর্ত্তী চিত্রের ন্যায় ইহার অবস্থান ও আকার হইবে, এবং

(i) ইহার শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক হইবে (0, 0) ;

(ii) $y=0$, অর্থাৎ x-অক্ষ হইবে ইহার অক্ষ ;

(iii) $4a$ হইবে নাভিলম্ব ;

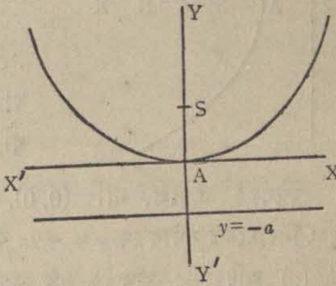
(iv) $x=0$, অর্থাৎ y-অক্ষ উহার শীর্ষবিন্দুতে স্পর্শক হইবে ;

(v) নাভির স্থানাঙ্ক হইবে $(-a, 0)$;

(vi) নিয়ামকের সমীকরণ হইবে $x=-(-a)=a$;

(vii) অধিবৃত্তটির অবতলতা, a ঋণাত্মক বলিয়া x-অক্ষের ঋণাত্মক-দিক্‌মুখী হইবে।

(3) অধিবৃত্তের সমীকরণ $x^2=4ay$ হইলে, পার্শ্ববর্ত্তী চিত্রের ন্যায় ইহার অবস্থান ও আকার হইবে, এবং



(i) ইহার শীর্ষবিন্দু হইবে $(0, 0)$;

(ii) $x=0$, অর্থাৎ x-অক্ষ হইবে ইহার অক্ষ ;

(iii) $4a$ হইবে নাভিলম্ব ;

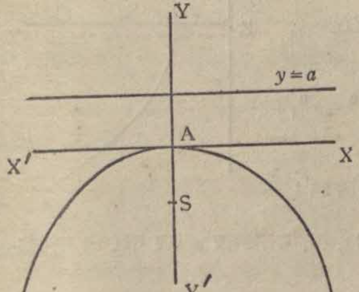
(iv) $y=0$, অর্থাৎ x-অক্ষ হইবে শীর্ষবিন্দুতে স্পর্শক ;

(v) নাভির স্থানাঙ্ক হইবে $(0, a)$;

(vi) নিয়ামকের সমীকরণ হইবে $y=-a$;

(vii) অধিবৃত্তটির অবতলতা y-অক্ষের ধনাত্মক-দিক্‌মুখী হইবে।

(4) অধিবৃত্তের সমীকরণ $x^2=-4ay$ হইলে, পার্শ্ববর্ত্তী চিত্রের ন্যায় ইহার অবস্থান ও আকার হইবে, এবং



(i) ইহার শীর্ষবিন্দু হইবে $(0, 0)$;

(ii) $x=0$, অর্থাৎ y-অক্ষ হইবে ইহার অক্ষ ;

(iii) $4a$ হইবে নাভিলম্ব ;

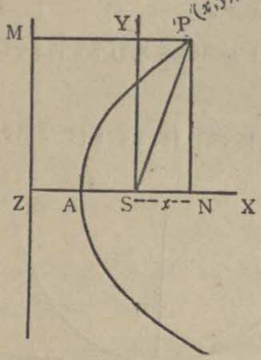
(iv) $y=0$, অর্থাৎ x-অক্ষ হইবে শীর্ষবিন্দুতে স্পর্শক ;

(v) নাভির স্থানাঙ্ক হইবে $(0, -a)$;

(vi) নিয়ামকের সমীকরণ হইবে $y=-(-a)=a$;

(vii) অধিবৃত্তটির অবতলতা y-অক্ষের ঋণাত্মক-দিক্‌মুখী হইবে।

2·7. অধিবৃত্তের বিভিন্ন সমীকরণ।



(i) মূলবিন্দু নাভিতে এবং অধিবৃত্তের অক্ষ x-অক্ষ :

এস্থলে, S মূলবিন্দু, অক্ষ x-অক্ষ।

অধিবৃত্তস্থ যে-কোন বিন্দু P এর স্থানাঙ্ক (x, y) হইলে, এবং $AS = a$ হইলে,

$$SP = PM = NZ = x + ZA + AS$$
$$= x + 2a \; (\because ZA = AS = a);$$

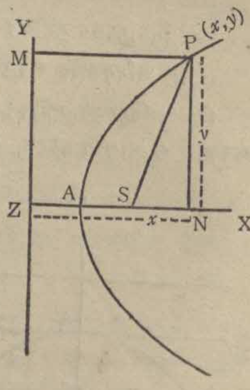
$\therefore \quad SP^2 = (x+2a)^2,$

বা, $x^2 + y^2 = (x+2a)^2,$

বা, $y^2 = 4a(x+a)$; ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ।

দ্রষ্টব্য : এস্থলে, নাভি (0, 0), নাভিলম্ব x এর সহগের সাংখ্যমান $4a$ এবং নিয়ামকের সমীকরণ $x = -2a$ বা $x + 2a = 0$.

(ii) অধিবৃত্তের অক্ষ x-অক্ষ এবং নিয়ামক y-অক্ষ :



এস্থলে, Z মূলবিন্দু এবং অধিবৃত্তের অক্ষ x-অক্ষ।

অধিবৃত্তস্থ যে-কোন বিন্দু P এর স্থানাঙ্ক (x, y) হইলে, এবং $AS = a$ হইলে, $ZN = x$, $PN = y$,

এবং $SP = PM = NZ = x$;

$\therefore \quad SP^2 = x^2$ বা $SN^2 + PN^2 = x^2,$

বা, $(x - 2a)^2 + y^2 = x^2,$

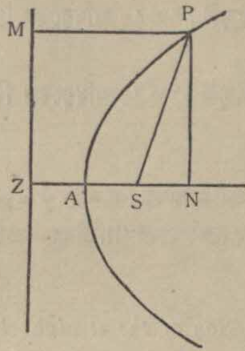
বা, $y^2 = 4a(x - a)$; ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ।

দ্রষ্টব্য : এস্থলে, S এর স্থানাঙ্ক $(2a, 0)$, নাভিলম্ব x এর সহগের সাংখ্যমান $4a$, নিয়ামকের সমীকরণ $= 0$.

2·8. নাভি হইতে অধিবৃত্তস্থ কোন বিন্দুর দূরত্ব।

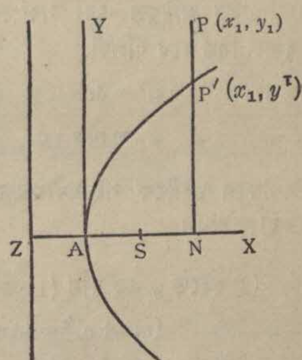
অধিবৃত্তের সমীকরণ $y^2 = 4ax$ হইলে, A হইবে মূলবিন্দু; তখন

অধিবৃত্তস্থ কোন বিন্দু $P(x, y)$ এর নাভি হইতে দূরত্ব (focal distance) $= SP = PM = ZN = ZA + AN = a + x$.



2·9. বিন্দুর অবস্থান।

অধিবৃত্তের সমীকরণ $y^2 = 4ax$ হইলে, শীর্ষবিন্দু A হইবে মূলবিন্দু, এবং অধিবৃত্তের অক্ষ হইবে x-অক্ষ। মনে কর, কোন বিন্দু P এর স্থানাঙ্ক (x_1, y_1) ; P বিন্দু হইতে x-অক্ষের উপর PN লম্ব টানা হইল ; PN, অথবা, (P অধিবৃত্তের ভিতরে অবস্থিত হইলে) বর্দ্ধিত PN অধিবৃত্তটিকে P' বিন্দুতে ছেদ করিল। এখন, $AN = x_1$, $PN = y_1$; P' বিন্দুর ভুজ $= AN = x_1$; এবং মনে কর, P' বিন্দুর কোটি $= y_1'$. $P'(x_1, y_1')$ বিন্দুটি অধিবৃত্তের উপর অবস্থিত বলিয়া,



$$y_1'^2 = 4ax_1. \quad \cdots \quad (1)$$

স্পষ্টই, P বিন্দুর অবস্থান অধিবৃত্তের বাহিরে, উহার উপর অথবা ভিতরে হইবে,

যদি $PN \ >, =$, অথবা, $< P'N$ হয়,

অর্থাৎ, যদি $y_1 \ >, =$, অথবা, $< y_1'$ হয়,

অর্থাৎ, যদি $y_1^2 >, =$, অথবা, $< y_1'^2$ হয়,

অর্থাৎ, যদি $y_1^2 >, =$, অথবা, $< 4ax_1$ হয়। [(1) হইতে]

উদাহরণ। (2, 4) বিন্দুটি $y^2 = 4x$ অধিবৃত্তের বাহিরে অবস্থিত ; কারণ,
$$4^2 > 4 \,.\, 2 ;$$
(4, 4) বিন্দুটি $y^2 = 4x$ অধিবৃত্তের উপর অবস্থিত ; কারণ,
$$4^2 = 4 \,.\, 4$$
(4, 2) বিন্দুটি $y^2 = 4x$ অধিবৃত্তের ভিতরে অবস্থিত ; কারণ,
$$2^2 < 4 \,.\, 4.$$

2·10. $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্ত এবং $y = mx + c$ সরলরেখার ছেদবিন্দু এবং সরলরেখাটির অধিবৃত্তের স্পর্শক হইবার শর্ত।

[*Points of intersection of the straight line $y = mx + c$ and the parabola $y^2 = 4ax$, and the condition that the straight line may be a tangent to the parabola.*]

প্রদত্ত অধিবৃত্ত এবং সরলরেখার ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক উভয় সমীকরণকেই যুগপৎ সিদ্ধ করে বলিয়া,

$$y^2 = 4ax \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

$$y = mx + c \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

সমীকরণ দুইটিকে সহ-সমীকরণরূপে সমাধান করিয়া ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করা যাইবে।

(2) হইতে y এর মান (1)-এ বসাইলে,

$$(mx + c)^2 = 4ax,$$

বা, $$m^2x^2 + 2(mc - 2a)x + c^2 = 0 \quad \cdots \quad (3)$$

(3) একটি দ্বিঘাত সমীকরণ ; ইহাকে সমাধান করিলে x এর দুইটি মান পাওয়া যায় বলিয়া সরলরেখা অধিবৃত্তটিকে দুইটি বিন্দুতে ছেদ করিবে। x এর ঐ মান দুইটি (2)-এ x এর পরিবর্তে বসাইলে, y এর অনুরূপ দুইটি মান পাওয়া যাইবে। x এর একটি মান এবং y এর অনুরূপ মান অধিবৃত্ত ও সরলরেখার একটি ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক ; আর x এর অন্য মানটি এবং y এর অনুরূপ মান উহাদের অপর ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক।

সমীকরণ (3) এর বীজদ্বয় যথাক্রমে বাস্তব এবং ভিন্ন, বাস্তব এবং অভিন্ন, অথবা অবাস্তব হইবে,

যদি $4(mc-2a)^2 \gtreqless 4m^2c^2$ হয়,

অর্থাৎ, যদি $4(m^2c^2 - 4amc + 4a^2) \gtreqless 4m^2c^2$ হয়,

অর্থাৎ, যদি $16a^2 \gtreqless 16amc$ হয়,

অর্থাৎ, যদি $a \gtreqless mc$ হয়,

অর্থাৎ, যদি $c \lesseqgtr \frac{a}{m}$ হয়,

অতএব, $y = mx + c$ সরলরেখাটি $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তটিকে

(i) পৃথক্ দুইটি বিন্দুতে ছেদ করে, যদি $c < \frac{a}{m}$ হয় ;

(ii) পরস্পর মিলিত দুইটি বিন্দুতে ছেদ করে, যদি $c = \frac{a}{m}$ হয় ;

(iii) আদৌ ছেদ করে না, যদি $c > \frac{a}{m}$ হয়।

সরলরেখাটি অধিবৃত্তটিকে পরস্পর মিলিত দুইটি বিন্দুতে ছেদ করিলে সরলরেখাটি উহার স্পর্শক হয় ; অতএব, $y = mx + c$ সরলরেখাটির $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তটির স্পর্শক হইবার শর্ত

$$\mathbf{c} = \frac{\mathbf{a}}{\mathbf{m}}.$$

অনুসিদ্ধান্ত 1. উপরের ফল হইতে দেখা যায়, $y = mx + \frac{a}{m}$ সরলরেখাটি m এর সকল মানের জন্যই $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তটির একটি স্পর্শক।

অনুসিদ্ধান্ত 2. $y = mx + \frac{a}{m}$ স্পর্শকটির স্পর্শবিন্দু নির্ণয় করিতে হইলে, এই সমীকরণকে এবং অধিবৃত্তের সমীকরণ $y^2 = 4ax$ কে সহ-সমীকরণরূপে সমাধান করিতে হইবে। অতএব, প্রথম সমীকরণ হইতে y এর মান দ্বিতীয় সমীকরণে বসাইয়া,

$$\left(mx + \frac{a}{m}\right)^2 = 4ax,$$

বা, $m^2x^2 - 2ax + \frac{a^2}{m^2} = 0,$

বা, $\left(mx - \frac{a}{m}\right)^2 = 0$; $\therefore\ x = \frac{a}{m^2}, \frac{a}{m^2}$;

$y = mx + \frac{a}{m}$ এ x এর এই মান বসাইয়া,

$$y = m \cdot \frac{a}{m^2} + \frac{a}{m} = \frac{2a}{m}.$$

$\therefore\ y = mx + \frac{a}{m}$ স্পর্শকটির স্পর্শবিন্দু হইল $\left(\frac{a}{m^2}, \frac{2a}{m}\right)$.

2·11. $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের যে-কোন বিন্দু (x_1, y_1)-এ স্পর্শকের সমীকরণ।

[*Equation of the tangent at any point* (x_1, y_1) *of the parabola* $y^2 = 4ax$.]

অধিবৃত্তটির উপর অবস্থিত প্রদত্ত বিন্দু (x_1, y_1) এর অতি নিকটবর্তী এবং ঐ অধিবৃত্তের উপরই অপর একটি বিন্দু (x_2, y_2) লও।

(x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয়গামী সরলরেখার সমীকরণ

$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1) \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

এখন, (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) উভয় বিন্দু প্রদত্ত অধিবৃত্তের উপর অবস্থিত বলিয়া,

$$y_1^2 = 4ax_1 \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

এবং $y_2^2 = 4ax_2 \quad \cdots \quad \cdots \quad (3)$

$\therefore\ y_1^2 - y_2^2 = 4a(x_1 - x_2)$, [(2) হইতে (3) বিয়োগ করিয়া]

বা, $(y_1 - y_2)(y_1 + y_2) = 4a(x_1 - x_2)$,

বা, $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{4a}{y_1 + y_2}. \quad \cdots \quad \cdots \quad (4)$

$\therefore$ (1) এবং (4) হইতে, (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয়গামী সরলরেখার সমীকরণ হইল

$$y - y_1 = \frac{4a}{y_1 + y_2}(x - x_1) \quad \cdots \quad \cdots \quad (5)$$

এবং (x_2, y_2) বিন্দুটি ঐ অধিবৃত্তের উপর থাকিয়াই ক্রমাগত (x_1, y_1) অভিমুখে চলিতে চলিতে অবশেষে উহার সহিত মিলিয়া যায়, অর্থাৎ $x_2 = x_1$ এবং $y_2 = y_1$ হয়, তখন (5) এর সরলরেখাটি একটি স্পর্শক হয় ;

$\therefore$ সমীকরণ (5)-এ $y_2 = y_1$ বসাইয়া, (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ হইল

$$y - y_1 = \frac{2a}{y_1}(x - x_1),$$

বা, $yy_1 - y_1{}^2 = 2ax - 2ax_1,$

বা, $yy_1 = y_1{}^2 + 2ax - 2ax_1$

$= 4ax_1 + 2ax - 2ax_1,$

[(x_1, y_1) অধিবৃত্তের উপর অবস্থিত বলিয়া, $y_1{}^2 = 4ax_1$]

$= 2ax + 2ax_1 = 2a(x + x_1).$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ $\mathbf{yy_1 = 2a(x + x_1)}$.

দ্রষ্টব্য 1. বৃত্তের সমীকরণের ন্যায় এস্থলেও অধিবৃত্তের সমীকরণে y^2-স্থলে yy_1 এবং $4ax$-স্থলে $2a(x + x_1)$ লিখিয়া স্পর্শকের সমীকরণ পাওয়া গিয়াছে।

দ্রষ্টব্য 2. $y = mx + \frac{a}{m}$ সরলরেখাটি $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে অধিবৃত্তটির স্পর্শক হইলে,

$$y = mx + \frac{a}{m}, \quad \text{বা,} \quad mx - y + \frac{a}{m} = 0,$$

এবং $yy_1 = 2a(x + x_1)$, বা, $2ax - yy_1 + 2ax_1 = 0$

সমীকরণদ্বয় দ্বারা একই সরলরেখা সূচিত হয় ;

$$\therefore \frac{2a}{m} = \frac{-y_1}{-1} = \frac{2ax_1}{a/m};$$

$$\therefore x_1 = \frac{2a}{m} \cdot \frac{a}{m.2a} = \frac{a}{m^2}, \text{ এবং } y_1 = \frac{2a}{m}.$$

অতএব, $y = mx + \frac{a}{m}$ স্পর্শকটির স্পর্শবিন্দু হইল

$$\left(\frac{a}{m^2}, \frac{2a}{m}\right).$$

2·12. নির্দ্দিষ্ট বিন্দু হইতে $y^2=4ax$ অধিবৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকসমূহের সংখ্যা।

[*Number of tangents that can be drawn from a given point to the parabola* $y^2=4ax$.]

কোন নির্দ্দিষ্ট বিন্দু (x_1, y_1) হইতে $y^2=4ax$ অধিবৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শক-সমূহের সংখ্যা ও প্রকৃতি-সম্বন্ধে এস্থলে আলোচনা করা হইবে।

$y^2=4ax$ অধিবৃত্তের যে-কোন স্পর্শকের সমীকরণ

$$y = mx + \frac{a}{m}. \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

এই সরলরেখা (x_1, y_1) বিন্দুগামী হইলে,

$$y_1 = mx_1 + \frac{a}{m}, \text{ বা, } x_1 m^2 - y_1 m + a = 0 \quad \cdots \quad (2)$$

সমীকরণটি m এর দ্বিঘাত সমীকরণ বলিয়া, ইহাকে সমাধান করিলে m এর দুইটি মান পাওয়া যায় ; অতএব, (x_1, y_1) বিন্দু হইতে $y^2=4ax$ অধিবৃত্তে দুইটি স্পর্শক টানা যায়।

2·13. $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের যে-কোন বিন্দু (x_1, y_1)-এ অভিলম্বের সমীকরণ।

[*Equation of the normal at any point* (x_1, y_1) *of the parabola* $y^2=4ax$.]

অভিলম্বটি (i) (x_1, y_1) বিন্দুগামী হইবে,

এবং (ii) (x_1, y_1) বিন্দুতে অধিবৃত্তের স্পর্শকের লম্ব হইবে।

এখন, (x_1, y_1) বিন্দুগামী যে-কোন সরলরেখার সমীকরণ,

$$y - y_1 = m(x - x_1), \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

এবং অধিবৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে উহার স্পর্শকের সমীকরণ,

$$yy_1 = 2a(x + x_1), \quad \text{বা,} \quad y = \frac{2a}{y_1}x + \frac{2ax_1}{y_1}. \quad \cdots \quad (2)$$

(1) দ্বারা সূচিত সরলরেখাটি (2) দ্বারা সূচিত সরলরেখার লম্ব বলিয়া,

$$m \times \left(\frac{2a}{y_1}\right) = -1, \quad \text{বা,} \quad m = -\frac{y_1}{2a}.$$

$\therefore$ (1)-এ m এর স্থলে, m এর এই মান বসাইয়া, (x_1, y_1) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ হইল,

$$\mathbf{y - y_1 = -\frac{y_1}{2a}(x - x_1).}$$

অনুসিদ্ধান্ত। $(am^2, -2am)$ বিন্দু, m এর সকল মানের জন্যই, $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের উপর অবস্থিত। এই বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ

$$\mathbf{y = mx - 2am - am^3.}$$

$$m = -\frac{y_1}{2a} \text{ বলিয়া, } y_1 = -2am \text{ এবং } x_1 = \frac{{y_1}^2}{4a} = am^2.$$

অতএব, $(am^2, -2am)$ বিন্দু, m এর সকল মানের জন্যই $y^2 - 4ax$ অধিবৃত্তের উপর অবস্থিত। অতএব, এই বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ

$$y + 2am = m(x - am^2)$$

অর্থাৎ, $y = mx - 2am - am^3$.

2·14. স্পর্শ বিন্দুগামী জ্যা।

$\mathbf{y^2 = 4ax}$ অধিবৃত্তের বাহিরে অবস্থিত $\mathbf{(x_1, y_1)}$ বিন্দু হইতে অধিবৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শক-যুগ্মের স্পর্শ বিন্দু-গামী জ্যা-এর সমীকরণ।

[*Equation of the chord of contact of tangents drawn to the parabola* $y^2 = 4ax$ *from an external point* (x_1, y_1).]

মনে কর, (x_1, y_1) বিন্দু হইতে $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তটিতে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয়ের স্পর্শবিন্দু (x_2, y_2) এবং (x_3, y_3). স্পষ্টই, এই বিন্দু অধিবৃত্তটির উপর অবস্থিত এবং এই দুই বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয় (x_1, y_1) বিন্দুগামী।

এখন, (x_2, y_2) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $yy_2 = 2a(x + x_2)$.

এই স্পর্শক (x_1, y_1) বিন্দুগামী বলিয়া, $y_1y_2 = 2a(x_1 + x_2)$ ... (1)

(1) হইতে সুস্পষ্ট যে, (x_2, y_2) বিন্দুটি

$yy_1 = 2a(x + x_1)$ সরলরেখার উপর অবস্থিত। ... (2)

আবার, (x_3, y_3) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $yy_3 = 2a(x + x_3)$.

এই স্পর্শক (x_1, y_1) বিন্দুগামী বলিয়া, $y_1y_3 = 2a(x_1 + x_3)$ ... (3)

(3) হইতে সুস্পষ্ট যে, (x_3, y_3) বিন্দুটি

$yy_1 = 2a(x + x_1)$ সরলরেখার উপর অবস্থিত। ... (4)

(2) এবং (4) হইতে দেখা যাইতেছে (x_2, y_2) এবং (x_3, y_3) স্পর্শবিন্দুদ্বয়ের উভয়ই $yy_1 = 2a(x + x_1)$ সরলরেখার উপর অবস্থিত ; অতএব,

$$\mathbf{yy_1 = 2a(x + x_1)}$$

দ্বারা সূচিত সরলরেখাটি (x_2, y_2) এবং (x_3, y_3) স্পর্শবিন্দুদ্বয়গামী বলিয়া উহা (x_1, y_1) বিন্দু হইতে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয়ের স্পর্শবিন্দুগামী জ্যা-এর সমীকরণ।

2·15. অধিবৃত্তের একদল সমান্তরাল জ্যা-এর মধ্যবিন্দুসমূহের সঞ্চারপথ ঐ অধিবৃত্তের অক্ষের সমান্তরাল একটি সরলরেখা।

[*The locus of the middle points of a system of parallel chords of a parabola is a straight line parallel to the axis.*]

মনে কর, অধিবৃত্তটির সমীকরণ $y^2 = 4ax$. ... ... (1)

এখন, জ্যা-গুলি সমান্তরাল বলিয়া x-অক্ষের সহিত উহাদের নতি একই ; সেইজন্য উহাদের প্রবণতা m ও সকল জ্যা-এর ক্ষেত্রে সমান। অতএব, সমান্তরাল জ্যা-গুলির যে-কোন একটির সমীকরণ ধরা যায় $y = mx + c$. (2)
দলের সকল জ্যা-এর ক্ষেত্রে m একই, কিন্তু c বিভিন্ন।

জ্যা-টি অধিবৃত্তটিকে (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয়ে ছেদ করিলে (2) হইতে x এর মান (1) বসাইয়া, উক্ত ছেদবিন্দুদ্বয়ের কোটি-নির্ণায়ক

$$y^2 = 4a\left(\frac{y-c}{m}\right), \quad \text{বা,} \quad my^2 - 4ay + 4ac = 0 \qquad \cdots \quad (3)$$

দ্বিঘাত সমীকরণটি পাওয়া যায়।

এখন, (h, k) জ্যা-টির মধ্যবিন্দু হইলে, $y_1 + y_2 = 2k$. ... (4)

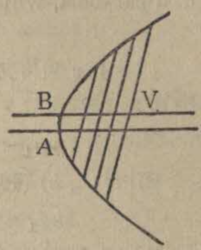
$\therefore$ (3) এবং (4) হইতে, $2k = y_1 + y_2 = \dfrac{4a}{m}$, বা, $k = \dfrac{2a}{m}$.

স্পষ্টই, (h, k) বিন্দুটি $y = \dfrac{2a}{m}$ রেখার উপর অবস্থিত ; অতএব, (h, k) বিন্দুর সঞ্চারপথ, অর্থাৎ সমান্তরাল জ্যা-গুলির মধ্যবিন্দুসমূহের সঞ্চারপথের সমীকরণ

$$\mathbf{y = \frac{2a}{m}} ;$$

ইহা (i) সরল সমীকরণ বলিয়া সরলরেখা,

এবং (ii) স্পষ্টই, $y=0$ বা x-অক্ষ অর্থাৎ অধিবৃত্তের অক্ষের সমান্তরাল।



2·16. ব্যাস।

কোন কনিকের একদল সমান্তরাল জ্যা-এর মধ্যবিন্দুসমূহের সঞ্চারপথকে ঐ কনিকের **ব্যাস** (Diameter) বলে।

ব্যাস যে বিন্দুতে অধিবৃত্তকে ছেদ করে, তাহাকে ঐ ব্যাসের **শীর্ষবিন্দু** (Vertex) বলে।

উপরিস্থিত চিত্রে, BV অধিবৃত্তটির ব্যাস এবং B এই ব্যাসের শীর্ষবিন্দু।

2·17. নির্দ্দিষ্ট বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত জ্যা-এর সমীকরণ।

[*Equation of the chord which is bisected at a given point.*]

অধিবৃত্তটির সমীকরণ $y^2=4ax$ এবং নির্দ্দিষ্ট বিন্দুটিকে (x_1, y_1) ধরা যাক।

ঐ অধিবৃত্তের যে জ্যা-এর মধ্যবিন্দু (x_1, y_1) তাহার সমীকরণ নির্ণয় করিতে হইবে। মনে কর, এই জ্যা-এর সমীকরণ

$$y-y_1=m(x-x_1) \qquad \cdots \qquad \cdots \quad (1)$$

এখন, এই জ্যা এবং ইহার সমান্তরাল জ্যা-সমূহের সমদ্বিখণ্ডনকারী, অর্থাৎ উহাদের মধ্যবিন্দুগামী ব্যাসের সমীকরণ $y=\frac{2a}{m}$.

(x_1, y_1) মধ্যবিন্দুটি এই ব্যাসের উপরই অবস্থিত বলিয়া, $y_1=\frac{2a}{m}$,

বা, $m=\frac{2a}{y_1}$.

$\therefore$ m এর এই মান (1)-এ বসাইয়া, (x_1, y_1) বিন্দুতে যে জ্যা সমদ্বিখণ্ডিত হয় তাহার সমীকরণ,

$$y-y_1=\frac{2a}{y_1}(x-x_1), \quad \text{বা, } \mathbf{y_1(y-y_1)=2a\,(x-x_1)},$$

$$\text{বা, } yy_1-y_1^2=2ax-2ax_1, \quad \text{বা, } \mathbf{yy_1-2ax=y_1^2-2ax_1}.$$

উদা. 1. Find the locus of the middle points of the chords of a parabola, which pass through a given point (h, k).

[C. U. B. A. & B. Sc., 1924]

$y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের কোন জ্যা-এর মধ্যবিন্দু (x_1, y_1) হইলে, এই জ্যা-এর সমীকরণ হইবে,

$$yy_1 - 2ax = y_1^2 - 2ax_1.$$

জ্যা-টি (h, k) বিন্দুগামী হইলে,

$$ky_1 - 2ah = y_1^2 - 2ax_1.$$

অতএব, মধ্যবিন্দু (x_1, y_1) এর সঞ্চারপথ

$$ky - 2ah = y^2 - 2ax, \text{ বা, } y^2 - ky = 2a(x-h);$$

ইহা একটি অধিবৃত্ত।

উদা. 2. Prove that the tangent at the vertex of any diameter of a parabola is parallel to the system of parallel chords bisected by the diameter.

অধিবৃত্তের ব্যাস উহার অক্ষের সমান্তরাল বলিয়া অধিবৃত্তের সমীকরণ $y^2 = 4ax$ হইলে, উহার যে-কোন ব্যাসের সমীকরণ $y = \frac{2a}{m}$ ধরা যায়।

এই ব্যাস $y = mx$ এর সমান্তরাল জ্যা-দলকে সমদ্বিখণ্ডিত করে। ... (1)

$y^2 = 4ax$ এবং $y = \frac{2a}{m}$ কে সহ-সমীকরণরূপে সমাধান করিলে দেখা যায়,

$$y = \frac{2a}{m} \text{ এবং } x = \frac{y^2}{4a} = \frac{4a^2}{m^2 . 4a} = \frac{a}{m^2}.$$

অতএব, ব্যাস এবং অধিবৃত্তের ছেদবিন্দু, অর্থাৎ, ব্যাসের শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{a}{m^2}, \frac{2a}{m}\right)$.

এই বিন্দুতে অধিবৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ

$$y \cdot \frac{2a}{m} = 2a\left(x + \frac{a}{m^2}\right),$$

বা, $$y = mx + \frac{a}{m}. \qquad \cdots \qquad \cdots (2)$$

(1) এবং (2) হইতে দেখা যায়, উভয় ক্ষেত্রেই প্রবণতা m ; অতএব, যে-কোন ব্যাসের শীর্ষবিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক, ঐ ব্যাস দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত জ্যা-সমূহের সমান্তরাল।

2·18(a). $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের উপর অবস্থিত যে-কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক একটিমাত্র চলরাশি দ্বারা প্রমাণ করা যায়। [Co-ordinates of any point on the parabola $y^2=4ax$ can be expressed in terms of a single parameter.]

$y^2=4ax$ সমীকরণটি $x=at^2$ এবং $y=2at$ দ্বারা সিদ্ধ হয়। অতএব, একমাত্র চলরাশি t দ্বারা প্রকাশিত $(at^2, 2at)$ কে $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের উপর অবস্থিত যে-কোন বিন্দুর স্থানাঙ্করূপে গণ্য করা যায়।

$(at^2, 2at)$ বিন্দুটিকে অনেক সময়ে t বিন্দু বলিয়াও অভিহিত করা হয়।

2·18(b). t বিন্দুতে অর্থাৎ $(at^2, 2at)$ বিন্দুতে $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ। [Equations of the tangent and the normal at the point 't' *i.e.*, $(at^2, 2at)$ of the parabola $y^2=4ax$].

(x_1, y_1) বিন্দুতে অধিবৃত্তের স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ যথাক্রমে

$$yy_1=2a(x+x_1) \text{ এবং } y-y_1=-\frac{y_1}{2a}(x-x_1);$$

$\therefore$ $x_1=at^2$, $y_1=2at$ বসাইয়া নির্ণেয় সমীকরণদ্বয় হইবে

$$2aty=2a(x+at^2) \text{ অর্থাৎ } ty=x+at^2$$

এবং $y-2at=-\dfrac{2at}{2a}(x-at^2)=-tx+at^3$,

অর্থাৎ $y+tx=2at+at^3$.

2·18(c). $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের t_1 এবং t_2 বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক জ্যা নাভিগামী হইলে, $t_1t_2=-1$ হইবে। [If the chord joining the two points t_1 and t_2 on the parabola $y^2=4ax$ passes through the focus, then $t_1t_2=-1$.]

t_1 এবং t_2 অর্থাৎ $(at_1^2, 2at_1)$, $(at_2^2, 2at_2)$ বিন্দুদ্বয়ের সংযোজক জ্যা-এর সমীকরণ

$$\frac{y-2at_1}{x-at_1^2}=\frac{2at_1-2at_2}{at_1^2-at_2^2}=\frac{2}{t_1+t_2}.$$

এই সরলরেখা নাভি $(a, 0)$ বিন্দুগামী হইলে

$$\frac{-2at_1}{a-at_1^2}=\frac{2}{t_1+t_2},$$

বা, $-(t_1+t_2)t_1=1-t_1^2$, বা, $t_1t_2=-1$.

2·18(d). নির্দ্দিষ্ট বিন্দু হইতে $y^2=4ax$ অধিবৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শক এবং অভিলম্বসমূহের সংখ্যা।

[*Number of tangents and normals that can be drawn from a given point to the parabola* $y^2=4ax$.]

$y^2=4ax$ অধিবৃত্তের যে-কোন t বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$$ty=x+at^2. \qquad \cdots \quad (1)$$

এই স্পর্শক কোন নির্দ্দিষ্ট বিন্দু (x_1, y_1)-গামী হইলে,

$$ty_1=x_1+at^2, \text{ বা}, \ at^2-ty_1+x_1=0. \qquad \cdots \quad (2)$$

সমীকরণটি t এর দ্বিঘাত সমীকরণ বলিয়া, ইহাকে সমাধান করিলে t এর দুইটি মান পাওয়া যায় ; অতএব, (x_1, y_1) বিন্দু হইতে অধিবৃত্তে দুইটি স্পর্শক টানা যায়। (2) হইতে প্রাপ্ত t এর দুইটি মান (1)-এ বসাইলে এই স্পর্শক দুইটির সমীকরণ পাওয়া যাইবে।

(2) হইতে দেখা যায়, t এর মান দুইটি এবং সেইজন্য স্পর্শক দুইটিও যথাক্রমে (i) বাস্তব এবং ভিন্ন, (ii) বাস্তব এবং অভিন্ন, অথবা, (iii) অবাস্তব হয়, যদি $y_1{}^2 \gtreqless 4ax_1$ হয়, অর্থাৎ, যদি (x_1, y_1) বিন্দুটি অধিবৃত্তের (i) বাহিরে, (ii) উপর, অথবা, (iii) মধ্যে অবস্থিত হয়।

আবার, অভিলম্বের ক্ষেত্রে দেখা যায়, $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের t বিন্দুতে যে-কোন অভিলম্বের সমীকরণ $y+tx=2at+at^3$. অভিলম্বটি (x_1, y_1) বিন্দুগামী হইলে,

$$y_1+tx_1=2at+at^3.$$

ইহা t এর ত্রিঘাত সমীকরণ বলিয়া, ইহাকে সমাধান করিলে t এর তিনটি মান পাওয়া যায়। এই মান তিনটি (i) সবগুলিই বাস্তব, অথবা, (ii) দুইটি অবাস্তব ও একটি বাস্তব হইতে পারে। অতএব, কোন নির্দ্দিষ্ট বিন্দু হইতে অধিবৃত্তে তিনটি অথবা একটি অভিলম্ব টানা যায়।

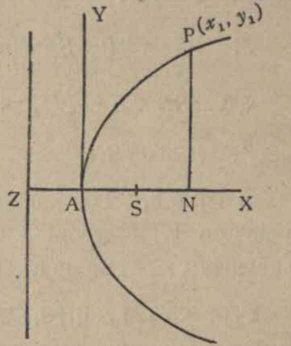
2·19. অধিবৃত্ত-সম্বন্ধীয় কয়েকটি প্রয়োজনীয় উপপাদ্য।

উপপাদ্য 1. The square on the ordinate of any point on a parabola is equal to the rectangle contained by the latus rectum and the abscissa of the point.

শীর্ষবিন্দু A কে মূলবিন্দু, অক্ষকে x-অক্ষ এবং শীর্ষবিন্দু হইতে নাভি S এর দূরত্বকে a ধরিলে, অধিবৃত্তের সমীকরণ হয় $y^2 = 4ax$.

মনে কর, অধিবৃত্তের উপর অবস্থিত যে-কোন বিন্দু P. অক্ষের উপর PN লম্ব টানা হইল। অধিবৃত্তে P বিন্দুর ভুজ $= AN$, উহার কোটি $= PN$ এবং অধিবৃত্তের নাভিলম্ব $= 4AS$.

প্রমাণ করিতে হইবে যে, $PN^2 = 4AS.AN$.

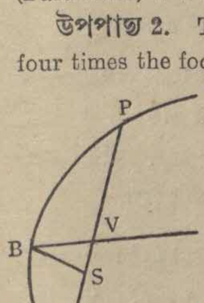


মনে কর, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x_1, y_1); তাহা হইলে P বিন্দুর ভুজ $AN = x_1$, উহার কোটি $PN = y_1$ এবং নাভিলম্ব $4AS = 4a$. এখন, (x_1, y_1) অধিবৃত্তের উপর অবস্থিত একটি বিন্দু বলিয়া, $y_1^2 = 4ax_1$;

$$\therefore \quad PN^2 = 4AS.AN.$$

সংজ্ঞা: অধিবৃত্তের কোন ব্যাস যে সকল সমান্তরাল জ্যা-কে সমদ্বিখণ্ডিত করে, সেই সকল জ্যা-এর নাভিগামী জ্যা-টিকে ঐ ব্যাসের **প্যারামিটার** (Parameter) বলে।

উপপাদ্য 2. The parameter of any diameter of a parabola is four times the focal distance of the vertex of the diameter.



PSp নাভিগামী জ্যা-টি BV ব্যাস দ্বারা সমদ্বিখণ্ডিত হইয়াছে; অতএব, BV ব্যাসের প্যারামিটার PSp.

প্রমাণ করিতে হইবে $PSp = 4SB$.

এখন, P এবং p বিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(at_1^2, 2at_1)$ এবং $(at_2^2, 2at_2)$ হইলে, PSp নাভিগামী বলিয়া, $t_1 t_2 = -1$.

PSp জ্যা-এর প্রবণতা (gradient)

$$= \frac{2at_1 - 2at_2}{at_1^2 - at_2^2} = \frac{2}{t_1 + t_2} \quad (\because t_1 \neq t_2)$$

$\therefore$ BV ব্যাসের সমীকরণ $y = \frac{2a}{m} = a(t_1 + t_2)$.

$\therefore$ B বিন্দুর কোটি $a(t_1+t_2)$, এবং ভুজ, $y^2=4ax$ এ y এর এই মান বসাইয়া, $\dfrac{a^2(t_1+t_2)^2}{4a}=\dfrac{a}{4}(t_1{}^2+t_2{}^2+2t_1t_2)=\dfrac{a}{4}(t_1{}^2+t_2{}^2-2)$

$(\because\ t_1t_2=-1)$.

তাহা হইলে দেখা গেল, P বিন্দুর ভুজ $at_1{}^2$, p বিন্দুর ভুজ $at_2{}^2$ এবং B বিন্দুর ভুজ $\dfrac{a}{4}(t_1{}^2+t_2{}^2-2)$.

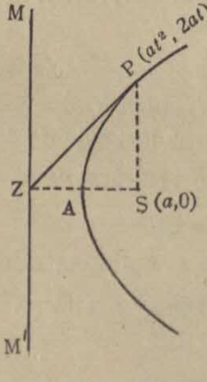
$\therefore\ PSp=SP+Sp=(a+at_1{}^2)+(a+at_2{}^2)=a(t_1{}^2+t_2{}^2+2)$;

এবং $SB=a+\dfrac{a}{4}(t_1{}^2+t_2{}^2-2)=\dfrac{a}{4}(t_1{}^2+t_2{}^2+2)$.

$\therefore\ PSp=4SB$.

উপপাদ্য 3. The portion of the tangent to a parabola at any point on it, intercepted between that point and the directrix, subtends a right angle at the focus, and *conversely*.

কোন অধিবৃত্তে S নাভি, MM' নিয়ামক, P ঐ অধিবৃত্তের উপর অবস্থিত যে-কোন বিন্দু এবং P বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক PZ নিয়ামককে Z বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে।



প্রমাণ করিতে হইবে $\angle PSZ=1$ সমকোণ।

শীর্ষবিন্দুকে মূলবিন্দু, অধিবৃত্তের অক্ষকে x-অক্ষ এবং শীর্ষ হইতে নাভির দূরত্ব $AS=a$ ধরিলে, অধিবৃত্তটির সমীকরণ হয় $y^2=4ax$. মনে কর, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(at^2, 2at)$, তাহা হইলে,

স্পর্শক PZ এর সমীকরণ $ty=x+at^2$; $\cdots$ (1)

নিয়ামক MM' এর সমীকরণ $x=-a$, $\cdots$ (2)

(1) এবং (2) কে সহ-সমীকরণরূপে সমাধান করিলে z এর স্থানাঙ্ক পাওয়া যায় $\left\{-a, \dfrac{a(t^2-1)}{t}\right\}$. এখন, S বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(a, 0)$;

$\therefore$ SP রেখার প্রবণতা $(m_1)=\dfrac{2at-0}{at^2-a}=\dfrac{2t}{t^2-1}$;

এবং SZ রেখার প্রবণতা $(m_2) = \dfrac{\dfrac{a(t^2-1)}{t} - 0}{-a-a} = -\dfrac{t^2-1}{2t}.$

এখন, $$m_1 \times m_2 = \frac{2t}{t^2-1} \times \left(-\frac{t^2-1}{2t}\right) = -1.$$

$\therefore$ $SP \perp SZ$; অর্থাৎ, $\angle PSZ = 1$ সমকোণ।

Conversely, if the portion of a straight line, intercepted between a point on a parabola and the directrix of the parabola, subtends a right angle at the focus, the straight line will be a tangent to the parabola at the point.

অধিবৃত্তে, S নাভি, MM' নিয়ামক, P ঐ অধিবৃত্তের উপর অবস্থিত যে-কোন বিন্দু। এখন, শীর্ষবিন্দুকে মূলবিন্দু, অক্ষকে x-অক্ষ এবং শীর্ষবিন্দু হইতে নাভি S এর দূরত্বকে a ধরিলে, অধিবৃত্তটির সমীকরণ হয় $y^2 = 4ax$. এস্থলে, S এর স্থানাঙ্ক $(a, 0)$. মনে কর, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(at^2, 2at)$. P হইতে অঙ্কিত যে-কোন সরলরেখা PZ নিয়ামককে Z বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে ; Z বিন্দুর ভুজ অবশ্যই $-a$ হইবে ; মনে কর, উহার কোটি y_1 ; তাহা হইলে,

S বিন্দুর স্থানাঙ্ক হইল $(a, 0)$, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক হইল $(at^2, 2at)$ এবং Z বিন্দুর স্থানাঙ্ক হইল $(-a, y_1)$.

$\therefore$ SP এর প্রবণতা $\dfrac{2at}{at^2-a}$, অর্থাৎ $\dfrac{2t}{t^2-1}$,

এবং SZ এর প্রবণতা $\dfrac{y_1}{-a-a}$, অর্থাৎ $-\dfrac{y_1}{2a}$.

এখন, $\angle PSZ = 1$ সমকোণ, অর্থাৎ $SP \perp SZ$ বলিয়া,

$$\frac{2t}{t^2-1} \times \left(-\frac{y_1}{2a}\right) = -1 ; \quad \therefore y_1 = \frac{a(t^2-1)}{t}.$$

$\therefore$ Z বিন্দুর স্থানাঙ্ক হইল $\left\{-a, \dfrac{a(t^2-1)}{t}\right\}$.

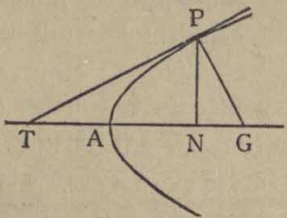
$\therefore$ PZ সরলরেখার সমীকরণ $\dfrac{y-2at}{2at - \dfrac{a(t^2-1)}{t}} = \dfrac{x-at^2}{at^2+a}$,

বা, $\dfrac{y-2at}{\dfrac{2at^2-at^2+a}{t}} = \dfrac{x-at^2}{at^2+a}$, বা, $\dfrac{t(y-2at)}{at^2+a} = \dfrac{x-at^2}{at^2+a}$,

বা, $ty - 2at^2 = x - at^2$, বা, $ty = x + at^2$;

ইহা $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের $P(at^2, 2at)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ বলিয়া PZ অধিবৃত্তের P বিন্দুতে স্পর্শক।

সংজ্ঞা: অধিবৃত্তের উপর অবস্থিত কোন বিন্দুতে অঙ্কিত ঐ অধিবৃত্তের স্পর্শক এবং কোটি দ্বারা ছিন্ন অক্ষের অংশকে ঐ বিন্দুর **উপ-স্পর্শক** (Subtangent) এবং ঐ বিন্দুতে অঙ্কিত অভিলম্ব ও কোটি দ্বারা ছিন্ন অক্ষের অংশকে ঐ বিন্দুর **উপ-অভিলম্ব** (Subnormal) বলে।



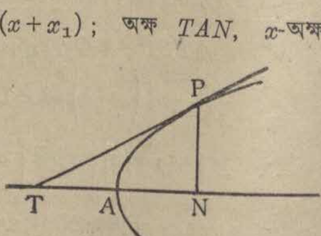
পার্শ্বস্থ চিত্রে, TN ও NG যথাক্রমে P বিন্দুর উপ-স্পর্শক ও উপ-অভিলম্ব।

উপপাদ্য 4. The subtangent at any point of a parabola is bisected at the vertex.

কোন অধিবৃত্তের শীর্ষবিন্দু A এবং অক্ষ TAN. এই অধিবৃত্তের উপর অবস্থিত যে-কোন বিন্দু P তে অঙ্কিত স্পর্শক PT এবং কোটি PN অক্ষ হইতে TN অংশ ছিন্ন করিয়াছে; TN, P বিন্দুর উপ-স্পর্শক। প্রমাণ করিতে হইবে, TN, A বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হইয়াছে, অর্থাৎ $TA=AN$.

A বিন্দুকে মূলবিন্দু, অক্ষকে x-অক্ষ এবং নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $4a$ ধরিলে, অধিবৃত্তটির সমীকরণ হইবে $y^2=4ax$. মনে কর, P বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x_1, y_1).

স্পর্শক PT এর সমীকরণ $yy_1=2a(x+x_1)$; অক্ষ TAN, x-অক্ষ বলিয়া উহার সমীকরণ $y=0$. এই দুই সমীকরণকে সহ-সমীকরণরূপে সমাধান করিলে T এর ভুজ পাওয়া যায় $-x_1$; অতএব, AT এর দৈর্ঘ্য x_1; আর P বিন্দু (x_1, y_1) বলিয়া AN এর দৈর্ঘ্যও x_1.



$\therefore$ **AT = AN.**

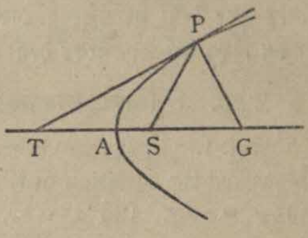
অনুসিদ্ধান্ত। **SP = ST.**

$$SP=a+x_1\text{; আবার, } ST=a+AT=a+x_1.$$

$$\therefore\ SP=ST.$$

উপপাদ্য 5. The normal to a parabola at any point on it makes equal angles with the focal distance of the point and the axis.

শীর্ষবিন্দু A কে মূলবিন্দু, অক্ষকে x-অক্ষ এবং নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $4a$ ধরিলে অধিবৃত্তের সমীকরণ হয় $y^2 = 4ax$.



এই অধিবৃত্তের উপর অবস্থিত যে-কোন বিন্দু P এর স্থানাঙ্ক, মনে কর, (x_1, y_1). PG অভিলম্ব অক্ষকে, অর্থাৎ x-অক্ষকে G বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে, $\angle SPG = \angle SGP$, অর্থাৎ, $SP = SG$.

PG এর সমীকরণ $y - y_1 = \frac{y_1}{-2a}(x - x_1)$, এবং অক্ষের সমীকরণ $y = 0$.

এই দুই সমীকরণকে সহ-সমীকরণরূপে সমাধান করিলে G এর ভুজ পাওয়া যায় $2a + x_1$.

$\therefore \quad AG = 2a + x_1\,; \quad \therefore\ SG = AG - AS = 2a + x_1 - a = a + x_1$.

আবার, P বিন্দুর ভুজ x_1 বলিয়া, $SP = a + x_1$.

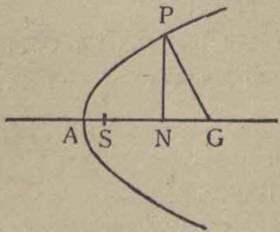
$\therefore \qquad \mathbf{SP = SG.}$

অনুসিদ্ধান্ত। উপপাদ্য 4 এর অনুসিদ্ধান্ত হইতে,

$$\mathbf{ST = SP = SG.}$$

উপপাদ্য 6. The subnormal at any point on a parabola is equal to the semi-latus rectum.

অধিবৃত্তের উপর অবস্থিত যে-কোন বিন্দু P তে অঙ্কিত অভিলম্ব PG এবং



কোটি, PN অক্ষকে যথাক্রমে G ও N বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। প্রমাণ করিতে হইবে, P বিন্দুর উপ-অভিলম্ব NG = নাভিলম্বের দৈর্ঘ্যের অর্দ্ধেক।

শীর্ষবিন্দু A কে মূলবিন্দু, অক্ষকে x-অক্ষ, এবং নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $4a$ ধরিলে, অধিবৃত্তটির সমীকরণ হয় $y^2 = 4ax$.

$NG = AG - AN = (2a + x_1) - x_1$ (উপপাদ্য 4 এর প্রমাণ দ্রষ্টব্য)

$= 2a =$ নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $4a$ র অর্দ্ধেক।

অনুসিদ্ধান্ত। কোন অধিবৃত্তে নাভিলম্ব ধ্রুবক দৈর্ঘ্য-বিশিষ্ট এবং উপ-অভিলম্বের দৈর্ঘ্য নাভিলম্বের দৈর্ঘ্যের অর্দ্ধেক বলিয়া অধিবৃত্তের উপর অবস্থিত সকল বিন্দুর উপ-অভিলম্বের দৈর্ঘ্য একই হইবে।

2·20. বিবিধ উদাহরণ।

উদা. 1. Find the latus rectum, the co-ordinates of the focus and the equation of the directrix of the parabola (i) $y^2 = 16x$, (ii) $y^2 = -6x$, (iii) $x^2 = 4y$, (iv) $3x^2 = -8y$.

(i) নাভিলম্ব = সমীকরণের একঘাত চলরাশির সহগের সাংখ্যমান = **16.**

এখন, $\frac{1}{4}$ নাভিলম্ব = 4, শীর্ষবিন্দু মূলবিন্দু, $y = 0$, অর্থাৎ x-অক্ষ অধিবৃত্তের অক্ষ এবং অধিবৃত্তটির অবতলতা বা বক্রতা (concavity) x-অক্ষের ধনাত্মক দিকমুখী ;

∴ নাভির স্থানাঙ্ক **(4, 0)** এবং নিয়ামকের সমীকরণ $x = -4$ বা $\mathbf{x + 4 = 0}$.

(ii) নাভিলম্ব = **6.**

এখন, $\frac{1}{4}$ নাভিলম্ব = $\frac{3}{2}$, শীর্ষবিন্দু মূলবিন্দু, $y = 0$, অর্থাৎ x-অক্ষ অধিবৃত্তের অক্ষ এবং অধিবৃত্তটির অবতলতা x-অক্ষের ঋণাত্মক-দিক্‌মুখী ;

∴ নাভি শীর্ষবিন্দু A র বামদিকে অবস্থিত হইবে এবং ইহার স্থানাঙ্ক হইবে $(-\frac{3}{2}, 0)$, এবং নিয়ামকের সমীকরণ হইবে $\mathbf{x = \frac{3}{2}}$.

(iii) নাভিলম্ব = সমীকরণের একঘাত চলরাশির সহগের সাংখ্যমান = **4.**

এখন, $\frac{1}{4}$ নাভিলম্ব = 1, শীর্ষবিন্দু মূলবিন্দু, $x = 0$, অর্থাৎ, y-অক্ষ অধিবৃত্তের অক্ষ এবং অধিবৃত্তটির অবতলতা y-অক্ষের ধনাত্মক-দিক্‌মুখী ;

∴ নাভি y-অক্ষের উপর শীর্ষবিন্দু A র উপরের দিকে অবস্থিত হইবে এবং ইহার স্থানাঙ্ক **(0, 1)**, এবং নিয়ামকের সমীকরণ হইবে $y = -1$ বা, $\mathbf{y + 1 = 0}$.

(iv) এস্থলে, অধিবৃত্তটির সমীকরণ $x^2 = -\frac{8}{3}y$.

∴ নাভিলম্ব = একঘাত চলরাশির সহগের সাংখ্যমান $\frac{8}{3}$.

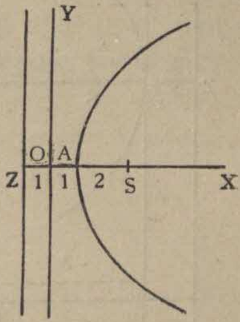
এখন, $\frac{1}{4}$ নাভিলম্ব = $\frac{2}{3}$, শীর্ষবিন্দু মূলবিন্দু, $x = 0$, অর্থাৎ y-অক্ষ অধিবৃত্তের অক্ষ এবং অধিবৃত্তটির অবতলতা y-অক্ষের ঋণাত্মক-দিক্‌মুখী ;

$\therefore$ নাভি y-অক্ষের উপর শীর্ষবিন্দু A র নীচের দিকে অবস্থিত হইবে এবং ইহার স্থানাঙ্ক হইবে **$(0, -\frac{2}{3})$** এবং নিয়ামকের সমীকরণ হইবে **$y=\frac{2}{3}$.**

উদা. 2. Find the latus rectum, the co-ordinates of the vertex and the focus and the equation of the directrix of the parabola $y^2=8(x-1)$.

নাভিলম্ব = সমীকরণের একঘাত চলরাশির সহগের সাংখ্যমান = **8.**

$AS=\frac{1}{4}$ নাভিলম্ব = শীর্ষবিন্দু হইতে নিয়ামকের দূরত্ব AZ.



$y=0$, অর্থাৎ x-অক্ষ অধিবৃত্তের অক্ষ। শীর্ষবিন্দু A তে অধিবৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ $x-1=0$; এই স্পর্শক এবং অক্ষ $y=0$ এর ছেদবিন্দু শীর্ষবিন্দু A;

$\therefore$ শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক **(1, 0).**

শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক (1, 0) বলিয়া, $OA=1$, এখন, সমীকরণে একপক্ষে দ্বিঘাত চলরাশি এবং অন্যপক্ষে একঘাত চলরাশি রাখিলে (এস্থলে, এইরূপই দেওয়া আছে) দেখা যায়, একঘাত চলরাশির সহগ ধনাত্মক চিহ্নযুক্ত; সুতরাং অধিবৃত্তটির অবতলতা x-অক্ষের ধনাত্মক-দিক্‌মুখী;

$\therefore$ নাভি শীর্ষবিন্দু A র ডানদিকে অবস্থিত হইবে, এবং ইহার স্থানাঙ্ক হইবে $(OS, 0)$, অর্থাৎ $(OA+AS, 0)$, অর্থাৎ **(3, 0).**

আবার, $OZ=AZ-AO=2-1=1$;

$\therefore$ অধিবৃত্ত x-অক্ষের ধনাত্মক-দিক্‌মুখী বলিয়া নিয়ামকের সমীকরণ হইবে $x=-1$ বা **$x+1=0$.**

উদা. 3. Find the latus rectum, the co-ordinates of the vertex and the focus and the equation of the directrix of the parabola $y^2-4x-8y+4=0$.

এস্থলে, অধিবৃত্তের সমীকরণ $y^2-4x-8y+4=0$,

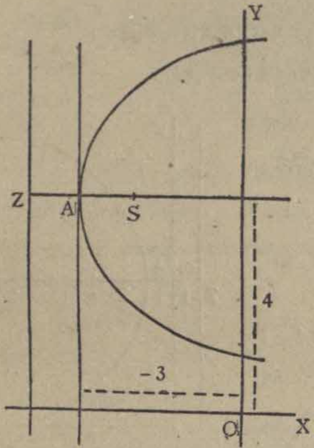
বা, $y^2-8y=4x-4$ বা $y^2-8y+16=4x-4+16=4x+12$,

বা, $(y-4)^2=4(x+3)$. $\quad\cdots\quad\cdots\quad(1)$

নাভিলম্ব = সমীকরণের একঘাত চলরাশির সহগের সাংখ্যমান
$= 4.$

$AS = \frac{1}{4}$ নাভিলম্ব $= 1 =$ শীর্ষবিন্দু হইতে নিয়ামকের দূরত্ব AZ.

$y - 4 = 0$ বা $y = 4$ অধিবৃত্তের অক্ষ; অতএব, অধিবৃত্তের অক্ষ x-অক্ষের সমান্তরাল একটি সরলরেখা। শীর্ষবিন্দু A তে অধিবৃত্তের স্পর্শক $x + 3 = 0$; এই স্পর্শক এবং অধিবৃত্তের অক্ষ $y = 4$ এর ছেদবিন্দু শীর্ষবিন্দু A;



$\therefore$ শীর্ষবিন্দুর স্থানাঙ্ক **$(-3, 4)$.**

এখন, সমীকরণটিকে (1) এর আকারে লিখিলে দেখা যায়, একঘাত চলরাশির সহগ ধনাত্মক চিহ্নযুক্ত; সুতরাং অধিবৃত্তটির অবতলতা ইহার অক্ষ $y = 4$ সরলরেখার ধনাত্মক-দিক্‌মুখী;

$\therefore$ নাভি অধিবৃত্তের অক্ষ $y = 4$ সরলরেখার উপর শীর্ষবিন্দু A র ডানদিকে অবস্থিত হইবে, এবং সেইজন্য ইহার কোটি 4 হইবে এবং ভুজ হইবে $(-3 + AS)$, অর্থাৎ $-3 + 1$, অর্থাৎ -2; সুতরাং, নাভির স্থানাঙ্ক হইল **$(-2, 4)$.**

আবার, $AZ = 1$, এবং Z বিন্দু অধিবৃত্তের অক্ষ $y = 4$ সরলরেখার উপর A বিন্দুর যে পার্শ্বে S অবস্থিত তাহার বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত বলিয়া Z বিন্দুর স্থানাঙ্ক হইবে $(-4, 4)$. এখন, নিয়ামক অধিবৃত্তের অক্ষ $y = 4$ সরলরেখার লম্ব বলিয়া $y = 0$, অর্থাৎ, x-অক্ষেরও লম্ব; অতএব, নিয়ামক y-অক্ষ, অর্থাৎ $x = 0$ এর সমান্তরাল এবং $Z(-4, 4)$ বিন্দুগামী।

$\therefore$ নিয়ামকের সমীকরণ $x = -4$, বা, $\mathbf{x + 4 = 0}$.

উদা. 4. Find the equation of the parabola, referred to its axis and the tangent at the vertex as axes of co-ordinates, given that it passes through the point $(-3, -6)$ and that its concavity is turned towards the negative direction of the axis of x.

অবতলতা x-অক্ষের ঋণাত্মক-দিক্‌মুখী বলিয়া মনে কর, নির্ণেয় সমীকরণ $y^2=-4ax$. অধিবৃত্তটি $(-3, -6)$ বিন্দুগামী বলিয়া,

$$(-6)^2=-4a(-3) \text{ বা } a=3.$$

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ $\mathbf{y^2=-12x}$.

উদা. 5. Obtain the equation of the parabola whose focus is at the point $(3, -2)$ and whose directrix is the straight line $2x-y+3=0$. [C. U. 1958]

মনে কর, অধিবৃত্তটির উপর অবস্থিত যে-কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y). এখন, নাভি লইতে অধিবৃত্তের উপর অবস্থিত কোন বিন্দুর দূরত্ব, নিয়ামক হইতে ঐ বিন্দুর দূরত্বের সমান বলিয়া,

$$\sqrt{(x-3)^2+(y+2)^2}=\frac{2x-y+3}{\sqrt{2^2+1}}=\frac{2x-y+3}{\sqrt{5}},$$

বা, $$(x-3)^2+(y+2)^2=\frac{(2x-y+3)^2}{5},$$

বা, $5(x-3)^2+5(y+2)^2=(2x-y+3)^2$,

বা, $5x^2-30x+45+5y^2+20y+20$
$$=4x^2+y^2+9-4xy+12x-6y,$$

বা, $x^2+4y^2+4xy-42x+26y+56=0$,

বা, $\mathbf{(x+2y)^2=42x-26y-56}$; ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ।

উদা. 6. Find the co-ordinates of the points where the straight line $x-7y+12=0$ meets the parabola $y^2=x$.

সমীকরণ দুইটিকে সহ-সমীকরণরূপে সমাধান করিলে ছেদবিন্দুদ্বয়ের কোটি-নির্ণায়ক $y^2-7y+12=0$ দ্বিঘাত সমীকরণটি পাওয়া যায়। ইহার দুইটি বীজ 4 এবং 3 বলিয়া ছেদবিন্দুদ্বয়ের কোটি 4 এবং 3.

কোটি 4 হইলে, $y^2=x$ হইতে, ভুজ হইবে 16,

এবং কোটি 3 হইলে, $y^2=x$ হইতে, ভুজ হইবে 9.

$\therefore$ ছেদবিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক **(16, 4)** এবং **(9, 3)**.

উদা. 7. Prove that any straight line parallel to the axis of a parabola intersects the parabola at one point only.

মনে কর, অধিবৃত্তটির সমীকরণ $y^2 = 4ax$;

তাহা হইলে $y = 0$, অর্থাৎ x-অক্ষ অধিবৃত্তটির অক্ষ ; সুতরাং, অধিবৃত্তের অক্ষের সমান্তরাল সরলরেখার সমীকরণ $y = c$, মনে করা যাইতে পারে।

$y^2 = 4ax$ এবং $y = c$ কে সহ-সমীকরণরূপে সমাধান করিলে সরলরেখা এবং অধিবৃত্তের ছেদবিন্দুর ভুজ-নির্ণায়ক $c^2 = 4ax$ সমীকরণটি পাওয়া যায় ; ইহা হইতে x এর একটিমাত্র মান $\frac{c^2}{4a}$ পাওয়া যায় এবং ইহাই ছেদবিন্দুর ভুজ, আর $y = c$ হইতে দেখা যায়, ছেদবিন্দুর কোটি $= c$. অতএব, সরলরেখাটি অধিবৃত্তটিকে একটিমাত্র বিন্দুতে ছেদ করে ; এই বিন্দুর স্থানাঙ্ক $\left(\frac{c^2}{4a}, c\right)$.

উদা. 8. Prove that the straight line $4x - 2y + 3 = 0$ touches the parabola $y^2 = 12x$ and find the co-ordinates of the point of contact. [C. U. 1947]

অধিবৃত্তের সমীকরণ হইতে $x = \frac{y^2}{12}$ সরলরেখার সমীকরণে বসাইলে উহাদের ছেদবিন্দুর কোটি-নির্ণায়ক

$$4 \cdot \frac{y^2}{12} - 2y + 3 = 0 \text{ বা } y^2 - 6y + 9 = 0,$$

$$\text{বা} \qquad (y-3)^2 = 0 \qquad \cdots \qquad \cdots \qquad (1)$$

দ্বিঘাত সমীকরণটি পাওয়া যায়। এই দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয় অভিন্ন বলিয়া সরলরেখাটি অধিবৃত্তটিকে পরস্পর অভিন্ন দুইটি বিন্দুতে ছেদ করে। অতএব, সরলরেখাটি অধিবৃত্তটির স্পর্শক।

(1) হইতে স্পর্শকটির স্পর্শবিন্দুর কোটি $= 3$, এবং $x = \frac{y^2}{12}$ বলিয়া, ভুজ $= \frac{3^2}{12} = \frac{3}{4}$. অতএব, সরলরেখাটি অধিবৃত্তটির স্পর্শক এবং স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক $(\frac{3}{4}, 3)$.

উদা. 9. If the straight line $y = 5x + 1$ touches the parabola $y^2 = 4ax$, find the length of the latus rectum, the focus and the co-ordinates of the point of contact.

সরলরেখাটির অধিবৃত্তটির স্পর্শক হইবার শর্ত হইল

$$1 = \frac{a}{5}, \quad বা,\ a = 5 ;$$

$\therefore$ নাভিলম্ব $= 4a = 4.5 = \mathbf{20}.$

নাভির স্থানাঙ্ক $= (a, 0) = \mathbf{(5, 0)}.$

স্পর্শকটির স্পর্শবিন্দু হইবে $\left(\frac{a}{m^2}, \frac{2a}{m}\right)$, অর্থাৎ $\left(\frac{5}{5^2}, \frac{2.5}{5}\right)$, অর্থাৎ $\mathbf{(\frac{1}{5}, 2)}$.

উদা. 10. Find the equation of the tangent to the parabola $y^2 = 8x$, which is parallel to the straight line $2x - 3y + 6 = 0$.

$2x - 3y + 6 = 0$ সরলরেখার সমান্তরাল যে-কোন সরলরেখার সমীকরণ $2x - 3y + c = 0$, বা, $3y = 2x + c$, বা, $y = \frac{2}{3}x + \frac{c}{3}$.

এখন, $y^2 = 8x = 4.2x$ বলিয়া উক্ত সরলরেখাটির ঐ অধিবৃত্তের স্পর্শক হইবার শর্ত হইল

$$\frac{c}{3} = \frac{2}{\frac{2}{3}} = 3 ; \quad \therefore \quad c = 9.$$

$\therefore$ নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ হইল $\mathbf{2x - 3y + 9 = 0}$.

উদা. 11. Find the equations of the tangent and the normal to the parabola

(i) $y^2 = 9x$, at $(4, -6)$;

(ii) $y^2 = -16x$, at $(-1, -4)$;

(iii) $y^2 = 24x$, at the extremities of the latus rectum.

(i) (x_1, y_1) বিন্দুতে $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ $yy_1 = 2a(x + x_1)$, এবং অভিলম্বের সমীকরণ $y - y_1 = -\frac{y_1}{2a}(x - x_1)$.

এখন, $y^2 = 9x = 4.\frac{9}{4}x$; $\therefore$ এস্থলে, $a = \frac{9}{4}$.

$\therefore$ নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ $y.(-6) = 2.\frac{9}{4}(x + 4)$,

বা, $-12y = 9x + 36$, বা, $\mathbf{3x + 4y + 12 = 0}$;

এবং অভিলম্বের সমীকরণ $y + 6 = -\frac{-6}{2.\frac{9}{4}}(x - 4)$,

বা, $y + 6 = \frac{4}{3}(x - 4)$, বা, $\mathbf{4x - 3y = 34}$.

(ii) (x_1, y_1) বিন্দুতে $y^2 = -4ax$ অধিবৃত্তের স্পর্শকের সমীকরণ $yy_1 = -2a(x + x_1)$ এবং অভিলম্বের সমীকরণ $y - y_1 = \frac{y_1}{2a}(x - x_1)$.

$\therefore$ এক্ষেত্রে, $a = 4, x_1 = -1$ এবং $y_1 = -4$ বলিয়া,

নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ $y.(-4) = -2.4(x-1)$,

বা, $y = 2x - 2$, বা, $\mathbf{2x - y - 2 = 0}$;

এবং অভিলম্বের সমীকরণ $y - (-4) = \frac{-4}{2.4}(x+1)$,

বা, $2(y+4) = -(x+1)$,

বা, $\mathbf{x + 2y + 9 = 0}$.

(iii) এস্থলে, $a = \frac{24}{4} = 6$.

$\therefore$ নাভির স্থানাঙ্ক $(a, 0)$, অর্থাৎ, $(6, 0)$.

স্পষ্টই, নাভিলম্বের প্রান্তবিন্দু দুইটিরই ভুজ 6 ; এই ভুজের মান অধিবৃত্তের সমীকরণ $y^2 = 24x$ এ বসাইয়া প্রান্তবিন্দুদ্বয়ের কোটি-নির্ণায়ক $y^2 = 144$ সমীকরণটি পাওয়া যায়। $\therefore$ কোটি $y = 12, -12$. তাহা হইলে নাভিলম্বের প্রান্তবিন্দুদ্বয় হইল $(6, 12), (6, -12)$.

$(6, 12)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$12y = 12(x+6)$, বা, $\mathbf{x - y + 6 = 0}$;

এবং অভিলম্বের সমীকরণ

$y - 12 = -\frac{12}{12}(x - 6)$, বা, $\mathbf{x + y - 18 = 0}$.

$(6, -12)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ

$-12y = 12(x+6)$, বা, $\mathbf{x + y + 6 = 0}$;

এবং অভিলম্বের সমীকরণ

$y + 12 = -\frac{-12}{12}(x - 6)$, বা, $\mathbf{x - y - 18 = 0}$.

উদা. 12. Obtain the equation of the tangent to the parabola $y^2 = 16x$, which makes an angle $\frac{\pi}{4}$ with the x-axis.

m এর সকল মানের জন্যই $y = mx + \frac{a}{m}$ সরলরেখা $y^2 = 3ax$ অধিবৃত্তের স্পর্শক ; এস্থলে, $a = \frac{16}{4} = 4$ বলিয়া, $y = mx + \frac{4}{m}$ সরলরেখা $y^2 = 16x$ এর স্পর্শক।

এখন, $m=\tan\frac{\pi}{4}=1$.

$\therefore \quad y=mx+\frac{4}{m}$ এ $m=1$ বসাইয়া, নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ $\mathbf{y=x+4}$.

উদা. 13. Find the equations of the tangents to the parabola $y^2=20x$ from the point (1, 6),

$$y^2=20x=4.5x\,;\quad \text{অতএব, এস্থলে } a=5.$$

$\therefore \quad m$ এর সকল মানের জন্য $y=mx+\frac{5}{m}$ ··· (1)

সরলরেখা অধিবৃত্তটির স্পর্শক। এই স্পর্শক (1, 6) বিন্দুগামী বলিয়া,

$$6=m+\frac{5}{m},\ \text{বা, } m^2-6m+5=0\,;$$

$$\therefore \quad m=\frac{6\pm\sqrt{36-20}}{2}=\frac{6\pm4}{2}=5,\ 1.$$

$\therefore$ (1)-এ m এর এই দুইটি মান বসাইয়া (1, 6) বিন্দু হইতে $y^2=20x$ অধিবৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শক দুইটির সমীকরণ

$$y=5x+\tfrac{5}{5} \text{ বা } \mathbf{y=5x+1},$$

$$\text{এবং } y=x+\tfrac{5}{1} \text{ বা } \mathbf{y=x+5}.$$

উদা. 14. Find the equation of the chord of the parabola $y^2=8x$, which is bisected at the point (4, 5).

$$y^2=4.2x\,;\ \text{অতএব, এস্থলে } a=2.$$

এখন, $y^2=4ax$ অধিবৃত্তের যে জ্যা (x_1, y_1) বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয়, তাহার সমীকরণ $yy_1-2ax=y_1^2-2ax_1$.

$\therefore \quad y^2=4.2x$ অধিবৃত্তের যে জ্যা (4, 5) বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত হয়, তাহার সমীকরণ হইবে $y.5-2.2.x=5^2-2.2.4=9$,

$$\text{বা, } \mathbf{4x-5y+9=0}.$$

উদা. 15. Find the locus of the middle points of all chords of the parabola $y^2=4x$, which pass through the point $(-2, 3)$.

$y^2=4ax$ অধিবৃত্তের কোন জ্যা-এর মধ্যবিন্দু (x_1, y_1) হইলে তাহার সমীকরণ হইবে $yy_1-2ax=y_1^2-2ax_1$;

$\therefore \quad y^2=4x=4.1.x$ অধিবৃত্তের কোন জ্যা-এর মধ্যবিন্দু (x_1, y_1) হইলে এই জ্যা-এর সমীকরণ হইবে

$$yy_1-2x=y_1^2-2x_1.$$

জ্যা-টি $(-2, 3)$ বিন্দুগামী হইলে,

$$3y_1 + 4 = y_1^2 - 2x_1 ;$$

$\therefore$ মধ্যবিন্দু (x_1, y_1) এর সঞ্চারপথ

$$3y + 4 = y^2 - 2x, \text{ বা, } \mathbf{y^2 - 3y = 2(x+2)} ;$$

এই সমীকরণের দ্বিঘাত রাশি পূর্ণ বর্গ হওয়ায়, ইহা দ্বারা একটি অধিবৃত্ত সূচিত হইবে।

উদা. 16. Find the equation to the diameter of the parabola $5y^2 = 8x$, which bisects all chords parallel to the straight line $4x - 5y + 10 = 0$.

প্রদত্ত অধিবৃত্তের সমীকরণ $5y^2 = 8x$ বা $y^2 = \frac{8}{5}x = 4.\frac{2}{5}x$;

$\therefore$ এস্থলে, $a = \frac{2}{5}$.

প্রদত্ত সরলরেখার সমীকরণ $4x - 5y + 10 = 0$, বা, $5y = 4x + 10$,

বা, $y = \frac{4}{5}x + 2$; $\therefore$ এস্থলে, $m = \frac{4}{5}$;

$\therefore$ নির্ণেয় ব্যাসের সমীকরণ $y = \dfrac{2a}{m} = \dfrac{2.\frac{2}{5}}{\frac{4}{5}} = \mathbf{1}$ বা $\mathbf{y - 1 = 0.}$

উদা. 17. Show that the straight line $3x + 9y - 19 = 0$ is a normal to the parabola $y^2 = 12x$. Find the point where the straight line is normal.

অধিবৃত্তের সমীকরণ $y^2 = 12x = 4.3x$; অতএব, এস্থলে $a = 3$.

এখন, m এর সকল মানের জন্যই $y = mx - 2am - am^3$ সরলরেখাটি $y^2 = 4ax$ অধিবৃত্তে $(am^2, -2am)$ বিন্দুতে অভিলম্ব। অতএব, $a = 3$ বলিয়া প্রদত্ত সরলরেখার সমীকরণকে $y = mx - 6m - 3m^3$ এর আকারে লেখা সম্ভব হইলে সরলরেখাটি অধিবৃত্তটির অভিলম্ব হইবে।

এখন, প্রদত্ত সরলরেখার সমীকরণ $3x + 9y - 19 = 0$;

বা, $y = -\frac{3}{9}x + \frac{19}{9} = -\frac{1}{3}x + \frac{19}{9}$;

অতএব, এস্থলে $m = -\frac{1}{3}$, এবং

$$-6m - 3m^3 = -6.(-\tfrac{1}{3}) - 3.(-\tfrac{1}{3})^3$$
$$= 2 + \tfrac{1}{9} = \tfrac{19}{9} ;$$

$\therefore$ প্রদত্ত সরলরেখার সমীকরণ হইল $y = -\frac{1}{3}x - 6(-\frac{1}{3}) - 3(-\frac{1}{3})^3$;

$\therefore$ প্রদত্ত সরলরেখার সমীকরণটিকে $y=mx-2am-am^3$ এর আকারে লেখা সম্ভব হইয়াছে বলিয়া সরলরেখাটি

$$(am^2,\ -2am),\ \text{অর্থাৎ},\ \{3.(-\tfrac{1}{3})^2,\ -2.3.(-\tfrac{1}{3})\},$$

অর্থাৎ $(\frac{1}{3}, 2)$ বিন্দুতে অধিবৃত্তটির অভিলম্ব।

উদা. 18. The subtangent at any point of a parabola is bisected at the vertex. Verify this theorem in the case when the parabola is $y^2=12x$ and the tangent is $4x+2y+3=0$, being given that it touches the parabola at the point $(\frac{3}{4}, 3)$.

[C. U. 1950]

এক্ষেত্রে অধিবৃত্তটির শীর্ষবিন্দু A ই মূলবিন্দু $(0, 0)$ এবং অধিবৃত্তটির অক্ষ x-অক্ষ, অর্থাৎ, $y=0$. মনে কর, স্পর্শকটি T বিন্দুতে অধিবৃত্তটির অক্ষকে ছেদ করিয়াছে, এবং $(\frac{3}{4}, 3)$ বিন্দু হইতে অক্ষের উপর অঙ্কিত লম্ব N বিন্দুতে অক্ষকে ছেদ করিয়াছে। তাহা হইলে, TN প্রদত্ত বিন্দুটির উপ-স্পর্শক। দেখাইতে হইবে $AT=AN$.

স্পর্শকের সমীকরণ $4x+2y+3=0$ এবং অক্ষের সমীকরণ $y=0$ কে সহ-সমীকরণরূপে সমাধান করিলে দেখা যায়, উহাদের ছেদবিন্দু T এর ভুজ $-\frac{3}{4}$;

$\therefore$ AT এর দৈর্ঘ্য $=\frac{3}{4}$.

আবার, $AN=$ প্রদত্ত বিন্দুটির ভুজ $=\frac{3}{4}$.

$\therefore$ **AT = AN.**

উদা. 19. If l and l' are the lengths of the segments of any focal chord of the parabola $y^2=4ax$, prove that

$$\frac{1}{l}+\frac{1}{l'}=\frac{1}{a}.$$ [C. U. B. A. & B. Sc., 1951]

মনে কর, অধিবৃত্তটিতে PSp যে-কোন নাভিগামী জ্যা, এবং P ও p বিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(at_1{}^2, 2at_1)$ এবং $(at_2{}^2, 2at_2)$. PSp নাভিগামী বলিয়া, $t_1t_2=-1$.

এখন, $SP=a+at_1{}^2$, অর্থাৎ $l=a(1+t_1{}^2)$;

এবং $Sp=a+at_2{}^2$, অর্থাৎ $l'=a(1+t_2{}^2)$.

$$\therefore \frac{1}{l}+\frac{1}{l'}=\frac{1}{a(1+t_1^2)}+\frac{1}{a(1+t_2^2)}$$

$$=\frac{2+t_1^2+t_2^2}{a(1+t_1^2+t_2^2+t_1^2t_2^2)}=\frac{2+t_1^2+t_2^2}{a\{1+t_1^2+t_2^2+(-1)^2\}}$$

$$=\frac{2+t_1^2+t_2^2}{a(2+t_1^2+t_2^2)}=\frac{1}{a}.$$

প্রশ্নমালা 3

1. Find the latus rectum, the co-ordinates of the focus and the equation of the directrix of every one of the parabolas given by the following equations :

(i) $y^2=8x$; (ii) $y^2=-12x$; (iii) $x^2=20y$;
(iv) $x^2=-16y$; (v) $x^2=-10y$; (vi) $5y^2=7x$.

[C. U. 1936]

Find the position of the point (2, 4) with respect to every one of these parabolas.

2. Find the equation of the parabola whose vertex is the origin and

(i) whose axis is the axis of x, latus rectum is of length 2 and concavity is turned towards the positive direction of the axis of x ;

(ii) whose axis is the axis of y, latus rectum is of length $\frac{4}{5}$ and concavity is turned towards the negative direction of the axis of y.

3. Find the equation of the parabola having the origin as its vertex and the focus at the point :

(i) (4, 0) ; (ii) (−2, 0) ; (iii) $(0, \frac{3}{4})$; (iv) (0, −5).

Find the equation of the directrix in every case.

4. If the latus rectum of a parabola be of length 16, find its equation when its axis and the directrix are taken as the axes of x and y respectively and its concavity is turned towards

(i) the positive direction of the axis of x ;

(ii) the negaitve direction of the axis of x.

5. If the latus rectum of a parabola be of length 10, find its equation when its locus and the axis are taken as the origin and the axis of x respectively and its concavity is turned towards

(i) the positive direction of the axis of x ;

(ii) the negative direction of the axis of x.

Find the equation of the directrix in each case.

6. If the latus rectum of a parabola be of length 6, find its equation when its focus and the axis are taken as the origin and the axis of y respectively and its concavity is turned towards

(i) the position direction of the axis of y ;

(ii) the negative direction of the axis of y.

Find the equation of the directrix in each case.

7. A parabola opens out along the positive direction of the axis of y. Its focus is the point (0, 3) and the length of the latus rectum is 12. Find its equation. [C. U. 1950, Special]

8. The parabola $y^2 = 4px$ passes through the point $(3, -2)$, find its latus rectum and co-ordinates of its focus. [C. U. 1934]

9. Find the equation of the latus rectum of the parabola $y^2 = 20x$ and find the co-ordinates of its extremities.

10. Find the equation of the parabola, referred to its axis and the tangent at its vertex as the axes of x and y respectively,

(i) when it passes through the point (4, 8) and has its concavity turned towards the positive direction of the x-axis ;

(ii) when it passes through the point $(-\frac{9}{4}, 6)$ and has its concavity turned towards the negative direction of the x-axis.

Find also the co-ordinates of the focus in each case.

11. Find the equation of the parabola, referred to its axis and the tangent at the vertex as the axes of y and x respectively,

(i) when it passes through the point (12, 9) and has its concavity turned towards the positive direction of the y-axis ;

(ii) when it passes through the point $(5, -5)$ and has its concavity turned towards the negative direction of the y-axis.

Find also the co-ordinates of the focus in each case.

12. Find the latus rectum, the co-ordinates of the focus and the equation of the directrix of every one of the parabolas given by the following equations :

(i) $y^2 = 4(x-3)$; (ii) $y^2 + 8(x+1) = 0$;
(iii) $y^2 = 2x + 3$; (iv) $y^2 + 4x - 6 = 0$;
(v) $2x^2 - 2y + 3 = 0$; (vi) $4x^2 + 12y - 15 = 0$;
(vii) $y^2 - 4x - 4y + 16 = 0$; (viii) $y^2 + 8x + 6y + 25 = 0$.

13. Find the vertex, the focus and the directrix of the parabola $(y+3)^2 = 2(x+2)$. [U. P. 1946]

14. Find the vertex, the locus and the length of the latus rectum of the parabolas

(a) $y^2 = 4y - 4x$;
(b) $y = ax^2 + bx + c$.

[C. U. B. A. & B. Sc., 1912]

15. Find the equation of the parabola whose focus is at the point $(-1, 1)$ and whose directrix is the straight line $x + y + 1 = 0$. [C. U. B. A. & B. Sc., 1932]

16. Find the equation of the parabola whose focus is at the point $(-2, 3)$ and whose directrix is the straight line $x - 2y + 3 = 0$.

17. (i) For what point of the parabola $y^2 = 16x$, is the ordinate equal to four times the abscissa ?

(ii) A double ordinate of the parabola $y^2 = 4ax$ is of length $8a$; prove that the lines from the vertex to its two ends are at right angles.

[ইঙ্গিত : ৪৭ পৃঃ এর প্রথম চিত্র দ্রষ্টব্য।

মনে কর, বর্দ্ধিত PN অধিবৃত্তকে P' বিন্দুতে ছেদ করে, তাহা হইলে শর্ত্তানুসারে $PNP' = 8a$. প্রমাণ করিতে হইবে যে, $\angle PAP' =$ এক সমকোণ। এখন, $PN = 4a$. $\therefore$ P এর স্থানাঙ্ক (x, y) হইলে, $y = PN = 4a$. কিন্তু $y^2 = 4ax$, $\therefore$ $(4a)^2 = 4ax$, $\therefore$ $x = 4a$ অর্থাৎ $AN = 4a$,

$\therefore \angle PAN = 45°$, $\because PN = AN = 4a$. $\therefore \angle PAP' = 90°$, ($\because \angle P'AN = \angle PAN = 45°$)].

18. Determine the co-ordinates of the focus of the parabola $y^2 = 2ax$ which passes through the point of intersection of the straight lines $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$ and $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$. [C. U. 1943]

19. If $a + b \neq 0$, find the co-ordinates of the focus of the parabola $y^2 = 2mx$ which passes through the point of intersection of the straight lines $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ and $\frac{x}{b} + \frac{y}{a} = 1$. [C. U. 1952]

20. Find the co-ordinates of the points of intersection of the parabola

(i) $y^2 = 2x$ and the straight line $y = x - 4$;

(ii) $y^2 = x$ and the straight line $x - 5y + 6 = 0$; [C. U. 1944]

(iii) $3x^2 = -4y$ and the straight line $3x - 2y = 12$;

(iv) $5y^2 = 12x$ and the straight line $5y + 9x - 5 = 0$.

21. Find the latus rectum and the co-ordinates of the focus of the parabola $3y^2 = 4x$, and determine the points in which it is met by the straight line $2x = 3y$. [C. U. 1935]

22. Show that the straight line

(i) $y = 3x + 2$ touches the parabola $y^2 = 24x$;

(ii) $4(y - 3x) = 5$ touches the parabola $y^2 = 15x$;

(iii) $4x - 2y + 3 = 0$ touches the parabola $y^2 = 12x$;

[C. U. 1947]

(iv) $4a(y - b) = x$ touches the parabola $ay^2 = bx$;

[C. U. B. A. & B. Sc., 1921]

(v) $y = m(x + a) + \frac{a}{m}$ touches the parabola $y^2 = 4a(x + a)$;

(vi) $x + my + am^2 = 0$ touches the parabola $y^2 = 4ax$.

[U. P. 1948]

Find in every one of the above cases the co-ordinates of the point of contact.

23. For what value of a, will the straight line $y=3x+1$ touch the parabola $y^2=4ax$? [C. U. 1946]

24. For what value of a, will the straight line $y=2x+3$ touch the parabola $y^2=4ax$? [D. B. 1948]

25. Find the length of the latus rectum of the parabola $y^2=4ax$, if the straight line.

(i) $y=3x+1$ touches it ; [C. U. 1946, D. B. 1949]

(ii) $20x-2y+1=0$ touches it.

26. The straight line $y=mx+c$ cuts the parabola $y^2=12x$ in two coincident points and is parallel to the staight line $5y+3x+25=0$. Find m and c. [C. U. 1949]

27. Find the equation of the tangent to the parabola $y^2=5x$, which is parallel to the straight line $20x-4y+9=0$, and find the co-ordinates of the point of contact.

28. Find the equations of the tangent to the parabola $y^2=24x$, which is perpendicular to the straight line $x+3y+4=0$.

29. Find the equation of the tangent and the normal to the parabola

(i) $y^2=4x$, at the point $(9, -6)$;

(ii) $y^2=-12x$, at the point $(-3, 6)$;

(iii) $y^2=9x$, at the extremities of the latus rectum.

30. Find the equation of the normal to the parabola $y^2=4ax$ at the ends of the latus rectum. [U. P. 1952]

31. A tangent to the parabola $y^2=bx$ makes an angle of $60°$ with the axis of x ; find its equation and the point of contact.

32. Show that the straight line $4x-8y=45$ is normal to the parabola $y^2=20x$. Find the point where the straight line is normal.

33. Find the equations of the tangents to the parabola $y^2=32x$, drawn from the point $(3, 14)$.

34. Find the equation of the diameter of the parabola $y^2=6x$, which bisects all chords parallel to the straight line $3y+x+5=0$.

35. Show that the straight line $3y+20=0$ bisects all chords of the parabola $y^2=30x$, which are parallel to $9x+4y-1=0$.

36. Find the equation of the chord of the parabola $y^2=10x$, which is bisected at the point $(4, -5)$.

37. Find the locus of the middle points of all chords of the parabola $5y^2=16x$, which pass through the point $(8, -5)$.

38. Prove that the locus of the middle points of the chords of the parabola $y^2=4ax$, which are drawn through the vertex is the parabola $y^2=2ax$. [C. U. B. A. & B. Sc., 1946]

39. Find the equation of the focal chord of the parabola $y^2=15x$, which is inclined at an angle of 45° to the positive direction of the axis of x.

40. A tangent to the parabola $y^2=8x$ makes an angle of 45° with the straight line $y=3x+5$. Find the equation and its point of contact. [C. U. B. A. & B. Sc., 1946]

41. Find the equation of the chord of contact of the point $(5, 4)$ with respect to the parabola $5y^2=8x$.

42. The subtangent at any point of a parabola is bisected at the vertex and the subnormal as any point on a parabola is equal to the semi-latus rectum of the parabola. Verify these two theorems with respect to the point $(\frac{5}{4}, 5)$ on the parabola $y^2=20x$.

43. Prove that, if the co-ordinates of the vertex and the focus of a parabola be respectively $(a, 0)$ and $(b, 0)$, the equation to the parabola is $y^2=4(b-a)(x-a)$.

44. Prove that the algebraic sum of the ordinates of the feet of three normals that can be drawn from any point to a parabola is zero.

45. The normal to the parabola $y^2=4ax$ at $(am_1^2, 2am_1)$ meets the curve again in $(am_2^2, 2am_2)$. Prove that

$$m_1^2+m_1m_2+2=0.$$ [C. U. B. A. & B. Sc., 1946]

46. A circle and a parabola intersect in four points. Prove that the algebraic sum of the ordinates of the four points is zero.

[C. U. B. A. & B. Sc., 1920]

তৃতীয় অধ্যায়

উপবৃত্ত

(Ellipse)

3·1. উপবৃত্ত।

কনিকের উপকেন্দ্রতা (e) এক অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইলে কনিককে **উপবৃত্ত** (Ellipse) বলা হয়, অর্থাৎ,

কোন সমতলের উপর অবস্থিত একটি নির্দ্দিষ্ট স্থির বিন্দু এবং একটি নির্দ্দিষ্ট ও স্থির সরলরেখা হইতে ঐ সমতলের উপর গতিশীল কোন বিন্দুর দূরত্বদ্বয়ের অনুপাত ধ্রুবক কিন্তু এক অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইলে গতিশীল বিন্দুটির সঞ্চার-পথকে **উপবৃত্ত** (Ellipse) বলে।

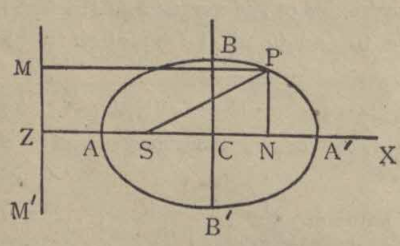
নির্দ্দিষ্ট বিন্দুটিকে ঐ উপবৃত্তের **নাভি** (Focus), নির্দ্দিষ্ট সরলরেখাকে উহার **নিয়ামক** (Directrix) এবং দূরত্বদ্বয়ের ধ্রুবক অনুপাতকে ঐ উপবৃত্তের **উৎকেন্দ্রতা** (Eccentricity) বলা হয়। সাধারণতঃ নাভিকে S অক্ষর দ্বারা এবং উৎকেন্দ্রতাকে e অক্ষর দ্বারা সূচিত করা হয়।

নাভিবিন্দুগামী এবং নিয়ামকের লম্ব সরলরেখাকে উপবৃত্তের **অক্ষ** (Axis) এবং অক্ষের সহিত উপবৃত্তের ছেদবিন্দুকে ঐ উপবৃত্তের **শীর্ষবিন্দু** (Vertex) বলে।

নাভিবিন্দুগামী এবং অক্ষের লম্ব-জ্যা-কে উপবৃত্তের **নাভিলম্ব** (Latus rectum) বলে।

3·2. উপবৃত্তের সমীকরণ (Equation of an ellipse).

S উপবৃত্তটির নাভি এবং MM' উহার নিয়ামক। S হইতে নিয়ামকের উপর SZ লম্ব টানিয়া, S এর দিকে বর্দ্ধিত করা হইল ; ইহাই হইল অক্ষ।



SZ এর উপর এরূপ একটি বিন্দু A নির্ণয় করা যায়, অর্থাৎ SZ কে এরূপে অন্তর্বিভক্ত করা যায় যে,

$$SA = e.AZ \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

আবার $e < 1$ বলিয়া, বর্দ্ধিত ZS এর উপর এরূপ একটি বিন্দু A' থাকিবে যে,

$$SA' = e.A'Z \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

মনে কর, $AA' = 2a$, এবং C, AA' এর মধ্যবিন্দু।

[A ও A' উভই উপবৃত্তের শীর্ষবিন্দু এবং C উপবৃত্তের **কেন্দ্র** (centre).]

(1) এবং (2) হইতে, যোগ করিয়া, $2a = e(AZ + A'Z) = 2e.CZ$;

$$\therefore \quad CZ = \frac{a}{e} \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (3)$$

(2) হইতে (1) বিয়োগ করিয়া, $SA' - SA = e(A'Z - AZ)$,

বা, $(CS + CA') - (CA - CS) = e.AA'$,

বা, $2CS = e.2a$, বা, $CS = ae$. $\cdots \quad \cdots \quad (4)$

এখন, কেন্দ্র C কে মূলবিন্দু, CA' কে x-অক্ষ এবং C বিন্দু দিয়া অঙ্কিত AA' এর লম্ব-রেখাকে y-অক্ষ ধর এবং মনে কর, উপবৃত্তের উপর অবস্থিত যে-কোন বিন্দু P এর স্থানাঙ্ক (x, y). P বিন্দু হইতে নিয়ামকের উপর PM লম্ব এবং AA' এর উপর PN লম্ব টান।

$CS = ae$ বলিয়া, নাভি S এর স্থানাঙ্ক $(-ae, 0)$.

এখন, $SP^2 = (e.PM)^2 = (e.ZN)^2 = e^2 ZN^2 = e^2(CN + ZC)^2$;

$\therefore \; (x + ae)^2 + y^2 = e^2\left(x + \dfrac{a}{e}\right)^2$,

বা, $x^2(1 - e^2) + y^2 = a^2(1 - e^2)$,

বা, উভয় পক্ষকে $a^2(1 - e^2)$ দ্বারা ভাগ করিয়া,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2(1 - e^2)} = 1. \quad \cdots \quad \cdots \quad (5)$$

ইহাই উপবৃত্তের সমীকরণ ; এই সমীকরণে $x = 0$ বসাইয়া দেখা যায়, উপবৃত্তটি y-অক্ষকে দুইটি বিন্দুতে ছেদ করে এবং তাহাদের কোটি $\pm a\sqrt{1 - e^2}$. অতএব, এই ছেদবিন্দু দুইটি y-অক্ষের উপর মূলবিন্দু C এর বিপরীত পার্শ্বে অবস্থিত হইবে এবং C হইতে সমদূরবর্তী হইবে। এই দুইটি বিন্দুকে B ও B' দ্বারা সূচিত করিলে, $CB = B'C = a\sqrt{1 - e^2} = b$, মনে কর ; তাহা হইলে, $BB' = 2b$ এবং $b = a\sqrt{1 - e^2}$, বা, $b^2 = a^2(1 - e^2)$ $\cdots$ (6)

$\therefore$ (5) হইতে, উপবৃত্তের সমীকরণ হইল

$$\mathbf{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.}$$

3·2(a). উপবৃত্তের দ্বিতীয় নাভি ও দ্বিতীয় নিয়ামক আছে।

[The ellipse has got a second focus and a second directrix.]

C বিন্দুর যে পার্শ্বে S বিন্দু অবস্থিত, তাহার বিপরীত পার্শ্বে (3·3 অনুচ্ছেদের চিত্র দ্রষ্টব্য) পরাক্ষের উপর S' বিন্দু লও, যেন $CS = CS'$ হয় এবং বর্দ্ধিত ZA' এর উপর Z' বিন্দু লও, যেন $CZ = CZ'$ হয় এবং $Z'M'$ সরলরেখা ZZ'এর উপর লম্ব টান। বর্দ্ধিত MP, $Z'M'$ এর উপর M' বিন্দুতে লম্ব হইল।

এখন $CS' = CS = ae$; $\therefore$ S' এর স্থানাঙ্ক $(ae, 0)$; এবং $CZ' = CZ = \dfrac{a}{e}$.

অনু. 3·2 এর সমীকরণ (5) হইতে,

$$(1-e^2)x^2 + y^2 = a^2(1-e^2),$$

বা, $$x^2 + a^2e^2 + y^2 = e^2x^2 + a^2,$$

বা, $$(x-ae)^2 + y^2 = e^2x^2 - 2aex + a^2$$

$$= e^2\left(x^2 - \frac{2a}{e}x + \frac{a^2}{e^2}\right) = e^2\left(\frac{a}{e} - x\right)^2$$

বা, $$S'P^2 = e^2 PM'^2,$$

বা, $$S'P = e.PM',$$

বা, $$\frac{S'P}{PM'} = e.$$

অতএব, দেখা গেল, S' বিন্দু হইতে উপবৃত্তের উপর অবস্থিত যে-কোন বিন্দু P এর দূরত্ব এবং $Z'M'$ রেখা হইতে ঐ P বিন্দুর দূরত্বের অনুপাত, উপবৃত্তের উৎকেন্দ্রতা e এর সমান। সুতরাং, S' বিন্দুকে নাভি এবং $Z'M'$ রেখাকে নিয়ামক ধরিলেও একই উপবৃত্ত পাওয়া যাইবে ; অর্থাৎ উপবৃত্তের একটি দ্বিতীয় নাভি এবং দ্বিতীয় নিয়ামক থাকে।

অনুসিদ্ধান্ত 1. শীর্ষবিন্দু A র স্থানাঙ্ক **(−a, 0)**, A' এর স্থানাঙ্ক **(a, 0)** ; নাভি S এর স্থানাঙ্ক **(−ae, 0)** এবং নাভি S' এর স্থানাঙ্ক **(ae, 0).**

অনুসিদ্ধান্ত 2. AA' কে বলা হয় উপবৃত্তের **পরাক্ষ** (Major Axis) এবং BB' কে বলা হয় উহার **উপাক্ষ** (Minor Axis).

স্পষ্টই, পরাক্ষের দৈর্ঘ্য = 2a এবং উপাক্ষের দৈর্ঘ্য = 2b.

অনুসিদ্ধান্ত 3. (6)-এ দেখা গিয়াছে $b^2 = a^2(1-e)^2$,

বা, $a^2e^2 = a^2 - b^2$; $\therefore$ $e = \sqrt{\dfrac{a^2 - b^2}{a^2}}$, অর্থাৎ, $\sqrt{1 - \dfrac{b^2}{a^2}}$.

অনুসিদ্ধান্ত 4. নিয়ামকের সমীকরণ : $x = -\dfrac{a}{e}$, বা, $x + \dfrac{a}{e} = 0$.

নাভিলম্বের সমীকরণ : $x = -ae$, বা, $x + ae = 0$.

অনুসিদ্ধান্ত 5. (3) হইতে, $CA = a = e.CZ$;

(4) হইতে, $CS = e.a = e.CA$;

(3) ও (4) গুণ করিয়া, $CS.CZ = a^2 = CA^2$ (উভয় পক্ষ হইতে সাধারণ গুণনীয়ক e অপসারিত করিয়া)।

অনুসিদ্ধান্ত 6. উপবৃত্তের সমীকরণ হইতে দেখা যায়,

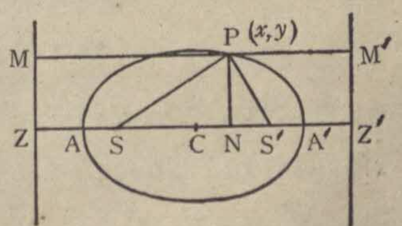
$$\frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2} = \frac{a^2 - x^2}{a^2} = \frac{(a+x)(a-x)}{a^2},$$

বা, $$\frac{PN^2}{BC^2} = \frac{(AC + CN)(CA' - CN)}{AC^2} = \frac{AN.NA'}{AC^2};$$

$$\therefore \quad \frac{PN^2}{AN.NA'} = \frac{BC^2}{AC^2}.$$

3·3. নাভিদ্বয় হইতে উপবৃত্তের উপর অবস্থিত যে-কোন বিন্দুর দূরত্বদ্বয়ের সমষ্টি পরাক্ষের সমান।

[*The sum of the focal distances of any point on an ellipse is equal to the major axis.*]



উপবৃত্তের উপর অবস্থিত যে-কোন বিন্দু P. ইহার স্থানাঙ্ক (x, y).

$$SP = e.PM, \text{ এবং } S'P = e.PM' ;$$

$$\therefore \quad SP + S'P = e(PM + PM') = e.MM' = e.ZZ'$$

$$= e.2CZ = e.2\frac{a}{e} = 2a = \text{পরাক্ষ}।$$

বিশেষ দ্রষ্টব্য। নাভি হইতে উপবৃত্তের উপর অবস্থিত যে-কোন বিন্দুর দূরত্ব।

$$\mathbf{SP} = e.PM = e.NZ = e(CZ + CN)$$
$$= e\left(\frac{a}{e} + x\right) = \mathbf{a + ex}\ ;$$
$$\mathbf{S'P} = e.PM' = e.NZ' = e(CZ' - CN)$$
$$= e\left(\frac{a}{e} - x\right) = \mathbf{a - ex}.$$

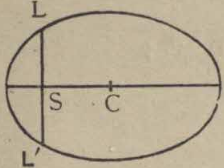
অনুসিদ্ধান্ত। উপাক্ষের অন্তর্বিন্দু B এর স্থানাঙ্ক $(0, b)$ বলিয়া,

$$\mathbf{SB} = a + e.0 = \mathbf{a}\ ;\quad \mathbf{S'B} = a - e.0 = \mathbf{a},$$

এবং $\mathbf{SB + S'B} = a + a = \mathbf{2a}.$

3.4. উপবৃত্তের নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য।

নাভিগামী এবং পরাক্ষের লম্ব LSL' জ্যা উপবৃত্তের নাভিলম্ব।



এখন L বিন্দুর ভুজ $CS = -ae$.

$\therefore$ $SL =$ নাভি S হইতে L এর দূরত্ব

$$= a + e(-ae) = a - ae^2$$
$$= a(1 - e^2) = a \cdot \frac{b^2}{a^2}$$
$$\left[\because\ b^2 = a^2(1 - e^2)\right]$$
$$= \frac{b^2}{a}\ ;$$

L' বিন্দুর ভুজও $-ae$ বলিয়া, $SL' = \frac{b^2}{a}$ হইবে ; উপবৃত্তটি পরাক্ষে প্রতিসম বলিয়াও বলা চলে যে, $SL = SL' = \frac{b^2}{a}$.

$\therefore$ নাভিলম্ব $LL' = SL + SL' = 2SL = \frac{\mathbf{2b^2}}{\mathbf{a}}.$

দ্রষ্টব্য 1. উপবৃত্ত $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ সম্বন্ধীয় পূর্ব্বপ্রাপ্ত বিভিন্ন অতি প্রয়োজনীয় ফলসমূহ নিম্নে একসঙ্গে লিপিবদ্ধ করা হইল। ইহাদিগকে মনে রাখিতে হইবে।

(i) পরাক্ষ $AA' = 2a$; (ii) উপাক্ষ $BB' = 2b$;

(iii) $CA = CA' = a$; (iv) $CB = CB' = b$;

(v) $CS = CS' = ae$; (vi) $CZ = CZ' = \frac{a}{e}$;

(vii) S নাভিগামী নাভিলম্ব $LSL' = S'$ নাভিগামী নাভিলম্ব $= \frac{2b^2}{a^2}$;

(viii) উপবৃত্তের উপর অবস্থিত কোন বিন্দু $P\ (x,\ y)$ হইলে, $SP = a + ex$, $S'P = a - ex$;

(ix) $SP + S'P = 2a$;

(x) $SB = S'B = a$; ($\because\ SB + S'B = 2a$).

(xi) A ও A' শীর্ষবিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(-a,\ 0),\ (a,\ 0)$;

Z ও Z' বিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $\left(-\frac{a}{e},\ 0\right),\ \left(\frac{a}{e},\ 0\right)$;

S ও S' নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(-ae,\ 0),\ (ae,\ 0)$;

B ও B' উপাক্ষের অন্তর্বিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক যথাক্রমে $(0,\ b),\ (0,\ -b)$;

(xii) $b^2 = a^2(1 - e^2)$; $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$;

(xiii) পরাক্ষের সমীকরণ : $y = 0$;

উপাক্ষের সমীকরণ : $x = 0$;

নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ : $x = -\frac{a}{e},\ x = \frac{a}{e}$;

নাভিলম্বদ্বয়ের সমীকরণ : $x = -ae,\ x = ae$.

দ্রষ্টব্য 2. $b^2 = a^2(1 - e^2)$ এবং $0 < e < 1$; অতএব, $b^2 < a^2$, বা, $b < a$, অর্থাৎ **উপাক্ষার্দ্ধ < পরাক্ষার্দ্ধ ;** আর,

মনে রাখিতে হইবে : (i) নাভিদ্বয় পরাক্ষের উপর অবস্থিত ;

(ii) নিয়ামকদ্বয় উপাক্ষের সমান্তরাল ; এবং

লক্ষ্য করিতে হইবে, পরাক্ষ x-অক্ষ বরাবর না হইয়া, y-অক্ষ বরাবর, কিন্তু মূলবিন্দু পূর্ব্ববৎ কেন্দ্রে অবস্থিত এবং পরাক্ষার্দ্ধ ও উপাক্ষার্দ্ধ যথাক্রমে পূর্ব্ববৎ a ও b হইলে, উপবৃত্তটির সমীকরণ হইবে

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1.$$

তখন, নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক হইবে $(0,\ ae)$ এবং $(0,\ -ae)$, এবং নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ হইবে $y = \pm\frac{a}{e}$.

উদাহরণ 1. Find the lengths of the axes, the length of the latus rectum, eccentricity, the co-ordinates of the foci and the equations of the directrices of the ellipses

(i) $3x^2+4y^2=48$; [C. U. 1941, Gauhati 1949]

(ii) $25x^2+16y^2=400$.

(i) উভয় পক্ষকে 48 দ্বারা ভাগ করিলে, সমীকরণটি হয় $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$.
সমীকরণটির আকার হইতে সিদ্ধান্ত করা যায়, এস্থলে, মূলবিন্দু উপবৃত্তটির কেন্দ্রে অবস্থিত, $a^2=16$, $b^2=12$, এবং উপবৃত্তটির পরাক্ষ ও উপাক্ষ যথাক্রমে x-অক্ষ ও y-অক্ষ বরাবর।

$\therefore$ পরাক্ষ $=2a=2\sqrt{16}=2.4=\mathbf{8}$;

উপাক্ষ $=2b=2\sqrt{12}=2.2\sqrt{3}=\mathbf{4\sqrt{3}}$;

নাভিলম্ব $=\frac{2b^2}{a}=\frac{2.12}{4}=\mathbf{6}$.

উৎকেন্দ্রতা $e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\frac{12}{16}}=\sqrt{\frac{4}{16}}$

$=\sqrt{\frac{1}{4}}=\mathbf{\frac{1}{2}}$;

নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক : $(-ae, 0)$ এবং $(ae, 0)$,

অর্থাৎ, $(-4.\frac{1}{2}, 0)$, $(4.\frac{1}{2}, 0)$, অর্থাৎ, $\mathbf{(-2, 0), (2, 0)}$;

নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ : $x=-\frac{a}{e}=-8$, অর্থাৎ, $\mathbf{x+8=0}$,

এবং $x=\frac{a}{e}=8$, অর্থাৎ, $\mathbf{x-8=0}$.

(ii) উভয় পক্ষকে 400 দ্বারা ভাগ করিয়া, $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$.

সমীকরণটির আকার হইতে সিদ্ধান্ত করা যায়,

(1) মূলবিন্দু উপবৃত্তটির কেন্দ্রে অবস্থিত ;

(2) $a^2=25$ এবং $b^2=16$;

এবং (3) উপবৃত্তটির পরাক্ষ y-অক্ষ বরাবর এবং উপাক্ষ x-অক্ষ বরাবর।

$\therefore$ পরাক্ষ $=2a=\sqrt{25}=2.5=\mathbf{10}$;

উপাক্ষ $=2b=2\sqrt{16}=2.4=\mathbf{8}$;

নাভিলম্ব $= \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \cdot 16}{5} = \frac{32}{5} = 6\frac{2}{5}$;

উৎকেন্দ্রতা $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}$;

নাভিদ্বয় y-অক্ষের উপর অবস্থিত বলিয়া, উহাদের স্থানাঙ্ক :

$(0, ae), (0, -ae)$, অর্থাৎ

$(0, 5.\frac{3}{5}), (0, -5.\frac{3}{5})$, অর্থাৎ **(0, 3)** এবং **(0, −3)** ;

নিয়ামকদ্বয় x-অক্ষের সমান্তরাল বলিয়া, উহাদের সমীকরণ

$$\mathbf{y} = \frac{a}{e} = \frac{5}{3/5} = \frac{\mathbf{25}}{\mathbf{3}}, \text{ এবং } \mathbf{y} = -\frac{a}{e} = -\frac{\mathbf{25}}{\mathbf{3}}.$$

উদা. 2. Find the equation of the ellipse referred to its axes as the axes of x and y respectively, which passes through the points $(-3, 1)$ and $(2, -2)$. Find also the length of its latus rectum, the eccentricty and the co-ordinates of its foci.

[C. U. 1955]

মনে কর, উপবৃত্তটির সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

উপবৃত্তটি $(-3, 1)$ এবং $(2, -2)$ বিন্দুগামী বলিয়া,

$$\left.\begin{aligned} &\frac{9}{a^2} + \frac{1}{b^2} = 1, \\ \text{এবং} \quad &\frac{4}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1. \end{aligned}\right\}$$

সমীকরণদ্বয় সমাধান করিয়া, $a^2 = \frac{32}{3}$ এবং $b^2 = \frac{32}{5}$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ $\frac{x^2}{32/3} + \frac{y^2}{32/5} = 1$,

বা $\frac{3x^2}{32} + \frac{5y^2}{32} = 1$ বা $\mathbf{3x^2 + 5y^2 = 32}$.

নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $= \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \cdot 32}{5\sqrt{\frac{32}{3}}} = \frac{2}{5} \cdot \sqrt{3}\,\sqrt{32} = \frac{\mathbf{8\sqrt{6}}}{\mathbf{5}}$.

উৎকেন্দ্রতা $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{32/5}{32/3}} = \sqrt{1 - \frac{3}{5}} = \sqrt{\frac{\mathbf{2}}{\mathbf{5}}}$.

নাভির স্থানাঙ্ক : $(\pm ae, 0)$, অর্থাৎ, $(\pm \sqrt{\frac{32}{3}} \cdot \sqrt{\frac{2}{5}}, 0)$,

অর্থাৎ $\left(\pm \frac{8\sqrt{15}}{15}, 0\right)$.

উদা. 3. An ellipse whose axes lie along the co-ordinate axes is of eccentricity $\frac{4}{5}$ and passes through the point $(\frac{10}{3}, \sqrt{5})$. Determine its equation. [C. U. 1942]

মনে কর, উপবৃত্তটির সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. ··· (1)

উপবৃত্তটি $(\frac{10}{3}, \sqrt{5})$ বিন্দুগামী বলিয়া, $\frac{100}{9a^2} + \frac{5}{b^2} = 1$ ··· (2)

আবার, $b^2 = a^2(1 - e^2) = a^2(1 - \frac{16}{25}) = \frac{9}{25}a^2$ ··· (3)

(2) এবং (3) সমাধান করিয়া, $a^2 = 25$, $b^2 = 9$.

$\therefore$ a^2 এবং b^2 এর মান (1)-এ বসাইয়া, উপবৃত্তের সমীকরণ হইল

$$\frac{\mathbf{x}^2}{25} + \frac{\mathbf{y}^2}{9} = 1.$$

উদা. 4. Find the equation of the ellipse whose axes are the axes of co-ordinates and whose eccentricity is $\frac{1}{\sqrt{5}}$ and latus rectum 8.

মনে কর, উপবৃত্তটির সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ··· (1)

প্রদত্ত শর্তানুসারে,

$$\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ বা } b^2 = \frac{4}{5}a^2 ; \quad \cdots (2)$$

এবং $\frac{2b^2}{a} = 8$, বা, $b^2 = 4a$. ··· (3)

(2) এবং (3) হইতে, $\frac{4}{5}a^2 = 4a$, বা, $a^2 - 5a = 0$, বা, $a(a+5) = 0$;

কিন্তু $a \neq 0$; $\therefore$ $a = 5$ এবং $b^2 = 4a = 20$;

$\therefore$ (1) হইতে, $\frac{\mathbf{x}^2}{25} + \frac{\mathbf{y}^2}{20} = 1$.

উদা. 5. An ellipse whose axes lie along the co-ordinate axes is of eccentricity $\frac{1}{2}$ and has its foci at the point $(\pm 2, 0)$.

মনে কর, উপবৃত্তটির সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$ ... (1)

এস্থলে, নাভির স্থানাঙ্ক $(\pm ae, 0)$, এবং $b^2=a^2(1-e^2)$;

$\therefore$ প্রদত্ত শর্তানুসারে, $ae=2$, অর্থাৎ, $\frac{1}{2}a=2$, বা, $a=4$;

এবং $b^2=16(1-\frac{1}{4})=16\times\frac{3}{4}=12.$

$\therefore$ (1) হইতে, নির্ণেয় সমীকরণ $\mathbf{\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1.}$

উদা. 6. An ellipse whose axes lie along the co-ordinate axes is of latus rectum 16 and has its minor axis equal to the distance between the foci. Find its equation.

মনে কর, উপবৃত্তটির সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ ... ... (1)

প্রদত্ত শর্তানুসারে, $\frac{2b^2}{a}=16$, বা, $b^2=8a$ ... ... (2)

এবং $2ae=2b$, বা, $a^2e^2=b^2=a^2(1-e^2)=a^2-a^2e^2$,

বা, $2a^2e^2=a^2$; কিন্তু $a^2\neq 0$; $\therefore 2e^2=1$,

বা, $e^2=\frac{1}{2}$; $\therefore e=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

(2) হইতে, $8a=b^2=a^2(1-e^2)=a^2(1-\frac{1}{2})=\frac{1}{2}a^2$,

বা, $a(8-\frac{1}{2}a)=0$; কিন্তু $a\neq 0$; $\therefore \frac{1}{2}a=8$, বা, $a=16$. ... (3)

$\therefore$ (2) হইতে, $b^2=8a=8.16=128.$ ... (4)

(1) এ-(3) এবং (4) হইতে a^2 ও b^2 এর মান বসাইয়া,

নির্ণেয় সমীকরণ $\frac{x^2}{256}+\frac{y^2}{128}=1$,

বা, $\mathbf{x^2+2y^2=256.}$

উদা. 7. For what value of p does the ellipse $px^2+4y^2=1$ pass through the points $(\pm 1, 0)$. Find the lengths of its two axes.
[C. U. 1935]

উপবৃত্তটি ($\pm 1, 0$) বিন্দুদ্বয়গামী বলিয়া,

$$p.(1)^2 + 4.0 = 1 \quad \text{এবং} \quad p.(-1)^2 + 4.0 = 1\,;$$

উভয় সমীকরণ হইতেই, $\mathbf{p = 1.}$

অতএব, সমীকরণটি হইল $x^2 + 4y^2 = 1$,

বা, $\dfrac{x^2}{1} + \dfrac{y^2}{\frac{1}{4}} = 1.$

$\therefore$ $a = 1$ এবং $b = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}$.

$\therefore$ পরাক্ষ $= 2a = \mathbf{2}$, এবং উপাক্ষ $= 2b = 2.\frac{1}{2} = \mathbf{1.}$

উদা. 8. Find the equation of the ellipse whose focus is $(2, -1)$, directrix $x + 2y + 3 = 0$ and eccentricity $\frac{5}{6}$.

মনে কর, উপবৃত্তটির উপর অবস্থিত যে-কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y).

এখন, নাভি হইতে বিন্দুটির দূরত্ব $= e \times$ নিয়ামক হইতে বিন্দুটির দূরত্ব,

বা, $\sqrt{(x-2)^2 + (y+1)^2} = \dfrac{5}{6} \cdot \dfrac{x + 2y + 3}{\sqrt{1^2 + 2^2}} = \dfrac{5}{6} \cdot \dfrac{x + 2y + 3}{\sqrt{5}}$

বা, উভয় পক্ষ বর্গ করিয়া, $(x-2)^2 + (y+1)^2 = \dfrac{25}{36} \cdot \dfrac{(x + 2y + 3)^2}{5}$,

বা, $36(x^2 + y^2 - 4x + 2y + 5) = 5(x^2 + 4y^2 + 4xy + 6x + 12y + 9)$,

বা, $\mathbf{31x^2 + 16y^2 - 20xy - 174x + 12y + 135 = 0}$;

ইহাই নির্ণেয় সমীকরণ।

উদা. 9. Find the centre, eccentricity, foci and directrices of the ellipses

(i) $4x^2 + 9y^2 - 24x = 0$;

(ii) $16x^2 + 25y^2 - 64x - 150y = 111$.

(i) উপবৃত্তটির সমীকরণ $4x^2 + 9y^2 - 24x = 0$,

বা, $(2x - 6)^2 + 9y^2 = 36$,

বা, $4(x - 3)^2 + 9y^2 = 36$,

বা, $\dfrac{(x-3)^2}{2} + \dfrac{y^2}{4} = 1$;

(1) পরাক্ষ $y = 0$ রেখা বরাবর হইবে, এবং উপাক্ষ $x - 3 = 0$ রেখা বরাবর হইবে ; এই দুই রেখার ছেদবিন্দু কেন্দ্র ;

$\therefore$ সমাধান করিয়া কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক **(3, 0).**

(2) এস্থলে, $a^2 = 9$ এবং $b^2 = 4$;

$\therefore$ উৎকেন্দ্রতা $e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{4}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$.

(3) নাভিদ্বয় পরাক্ষ, অর্থাৎ, এস্থলে, $y = 0$ রেখার উপর এবং কেন্দ্র (3, 0) এর উভয় পার্শ্বে অবস্থিত এবং কেন্দ্র হইতে উহাদের দূরত্ব ae, অর্থাৎ, $3 \cdot \frac{\sqrt{5}}{3}$, অর্থাৎ, $\sqrt{5}$; অতএব, নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক হইবে $\mathbf{(3 - \sqrt{5}, 0)}$ এবং $\mathbf{(3 + \sqrt{5}, 0)}$.

(4) নিয়ামকদ্বয় উপাক্ষের সমান্তরাল ; অতএব, উহার $x - 3 = 0$ রেখা এবং সেইজন্য $x = 0$ রেখার সমান্তরাল। আবার উহারা কেন্দ্রের দুইপার্শ্বে অবস্থিত এবং কেন্দ্র হইতে উহাদের দূরত্ব $\frac{a}{e}$, অর্থাৎ, $\frac{3}{\sqrt{5/3}}$, অর্থাৎ, $\frac{9}{\sqrt{5}}$; অতএব, নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ হইবে

$$\mathbf{x = 3 - \frac{9}{\sqrt{5}}} \quad \text{এবং} \quad \mathbf{x = 3 + \frac{9}{\sqrt{5}}}.$$

(ii) উপবৃত্তটির সমীকরণ $16(x^2 - 4x) + 25(y^2 - 6y) = 111$,

বা, $19(x - 2)^2 + 25(y - 3)^2 = 111 + 64 + 225 = 400$,

বা, $\frac{(x - 2)^2}{25} + \frac{(y - 3)^2}{16} = 1$.

(1) পরাক্ষ $y - 3 = 0$ রেখা বরাবর হইবে, এবং উপাক্ষ $x - 2 = 0$ রেখা বরাবর হইবে ; এই দুই রেখার ছেদবিন্দু কেন্দ্র ; অতএব, সমাধান করিয়া কেন্দ্রের স্থানাঙ্ক **(2, 3)**.

(2) এস্থলে, $a^2 = 25$ এবং $b^2 = 16$;

$$e = \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 - \frac{16}{25}} = \sqrt{\frac{9}{25}} = \frac{3}{5}.$$

(3) নাভিদ্বয় পরাক্ষ, অর্থাৎ এস্থলে, $y = 3$ রেখার উপর এবং কেন্দ্র (2, 3) এর উভয় পার্শ্বে অবস্থিত, এবং কেন্দ্র হইতে উহাদের দূরত্ব ae, অর্থাৎ, $5.\frac{3}{5}$, অর্থাৎ 3 ; অতএব, নাভিদ্বয়ের কোটি হইবে 3 এবং ভুজ হইবে $2 - 3$, অর্থাৎ -1, এবং $2 + 3$, অর্থাৎ 5 ;

$\therefore$ নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $\mathbf{(-1, 3), (5, 3)}$.

(4) নিয়ামকদ্বয় উপাক্ষের সমান্তরাল ; অতএব, উহারা $x-2=0$, অর্থাৎ, $x=2$ রেখার সমান্তরাল। আবার, উহারা উপাক্ষের দুইপার্শ্বে অবস্থিত এবং উপাক্ষ হইতে উহাদের দূরত্ব কেন্দ্র হইতে উহাদের দূরত্বের সমান এবং এই দূরত্ব

$$=\frac{a}{e}=\frac{5}{3/5}=\frac{25}{3};$$

∴ নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ $x=2-\frac{25}{3}=-\frac{19}{3}$, অর্থাৎ, $3x+19=0$,

এবং $x=2+\frac{25}{3}=\frac{31}{3}$, অর্থাৎ, $3x-31=0$.

প্রশ্নমালা 4

1. Find the lengths of the axes, the eccentricity, the length of the latus rectum, the co-ordinates of the centre, the co-ordinates of the foci and the equations of the directrices of the ellipse given by every one of the following equations :

(i) $\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{3^2}=1$; [C. U. 1936] (ii) $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{36}=1$;

(iii) $9x^2+25y^2=225$; [C. U. 1944]

(iv) $x^2+2y^2=2$; [C. U. 1947]

(v) $2x^2+3y^2=1$; [U. P. 1952]

(vi) $9x^2+4y^2=36$; (vii) $3x^2+2y^2=8$;

(viii) $3x^2+4y^2-24x=0$; (ix) $2x^2+3y^2-4x=4$;

(x) $9x^2+25y^2-72x+100y=656$.

2. Find the distance between a focus and the corresponding directrix of the ellipse $\frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{28}=1$.

3. Find the focal distances of the point $(\frac{5}{2}, 3\sqrt{2})$ of the ellipse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{24}=1$.

4. Determine, with reference to the axes of an ellipse, its equation, given that 3 and 2 are respectively its major and minor axis.

5. Determine the equation of the ellipse whose axes lie along the co-ordinate axes and which passes through the points

(i) (5, 0) and (0, 4) ; (ii) (2, 2) and (3, 1) ; [C. U. 1939]

(iii) $\left(\frac{\sqrt{5}}{2}, \sqrt{3}\right)$ and $\left(\frac{3\sqrt{5}}{4}, \frac{\sqrt{7}}{2}\right)$;

(iv) $(4, \sqrt{21})$ and $(4\sqrt{3}, \sqrt{7})$.

6. For what value of a does the ellipse $9ax^2+5y^2=9$ pass through the point $(\pm\sqrt{5}, 0)$? Find the eccentricity of the ellipse.

7. Find the equation of the ellipse which meets the straight line $\frac{x}{7}+\frac{y}{2}=1$ on the axis of x and the straight line $\frac{x}{3}+\frac{y}{5}=1$ on the axis of y and whose axes lie along the axes of co-ordinates. Determine the eccentricity and the positions of the foci of the ellipse. [C. U. 1938]

8. Find the equation of the ellipse (referred to its axes as the axes of x and y respectively) which passes through the point $(-3, 1)$ and has the eccentricity $\sqrt{\frac{2}{5}}$. [C. U. 1948]

9. The ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ passes through the point of intersection of the straight lines $7x+13y-87=0$ and $5x-8y+7=0$ and its latus rectum is $\frac{32}{5}\sqrt{2}$; find a and b. [C. U. 1949]

10. The distance between the focus and the directrix of an ellipse is 16 inches and its eccentricity is $\frac{3}{5}$. Obtain the lengths of the principal axes. [C. U. 1943]

11. Find the eccentricity of the ellipse whose latus rectum is 4 inches and the distance of the vertex from the nearest focus 1·5 inches. [C. U. 1944]

12. Find the eccentricity of an ellipse, if its latus rectum be equal to

(*a*) half of its major axis ; [C. U. 1948]

(*b*) half of its minor axis.

13. Find the equation of the ellipse whose axes lie along the axes of co-ordinates and

(i) whose major axis is 10 and eccentricity $\frac{1}{5}$;

(ii) whose latus rectum is 5 and eccentricity $\frac{2}{3}$;

[C. U. B. A. & B. Sc., 1940]

(iii) whose eccentricity is $\frac{1}{3}$ and co-ordinates of foci $(\pm 1, 0)$.

14. The foci of an ellipse are at the points $(0, 1)$ and $(0, -1)$ and the minor axis is of unit length. Find the equation of the ellipse.

[C. U. 1951]

15. Find the equation of the ellipse

(i) whose focus is $(-1, 1)$, eccentricity $\frac{1}{2}$ and directrix is $x-y+3=0$;

[C. U. B. A. & B. Sc., 1945]

(ii) whose focus is $(2, 3)$, eccentricity $\dfrac{1}{\sqrt{13}}$ and directrix $x-y+13=0$.

16. In an ellipse, $CS.CX=CA^2$, where C is the centre, S is a focus, A is the corresponding vertex and X is the point where the line CS meets the corresponding directrix of the ellipse. Verify this theorem when the ellipse is $x^2+2y^2=2$.

[C. U. 1950]

3·5. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্ত এবং $y=mx+c$ সরলরেখার ছেদবিন্দু এবং সরলরেখাটির উপবৃত্তের স্পর্শক হইবার শর্ত।

[*Points of intersection of the ellipse* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ *and the straight line* $y=mx+c$ *and the condition that the straight line may be a tangent to the ellipse.*]

প্রদত্ত উপবৃত্ত এবং সরলরেখার ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক উভয় সমীকরণকেই যুগপৎ সিদ্ধ করে বলিয়া,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

এবং $$y=mx+c \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

সমীকরণ দুইটিকে সহ-সমীকরণরূপে সমাধান করিয়া ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক নির্ণয় করা যাইবে।

(2) হইতে y এর মান (1)-এ বসাইলে,

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(mx+c)^2}{b^2}=1,$$

বা, $b^2x^2+a^2(mx+c)^2=a^2b^2$,

বা, $(a^2m^2+b^2)x^2+2a^2mcx+a^2c^2-a^2b^2=0.$ ··· (3)

(3) একটি দ্বিঘাত সমীকরণ; ইহাকে সমাধান করিলে, x এর দুইটি মান পাওয়া যায় বলিয়া, সরলরেখা উপবৃত্তটিকে দুইটি বিন্দুতে ছেদ করিবে। x এর ঐ মান দুইটি (2)-এ x এর পরিবর্ত্তে বসাইলে y এর অনুরূপ মান দুইটি পাওয়া যাইবে। x এর একটি মান এবং y এর অনুরূপ মান উপবৃত্ত ও সরলরেখার একটি ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক; আর x এর অন্য মানটি এবং y এর অনুরূপ মান উহাদের অপর ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক।

সমীকরণ (3) এর বীজদ্বয়, যথাক্রমে বাস্তব এবং ভিন্ন, বাস্তব এবং অভিন্ন অথবা অবাস্তব হইবে,

যদি $4a^4m^2c^2 \overset{>}{\underset{<}{=}} 4(a^2m^2+b^2)(a^2c^2-a^2b^2)$ হয়,

অর্থাৎ, যদি $a^4m^2c^2 \overset{>}{\underset{<}{=}} a^4m^2c^2-a^4m^2b^2+a^2b^2c^2-a^2b^4$ হয়,

অর্থাৎ, যদি $a^4m^2b^2+a^2b^4 \overset{>}{\underset{<}{=}} a^2b^2c^2$ হয়,

অর্থাৎ, যদি $a^2m^2+b^2 \overset{>}{\underset{<}{=}} c^2$ হয়,

অর্থাৎ, যদি $c^2 \overset{<}{\underset{>}{=}} a^2m^2+b^2$ হয়।

অতএব, $y=mx+c$ সরলরেখাটি $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তটিকে পরস্পর মিলিত দুইটি বিন্দুতে ছেদ করে, যদি $c^2=a^2m^2+b^2$ হয়,

অর্থাৎ, যদি $c = \pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$ হয় ;

$y = mx + c$ সরলরেখাটির উপবৃত্তটির স্পর্শক হইবার শর্ত

$$\mathbf{c = \pm\sqrt{a^2m^2+b^2}.}$$

অনুসিদ্ধান্ত। উপরের ফল হইতে দেখা যায়, m এর সকল মানের জন্যই

$$\mathbf{y = mx \pm \sqrt{a^2m^2+b^2}}$$

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তটির স্পর্শক।

3·6. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের যে-কোন বিন্দু (x_1, y_1)-এ স্পর্শকের সমীকরণ।

[*Equation of the tangent at any point* (x_1, y_1) *of the ellipse* $\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.]

উপবৃত্তটির উপর অবস্থিত প্রদত্ত বিন্দু (x_1, y_1) এর অতি নিকটবর্তী এবং ঐ উপবৃত্তের উপরই অপর একটি বিন্দু (x_2, y_2) লও।

(x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) বিন্দুগামী সরলরেখার সমীকরণ

$$y - y_1 = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}(x - x_1). \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

এখন, (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) উভয়ই প্রদত্ত উপবৃত্তটির উপর অবস্থিত বলিয়া,

$$\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}=1 \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

এবং $$\frac{x_2^2}{a^2}+\frac{y_2^2}{b^2}=1 \quad \cdots \quad \cdots \quad (3)$$

$$\therefore \quad \frac{x_1^2-x_2^2}{a^2}+\frac{y_1^2-y_2^2}{b^2}=0$$ [(2) হইতে (3) বিয়োগ করিয়া]

বা, $$\frac{(y_1-y_2)(y_1+y_2)}{b^2} = -\frac{(x_1-x_2)(x_1+x_2)}{a^2};$$

$$\therefore \quad \frac{y_1-y_2}{x_1-x_2} = -\frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{x_1+x_2}{y_1+y_2}.$$

$\therefore$ (1) হইতে, (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয়গামী সমীকরণ হইল

$$y - y_1 = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{x_1 + x_2}{y_1 + y_2}(x - x_1) \quad \cdots \quad \cdots \quad (4)$$

অতএব, (4)-এ $x_2 = x_1$ এবং $y_2 = y_1$ বসাইয়া, (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ হইল

$$y - y_1 = -\frac{b^2 x_1}{a^2 y_1}(x - x_1),$$

বা, $\frac{yy_1 - y_1^2}{b^2} = -\frac{xx_1 - x_1^2}{a^2}$,

বা, $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$; [(2) হইতে]

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ $\mathbf{\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1}$.

দ্রষ্টব্য 1. বৃত্তের সমীকরণের ন্যায় এস্থলেও উপবৃত্তের সমীকরণে, x^2 এর স্থলে xx_1 এবং y^2 এর স্থলে yy_1 লিখিয়া স্পর্শকের সমীকরণ পাওয়া গিয়াছে।

দ্রষ্টব্য 2. $y = mx + \sqrt{a^2m^2 + b^2}$ সরলরেখাটি $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ উপবৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শক হইলে,

$$y = mx + \sqrt{a^2m^2 + b^2}, \text{ অর্থাৎ, } mx - y + \sqrt{a^2m^2 + b^2} = 0$$

এবং $\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} - 1 = 0$ সমীকরণদ্বয় দ্বারা একই সরলরেখা সূচিত হইবে।

$$\therefore \frac{x_1}{a^2m} = \frac{y_1}{-b^2} = \frac{-1}{\sqrt{a^2m^2 + b^2}};$$

$$\therefore x_1 = \frac{-a^2m}{\sqrt{a^2m^2 + b^2}} \text{ এবং } y_1 = \frac{b^2}{\sqrt{a^2m^2 + b^2}}.$$

অতএব, $y = mx + \sqrt{a^2m^2 + b^2}$ স্পর্শকটির স্পর্শবিন্দু হইল

$$\left(\frac{-\mathbf{a^2m}}{\sqrt{\mathbf{a^2m^2+b^2}}}, \frac{\mathbf{b^2}}{\sqrt{\mathbf{a^2m^2+b^2}}}\right).$$

3·7. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের যে-কোন বিন্দু (x_1, y_1)-এ অভিলম্বের সমীকরণ।

[*Equation of the normal at any point* (x_1, y_1) *of the ellipse* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.]

(x_1, y_1) বিন্দুগামী যে-কোন সরলরেখার সমীকরণ

$$y-y_1=m(x-x_1). \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

সরলরেখাটি উপবৃত্তটির (x_1, y_1) বিন্দুতে উপবৃত্তটির অভিলম্ব হইলে, উহা (x_1, y_1) বিন্দুতে উপবৃত্তের স্পর্শকের লম্ব হইবে। এই স্পর্শকের সমীকরণ

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1, \text{ বা, } y=-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}x+\frac{b^2}{y_1} \quad \cdots \quad (2)$$

$\therefore$ (1) এবং (2) হইতে, $m\times\left(-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}\right)=-1,$

$$\text{বা, } m=\frac{a^2y_1}{b^2x_1}.$$

$\therefore$ (1)-এ m এর এই মান বসাইয়া অভিলম্বের সমীকরণ হইল

$$y-y_1=\frac{a^2y_1}{b^2x_1}(x-x_1),$$

বা, $$\frac{x_1(y-y_1)}{a^2}=\frac{y_1(x-x_1)}{b^2}, \text{ বা, } \frac{x-x_1}{\frac{x_1}{a^2}}=\frac{y-y_1}{\frac{y_1}{b^2}}.$$

3·8. নির্দ্দিষ্ট বহিঃস্থ বিন্দু হইতে উপবৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকসমূহের সংখ্যা।

[*Number of tangents that can be drawn from a given external point to an ellipse.*]

মনে কর, নির্দ্দিষ্ট বিন্দু (x_1, y_1) এবং উপবৃত্ত $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

ঐ উপবৃত্তের যে-কোন স্পর্শকের সমীকরণ

$$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2} \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

(এস্থলে + অথবা − চিহ্নের যে-কোন একটি গ্রহণ করিতে হইবে।)

এই স্পর্শক (x_1, y_1) বিন্দুগামী হইলে,

$$y_1 = mx_1 \pm \sqrt{a^2m^2+b^2},$$

বা, $$(y_1 - mx_1)^2 = a^2m^2 + b^2,$$

বা, $$(x_1{}^2 - a^2)m^2 - 2x_1y_1m + y_1{}^2 - b^2 = 0 \quad \cdots \quad (2)$$

সমীকরণ (2) m এর দ্বিঘাত সমীকরণ বলিয়া, ইহাকে সমাধান করিলে m এর দুইটি মান পাওয়া যায় ; অতএব, (x_1, y_1) বিন্দু হইতে উপবৃত্তটিতে দুইটি স্পর্শক টানা যায়। সমীকরণ (1)-এ + অথবা − চিহ্নের যে-কোন একটি গ্রহণ করিয়া সমীকরণটিতে (2) হইতে প্রাপ্ত m এর দুইটি মান বসাইলে (x_1, y_1) বিন্দু হইতে অঙ্কিত স্পর্শক দুইটির সমীকরণ পাওয়া যাইবে।

3·9. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের দুইটি পরস্পর লম্ব-স্পর্শকের ছেদবিন্দুর সঞ্চারপথ।

[*Locus of the point of intersection of two perpendicular tangents to an ellipse.*]

মনে কর, দুইটি পরস্পর লম্ব স্পর্শকের ছেদবিন্দু (h, k). এখন উপবৃত্তটির যে-কোন স্পর্শকের সমীকরণ $y = mx + \sqrt{a^2m^2+b^2}$. $\quad \cdots \quad (1)$

এই স্পর্শক (h, k) বিন্দুগামী হইলে,

$$k = mh + \sqrt{a^2m^2+b^2},$$

বা, $$(k - mh)^2 = a^2m^2 + b^2,$$

বা, $$(h^2 - a^2)m^2 - 2khm + (k^2 - b^2) = 0. \quad \cdots \quad (2)$$

এই দ্বিঘাত সমীকরণ হইতে প্রাপ্ত m এর দুইটি মান (1)-এ বসাইলে (h, k) বিন্দুগামী দুইটি স্পর্শক পাওয়া যাইবে।

কিন্তু স্পর্শকদ্বয় পরস্পর লম্ব ; অতএব, (2) হইতে প্রাপ্ত m এর মান দুইটির গুণফল $= -1$;

$\therefore \quad \frac{k^2-b^2}{h^2-a^2} = -1,$ বা, $x^2 - b^2 = -h^2 + a^2,$

বা, $$h^2 + k^2 = a^2 + b^2.$$

$\therefore$ পরস্পর লম্ব স্পর্শকদ্বয়ের ছেদবিন্দু (h, k) এর সঞ্চারপথ

$$x^2 + y^2 = a^2 + b^2.$$

সঞ্চারপথের সমীকরণ হইতে স্পষ্টই বুঝা যাইতেছে সঞ্চারপথটি মূলবিন্দুতে অর্থাৎ উপবৃত্তটির কেন্দ্রে কেন্দ্র এবং $\sqrt{a^2+b^2}$, অর্থাৎ AB ব্যাসার্দ্ধ-বিশিষ্ট একটি বৃত্ত।

এই বৃত্তকে ঐ উপবৃত্তের **নিয়ামক বৃত্ত** (Director circle) বলা হয়।

3·10. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের বাহিরে অবস্থিত (x_1, y_1) বিন্দু হইতে উপবৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শক-যুগ্মের স্পর্শ-বিন্দুগামী জ্যা-এর সমীকরণ।

[*Equation of the chord of contact of tangents drawn to the ellipse* $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ *from an external point* (x_1, y_1).]

মনে কর, (x_1, y_1) বিন্দু হইতে উপবৃত্তটিতে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয়ের স্পর্শবিন্দু (x_2, y_2) এবং (x_3, y_3). স্পষ্টই এই দুই বিন্দু উপবৃত্তটির উপর অবস্থিত এবং এই দুই বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শক (x_1, y_1) বিন্দুগামী।

এখন, (x_2, y_2) বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ $\frac{xx_2}{a^2}+\frac{yy_2}{b^2}=1$;

এই স্পর্শক (x_1, y_1) বিন্দুগামী বলিয়া, $\frac{x_1x_2}{a^2}+\frac{y_1y_2}{b^2}=1$ ⋯ (1)

(1) হইতে সুস্পষ্ট যে, (x_2, y_2) বিন্দুটি $\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1$ সরলরেখার উপর অবস্থিত। ⋯ (2)

আবার, (x_3, y_3) বিন্দুতে অঙ্কিত স্পর্শকের সমীকরণ $\frac{xx_3}{x^2}+\frac{yy_3}{b^2}=1$;

এই স্পর্শক (x_1, y_1) বিন্দুগামী বলিয়া, $\frac{x_1x_3}{a^2}+\frac{y_1y_3}{b^2}=1$ ⋯ (3)

(3) হইতে সুস্পষ্ট যে, (x_3, y_3) বিন্দুটি $\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1$ সরলরেখার উপর অবস্থিত। ... (4)

(2) এবং (4) হইতে দেখা যাইতেছে (x_2, y_2) এবং (x_3, y_3) স্পর্শবিন্দু-দ্বয়ের উভয়ই $\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1$ সরলরেখার উপর অবস্থিত ; অতএব, (x_1, y_1) বিন্দু হইতে অঙ্কিত স্পর্শক-যুগ্মের স্পর্শবিন্দুগামী জ্যা-এর সমীকরণ

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1.$$

3·11. উপবৃত্তের একদল সমান্তরাল জ্যা-এর মধ্যবিন্দুসমূহের সঞ্চারপথ ঐ উপবৃত্তের কেন্দ্রগামী একটি সরলরেখা।

[*The locus of the middle points of a system of parallel chords of an ellipse is a straight line passing through the centre.*]

মনে কর, উপবৃত্তটির সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1.$ ... (1)

এখন, জ্যা-গুলি সমান্তরাল বলিয়া, x-অক্ষে উহাদের নতি একই ; সেইজন্য উহাদের প্রবণতা m ও সকল জ্যা-এর ক্ষেত্রে একই। অতএব, সমান্তরাল জ্যা-গুলির যে-কোন একটির সমীকরণ ধরা যায় $y=mx+c$; ... (2)
দলের সকল জ্যা-এর ক্ষেত্রে এই m একই, কিন্তু c বিভিন্ন।

জ্যা-টি উপবৃত্তটিকে (x_1, y_1) এবং (x_2, y_2) বিন্দুদ্বয়ে ছেদ করিলে, (2) হইতে y এর মান (1)-এ বসাইয়া, উক্ত ছেদবিন্দুদ্বয়ের ভুজ-নির্ণায়ক

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(mx+c)^2}{b^2}=1,$$

বা, $(a^2m^2+b^2)x^2+2a^2mcx+a^2(c^2-b^2)=0$ ... (3)
দ্বিঘাত সমীকরণটি পাওয়া যায়।

এখন, (h, k) জ্যা-টির মধ্যবিন্দু হইলে, $h=\frac{x_1+x_2}{2}$ ... (4)

এবং এই বিন্দু $y=mx+c$ সরলরেখার উপর অবস্থিত বলিয়া, $k=mh+c$,
বা, $c=k-mh$ ... (5)

এখন, (3) হইতে, $x_1+x_2=-\frac{2a^2mc}{a^2m^2+b^2}$;

$\therefore$ (4) হইতে, $h=\frac{x_1+x_2}{2}=-\frac{a^2mc}{a^2m^2+b^2}$,

বা, $c=-\frac{h(a^2m^2+b^2)}{a^2m}$ ... (6)

$\therefore$ (5) এবং (6) হইতে, $k-mh=-\frac{h(a^2m^2+b^2)}{a^2m}$,

বা, $a^2mk-a^2m^2h=-a^2m^2h-b^2h$,

বা, $k=-\frac{b^2}{a^2m}h$;

∴ মধ্যবিন্দু (h, k) এর সঞ্চারপথ $\mathbf{y} = -\dfrac{\mathbf{b}^2}{\mathbf{a}^2\mathbf{m}}\mathbf{x}$;

ইহা ধ্রুবক-রাশি-বর্জ্জিত সরল সমীকরণ বলিয়া সঞ্চারপথটি একটি কেন্দ্রগামী সরলরেখা।

3·12. ব্যাস।

উপবৃত্তের একদল সমান্তরাল জ্যা-এর মধ্যবিন্দুসমূহের সঞ্চারপথকে ঐ উপবৃত্তের **ব্যাস** (Diameter) বলে।

মনে কর, $y = mx$ এর সমান্তরাল একদল জ্যা-এর মধ্যবিন্দুসমূহের সঞ্চারপথ অর্থাৎ, ঐ জ্যা-দলকে সমদ্বিখণ্ডনকারী ব্যাসের সমীকরণ $y = m_1x$; কিন্তু অনু. 3·11 হইতে ইহা $y = -\dfrac{b^2}{a^2m}x$;

$$\therefore \quad m_1 = -\frac{b^2}{a^2m}, \text{ বা, } \mathbf{mm_1} = -\frac{\mathbf{b}^2}{\mathbf{a}^2}.$$

অতএব, দেখা গেল, $y = mx$ এর সমান্তরাল জ্যা-সমূহকে সমদ্বিখণ্ডনকারী ব্যাস $y = m_1x$ হইলে, $mm_1 = -\dfrac{b^2}{a^2}$ হয়।

অনুরূপ উপায়ে দেখানো যায় যে, $y = m_1x$ এর সমান্তরাল জ্যা-সমূহকে সমদ্বিখণ্ডনকারী ব্যাস $y = mx$ হইলে, $mm_1 = -\dfrac{b^2}{a^2}$ হয়।

অতএব, $mm_1 = -\dfrac{b^2}{a^2}$ ... ... (1)

শর্ত্তটি সিদ্ধ হইলে,

(i) $y = mx$ জ্যা-এর সমান্তরাল জ্যা-দলকে সমদ্বিখণ্ডনকারী ব্যাস $y = m_1x$ হইবে ;

এবং (ii) $y = m_1x$ জ্যা-এর সমান্তরাল জ্যা-দলকে সমদ্বিখণ্ডনকারী ব্যাস $y = mx$ হইবে।

এইরূপ,

প্রতিযোগী ব্যাস : দুইটি ব্যাসের প্রত্যেকটি অপরটির সমান্তরাল জ্যা-সমূহকে সমদ্বিখণ্ডিত করিলে ব্যাস দুইটিকে **প্রতিযোগী** বা **অনুবন্ধী ব্যাস** (Conjugate diameters) বলে ;

(1) হইতে দেখা যায়, $y = mx$ এবং $y = m_1x$ ব্যাস দুইটির প্রতিযোগী হইবার শর্ত্ত

$$\mathbf{mm_1} = -\frac{\mathbf{b}^2}{\mathbf{a}^2}.$$

3·13. নির্দ্দিষ্ট বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত জ্যা-এর সমীকরণ।

[*Equation of the chord which is bisected at a given point.*]

উপবৃত্তটির সমীকরণ, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ এবং নির্দ্দিষ্ট বিন্দুটিকে (x_1, y_1) ধরা যাক।

ঐ উপবৃত্তের যে জ্যা-এর মধ্যবিন্দু (x_1, y_1) তাহার সমীকরণ নির্ণয় করিতে হইবে।

মনে কর, এই জ্যা-এর সমীকরণ $y-y_1=m(x-x_1)$ ... (1)

এখন, এই জ্যা এবং ইহার সমান্তরাল জ্যা-সমূহের মধ্যবিন্দুগামী ব্যাসের সমীকরণ $y=-\frac{b^2}{a^2m}x.$

(x_1, y_1) মধ্যবিন্দুটিও এই ব্যাসের উপর অবস্থিত বলিয়া,

$$y_1=-\frac{b^2}{a^2m}x_1, \quad \text{বা,} \quad m=-\frac{b^2x_1}{a^2y_1},$$

∴ (1) হইতে নির্ণেয় সমীকরণ,

$$y-y_1=-\frac{b^2x_1}{a^2y_1}(x-x_1),$$

বা, $\frac{yy_1}{b^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=-\frac{xx_1}{a^2}+\frac{x_1^2}{a^2},$

বা, $\mathbf{\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}.}$

উদাহরণ। Find the locus of the middle points of all chords of the ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, which pass through a given point (h, k).

উপবৃত্তটির কোন জ্যা-এর মধ্যবিন্দু (x_1, y_1) হইলে, ইহার সমীকরণ হইবে

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}.$$

জ্যা-টি (h, k) বিন্দুগামী হইলে,

$$\frac{hx_1}{a^2}+\frac{ky_1}{b^2}=\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}.$$

$\therefore$ মধ্যবিন্দু (x_1, y_1) এর সঞ্চারপথ

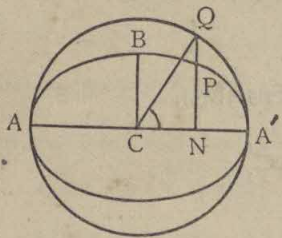
$$\frac{xh}{a^2}+\frac{yk}{b^2}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2},$$

বা, $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{xh}{a^2}+\frac{yk}{b^2},$$

ইহা একটি উপবৃত্ত।

3·14. সহায়ক বৃত্ত।

উপবৃত্তের পরাক্ষকে ব্যাস-রূপে ধরিয়া উহার উপর অঙ্কিত বৃত্তকে উপবৃত্তের **সহায়ক বৃত্ত** (Auxiliary Circle) বলা হয়।



উপবৃত্তের উপর অবস্থিত কোন বিন্দু P হইতে পরাক্ষের উপর PN লম্ব টানা হইল এবং ইহাকে P এর দিকে বর্দ্ধিত করায় ইহা সহায়ক বৃত্তটিকে Q বিন্দুতে ছেদ করিল। Q বৃত্তের উপর অবস্থিত একটি বিন্দু এবং AA' ঐ বৃত্তের ব্যাস;

$\therefore$ জ্যামিতি হইতে, $QN^2 = AN.A'N$.

আবার, P উপবৃত্তের উপর অবস্থিত একটি বিন্দু বলিয়া,

$$\frac{PN^2}{AN.A'N}=\frac{BC^2}{CA^2};$$

$$\therefore \quad \frac{PN^2}{QN^2}=\frac{BC^2}{CA^2}, \text{ বা, } \frac{PN}{QN}=\frac{BC}{CA}.$$

উপবৃত্তটির সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ হইলে,

$$\frac{\mathbf{PN}}{\mathbf{QN}}=\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}. \qquad \cdots \quad (1)$$

অতএব, দেখা গেল, উপবৃত্তের উপর অবস্থিত যে-কোন বিন্দুর জন্যই

$$\frac{PN}{QN}=\frac{b}{a}.$$

Q বিন্দুকে P বিন্দুর অনুরূপ বিন্দু বলা হয়।

উৎকেন্দ্রীয় কোণ : উপবৃত্তের উপর অবস্থিত কোন বিন্দু P এর কোটিকে P এর দিকে বর্দ্ধিত করিলে, ইহা সহায়ক বৃত্তটিকে Q বিন্দুতে ছেদ করিল ; Q এবং কেন্দ্রের সংযোজক সরলরেখা CQ পরাক্ষের সহিত যে QCA' কোণ গঠন করে, তাহাকে P বিন্দুর **উৎকেন্দ্রীয় কোণ** (Eccentric Angle) বলে। উৎকেন্দ্রীয় কোণকে সাধারণতঃ ϕ দ্বারা সূচিত করা হয়।

এখন, $CN = CQ \cos\phi = a\cos\phi$,

এবং $QN = CQ \sin\phi = a \sin\phi$.

$\therefore$ (1) হইতে, $PN = \dfrac{b}{a} QN = \dfrac{b}{a} a\sin\phi = b\sin\phi$.

$\therefore$ উপবৃত্তের উপর অবস্থিত কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক

$$\mathbf{a\cos\phi,\ b\sin\phi.}$$

উপবৃত্তের সমীকরণ $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ হইলে, উহার সহায়ক বৃত্তের সমীকরণ $x^2 + y^2 = a^2$ হইবে।

$CN = a\cos\phi$ হইলে, PN এর মান, উপবৃত্তের সমীকরণে $x = a\cos\phi$ বসাইয়াও নির্ণয় করা যায়।

আবার, $PN : QN = b\sin\phi : a\sin\phi = b : a$.

3·15. (a cos ϕ, b sin ϕ) এবং (a cos ϕ', b sin ϕ') বিন্দুদ্বয়-সংযোজক জ্যা-এর সমীকরণ।

[*Equation of the chord joining the two points* ($a\cos\phi, b\sin\phi$) *and* ($a\cos\phi', b\sin\phi'$).]

জ্যা-টির সমীকরণ $\dfrac{y - b\sin\phi}{b(\sin\phi - \sin\phi')} = \dfrac{x - a\cos\phi}{a(\cos\phi - \cos\phi')}$.

সরলীকরণ দ্বারা সমীকরণটি হইবে,

$$\mathbf{\frac{x}{a}\cos\frac{\phi+\phi'}{2} + \frac{y}{b}\sin\frac{\phi+\phi'}{2} = \cos\frac{\phi-\phi'}{2}.}$$

3·16. (a cos ϕ, b sin ϕ) বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ।

[*Equation of the tangent and the normal of the point* ($a\cos\phi, b\sin\phi$).]

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শক ও অভিলম্বের সমীকরণ যথাক্রমে

$$\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1 \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

এবং $$\frac{x_1(y-y_1)}{a^2}=\frac{y_1(x-x_1)}{b^2} \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

(1)-এ x_1 এবং y_1 স্থলে যথাক্রমে $a\cos\phi$, $b\sin\phi$ বসাইলে, স্পর্শকের সমীকরণ হয়

$$\frac{\mathbf{x}}{\mathbf{a}}\cos\phi+\frac{\mathbf{y}}{\mathbf{b}}\sin\phi=1 \quad \cdots \quad \cdots \quad (3)$$

এবং অভিলম্বের সমীকরণ হয়

$$\frac{a\cos\phi\,(y-b\sin\phi)}{a^2}=\frac{b\sin\phi\,(x-a\cos\phi)}{b^2},$$

বা, $$\frac{y}{a}\cos\phi-\frac{b}{a}\sin\phi\cos\phi=\frac{x}{b}\sin\phi-\frac{a}{b}\sin\phi\cos\phi,$$

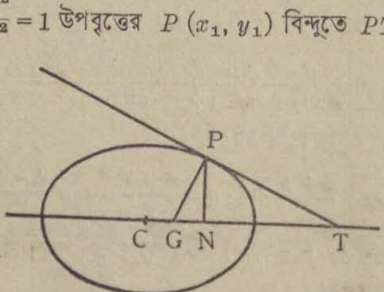
বা, $$\frac{x}{b}\sin\phi-\frac{y}{a}\cos\phi=\left(\frac{a}{b}-\frac{b}{a}\right)\sin\phi\cos\phi$$

$$=\frac{a^2-b^2}{ab}\sin\phi\cos\phi,$$

বা, $$\mathbf{ax\sec\phi-by\,cosec\,\phi=a^2-b^2.} \quad \cdots \quad (4)$$

3·17. উপ-স্পর্শক ও উপ-অভিলম্ব (subtangent and subnormal).

$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তের $P\,(x_1, y_1)$ বিন্দুতে PT স্পর্শক পরাক্ষকে



T বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে; PN, P বিন্দুর কোটি হইলে P বিন্দুতে উপ-স্পর্শক $=NT$.

এখন, P বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=1,$ ... (1)

পরাক্ষের সমীকরণ $y=0$ বলিয়া, (1)-এ $y=0$ বসাইলে দেখা যায়, T বিন্দুর ভুজ $CT=\frac{a^2}{x_1}$.

$$\therefore \text{ উপ-স্পর্শক } NT=CT-CN=\frac{a^2}{x_1}-x_1$$
$$=\frac{a^2}{x_1}\left(1-\frac{x_1^2}{a^2}\right)=\frac{\mathbf{a^2.y_1^2}}{\mathbf{b^2x_1}}.$$

আবার, $P\,(x_1,\,y_1)$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ

$$\frac{x-x_1}{\frac{x_1}{a^2}}=\frac{y-y_1}{\frac{y_1}{b^2}}.$$

অভিলম্বটি G বিন্দুতে পরাক্ষকে ছেদ করিলে, ঐ সমীকরণে $y=0$ বসাইয়া দেখা যায়, G এর ভুজ $CG=x_1-\frac{b^2x_1}{a^2}$.

$$\therefore \text{ উপ-অভিলম্ব } GN=CN-CG$$
$$=x_1-\left(x_1-\frac{b^2x_1}{a^2}\right)$$
$$=\frac{b^2x_1}{a^2}=\frac{a^2(1-e^2)x_1}{a^2}$$
$$=\mathbf{(1-e^2)x_1}.$$

3·18. বিবিধ উদাহরণ।

উদা. 1. Find the points of intersection of the straight line $y=x+2$ with the ellipse $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$, and find the length of the chord intercepted by the ellipse on the straight line.

সরলরেখার সমীকরণ হইতে y এর মান উপবৃত্তের সমীকরণে বসাইয়া, সমীকরণ দুইটিকে সহ-সমীকরণরূপে সমাধান করিলে, ছেদবিন্দুদ্বয়ের ভুজ-নির্ণায়ক

$$\frac{x^2}{9}+\frac{(x+2)^2}{4}=1, \text{ বা, } 13x^2+36x=0$$

দ্বিঘাত সমীকরণটি পাওয়া যায়। ইহার দুইটি বীজ 0 ও $-\frac{36}{13}$ বলিয়া ছেদ-বিন্দুদ্বয়ের ভুজ 0 ও $-\frac{36}{13}$.

ভুজ 0 হইলে, $y=x+2$ হইতে, কোটি $=2$,

এবং ভুজ $-\frac{36}{13}$ হইলে, $y=x+2$ হইতে, কোটি $=-\frac{36}{13}+2=-\frac{10}{13}$.

$\therefore$ ছেদবিন্দুদ্বয়ের স্থানাঙ্ক **(0, 2)** এবং **$(-\frac{36}{13}, -\frac{10}{13})$**.

$\therefore$ উপবৃত্ত দ্বারা সরলরেখার কর্তিতাংশের দৈর্ঘ্য

$$= \sqrt{(-\tfrac{36}{13}-0)^2+(-\tfrac{10}{13}-2)^2}=\tfrac{1}{13}\sqrt{2.(36)^2}$$
$$=\frac{36\sqrt{2}}{13}.$$

উদা. 2. Show that the straight line $x-3y+9=0$ touches the ellipse $6x^2+27y^2=162$ and find the co-ordinates of the point of contact.

সরলরেখার সমীকরণ হইতে $x=3y-9$ উপবৃত্তের সমীকরণে বসাইলে, উহাদের ছেদবিন্দুর কোটি-নির্ণায়ক

$$6(3y-9)^2+27y^2=162, \text{ বা, } 81y^2-324y+324=0,$$

বা, $y^2-4y+4=0$, বা, $(y-2)^2=0$ ... (1)

দ্বিঘাত সমীকরণটি পাওয়া যায়; এই দ্বিঘাত সমীকরণের বীজদ্বয় অভিন্ন বলিয়া, সরলরেখাটি উপবৃত্তটিকে পরস্পর মিলিত দুইটি বিন্দুতে ছেদ করে। অতএব, সরলরেখাটি উপবৃত্তটির স্পর্শক।

(1) হইতে স্পর্শকটির স্পর্শবিন্দুর কোটি $=2$, এবং $x=3y-9$ বলিয়া, ভুজ $=3.2-9=-3$.

$\therefore$ সরলরেখাটি উপবৃত্তের স্পর্শক এবং স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক **(−3, 2)**.

উদা. 3. For what value of m, the straight line $y=mx-5$ touches the ellipse $7x^2+8y^2=56$? Find the point of contact in each case.

উপবৃত্তটির সমীকরণের উভয় পক্ষকে 56 দ্বারা ভাগ করিয়া, উহাকে

$$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{7}=1$$

রূপে লিখিলে, দেখা যায় $a^2=8, b^2=7$.

$\therefore$ প্রদত্ত সরলরেখাটি ঐ উপবৃত্তের স্পর্শক হইলে,

$$5=\sqrt{a^2m^2+b^2}=\sqrt{8m^2+7};$$

$\therefore$ $25=8m^2+7$, বা, $8m^2=18$, বা, $m^2=\frac{9}{4}$;

$\therefore$ $m=\pm\frac{3}{2}$.

$m=\frac{3}{2}$ হইলে, স্পর্শবিন্দু হইবে $\left(\frac{a^2m}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}, \frac{-b^2}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}\right)$,

অর্থাৎ, $\left(\frac{8\times\frac{3}{2}}{\sqrt{8\times\frac{9}{4}+7}}, \frac{-7}{\sqrt{8\times\frac{9}{4}+7}}\right)$, অর্থাৎ, $\left(\frac{12}{5}, -\frac{7}{5}\right)$.

এইরূপে, $m=-\frac{3}{2}$ হইলে, স্পর্শবিন্দু হইবে $(-\frac{12}{5}, -\frac{7}{5})$.

উদা. 4. Find the equations of the tangent and the normal

(i) to the ellipse $3x^2+5y^2=120$ at the point $(5,-3)$;

(ii) to the ellipse $3x^2+4y^2=84$ at the point whose ordinate is -3;

(iii) to the ellipse $2x^2+3y^2=56$ at the points where the ordinate is double the abscissa;

(iv) to the ellipse $3x^2+4y^2=48$ at that extremity of the latera recta, that lies in the second quadrant.

(i) উভয় পক্ষকে 120 দ্বারা ভাগ করিলে, উপবৃত্তটির সমীকরণ হয়

$$\frac{x^2}{40}+\frac{y^2}{24}=1.$$

$\therefore$ নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ $\frac{5x}{40}+\frac{-3y}{24}=1$, বা, $\frac{x}{8}-\frac{y}{8}=1$,

বা, $\mathbf{x-y=8}$.

120 দ্বারা উভয় পক্ষকে ভাগ না করিয়া মূল সমীকরণেই x^2 স্থলে xx_1 এবং y^2 স্থলে yy_1 বসাইয়াও স্পর্শকের সমীকরণ পাওয়া যায়। এইরূপে, স্পর্শকের সমীকরণ

$$3x.5+5y.(-3)=120, \text{ বা, } x-y=8.$$

অভিলম্ব : উভয় পক্ষকে 120 দ্বারা ভাগ করিয়া দেখা যায়,

$$a^2=40 \text{ এবং } b^2=24.$$

$\therefore$ অভিলম্বের সমীকরণ $\dfrac{x-x_1}{\frac{x_1}{a^2}}=\dfrac{y-y_1}{\frac{y_1}{b^2}}$.

এস্থলে হইবে $\dfrac{x-5}{\frac{5}{40}} = \dfrac{y+3}{\frac{-3}{24}}$,

বা, $8(x-5) = -8(y+3)$, বা, $\mathbf{x+y=2.}$

(ii) প্রদত্ত সমীকরণে $y=-3$ বসাইলে, $3x^2+36=84$, বা, $3x^2=48$,

বা, x^2-16 ; $x=\pm 4$,

$\therefore$ -3 কোটি-যুক্ত দুইটি বিন্দু আছে ; তাহাদের স্থানাঙ্ক $(4, -3)$ এবং $(-4, -3)$.

স্পর্শক : $(4, -3)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $3x.4+4y(-3)=84$,

বা, $\mathbf{x-y=7.}$

$(-4, -3)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $3x(-4)+4y(-3)=84$,

বা, $\mathbf{x+y+7=0.}$

অভিলম্ব : উভয় পক্ষকে 84 দ্বারা ভাগ করিয়া উপবৃত্তটির সমীকরণ $\dfrac{x^2}{28}+\dfrac{y^2}{21}=1$ রূপে লিখিলে, দেখা যায় $a^2=28$ এবং $b^2=21$.

$\therefore$ $(4, -3)$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ $\dfrac{x-4}{\frac{4}{28}} = \dfrac{y+3}{\frac{-3}{21}}$,

বা, $7(x-4) = -7(y+3)$, বা, $\mathbf{x+y=1.}$

$(-4, -3)$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ $\dfrac{x+4}{\frac{-4}{28}} = \dfrac{y+3}{\frac{-3}{21}}$,

বা, $-7(x+4) = -7(y+3)$, বা, $\mathbf{x-y+1=0.}$

(iii) প্রদত্ত সমীকরণে $y=2x$ বসাইয়া, $2x^2+12x^2=56$, বা, $x^2=4$;
$\therefore$ $x=\pm 2$.

যখন $x=2$, $y=2.2=4$, এবং যখন $x=-2$, $y=2.(-2)=-4$.

$\therefore$ $(2, 4)$ এবং $(-2, -4)$ বিন্দুদ্বয়ে কোটি ভুজের দ্বিগুণ।

স্পর্শক : $(2, 4)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $2x.2+3y.4=56$,

বা, $\mathbf{x+3y=14.}$

$(-2, -4)$ বিন্দুতে স্পর্শকের সমীকরণ $2x(-2)+3y(-4)=56$,

বা, $\mathbf{x+3y+14=0.}$

অভিলম্ব : উভয় পক্ষকে 56 দ্বারা ভাগ করিয়া উপবৃত্তটির সমীকরণ $\frac{x^2}{28}+\frac{y^2}{\frac{56}{3}}=1$ রূপে লিখিলে দেখা যায় $a^2=28$ এবং $b^2=\frac{56}{3}$.

$\therefore$ (2, 4) বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ $\dfrac{x-2}{\frac{2}{28}}=\dfrac{y-4}{\frac{4.3}{56}}$,

বা, $14(x-2)=\frac{14}{3}(y-4)$, বা, $\mathbf{3x-y=2.}$

$(-2, -4)$ বিন্দুতে অভিলম্বের সমীকরণ $\dfrac{x+2}{\frac{-2}{28}}=\dfrac{y+4}{\frac{-4.3}{56}}$,

বা, $14(x+2)=\frac{14}{3}(y+4)$, বা, $\mathbf{3x-y+2=0.}$

(iv) প্রদত্ত সমীকরণের উভয় পক্ষকে 48 দ্বারা ভাগ করিয়া সমীকরণটিকে $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$ রূপে লিখিলে দেখা যায়,

$a^2=16$ এবং $b^2=12$; $\therefore$ $e=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1-\frac{12}{16}}=\frac{1}{2}$.

এখন, নাভি দুইটি $(ae, 0)$ এবং $(-ae, 0)$, অর্থাৎ, (2, 0) এবং $(-2, 0)$; এবং নাভিলম্বার্দ্ধ $=\frac{b^2}{a}=\frac{12}{4}=3.$

$\therefore$ নাভিলম্বের প্রান্তবিন্দু যেটি দ্বিতীয় পাদে অবস্থিত হইবে তাহার স্থানাঙ্ক $(-2, 3)$.

স্পর্শক : নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ $12x(-2)+16y.3=192$,

বা, $\mathbf{x-2y+8=0.}$

অভিলম্ব : নির্ণেয় অভিলম্বের সমীকরণ : $\dfrac{x+2}{\frac{-2}{16}}=\dfrac{y-3}{\frac{3}{12}}$,

বা, $-8(x+2)=4(y-3)$, বা, $\mathbf{2x+y+1=0.}$

উদা. 5. Find the equations of the tangents to the ellipse $3x^2+4y^2=16$ which are parallel to the straight line $3x-2y+5=0$.

$3x-2y+5=0$ সরলরেখার সমান্তরাল যে-কোন সরলরেখার সমীকরণ

$3x-2y+c=0$, বা, $2y=3x+c$, ... (1)

বা, $y=\frac{3}{2}x+\frac{c}{2}$.

এখন, উপবৃত্তের সমীকরণটির উভয় পক্ষকে 16 দ্বারা ভাগ করিয়া সমীকরণটিকে $\frac{x^2}{16/3}+\frac{y^2}{4}=1$ রূপে লিখিলে দেখা যায় $a^2=\frac{16}{3}$ এবং $b^2=4$.

$\therefore$ সরলরেখা (1) এর ঐ উপবৃত্তের স্পর্শক হইবার শর্ত হইল

$$\frac{c}{2}=\pm\sqrt{\frac{16}{3}\cdot\frac{9}{4}+4}=\pm 4;$$

$\therefore\ c=\pm 8.$

$\therefore$ উপবৃত্তটির দুইটি স্পর্শক প্রদত্ত সরলরেখার সমান্তরাল হইবে এবং (1) ও (2) হইতে ঐ স্পর্শকদ্বয়ের সমীকরণ

$$\mathbf{2y=3x+8} \text{ এবং } \mathbf{2y=3x-8.}$$

উদা. 6. Find the equations of the tangents to the ellipse $4x^2+5y^2=24$ which are perpendicular to the straight line $5x-2y+3=0$.

$5x-2y+3=0$ সরলরেখার লম্ব যে-কোন সরলরেখার সমীকরণ

$$2x+5y=5c, \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

বা, $y=-\frac{2}{5}x+c. \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$

এখন, উপবৃত্তটির সমীকরণের উভয় পক্ষকে 24 দ্বারা ভাগ করিয়া সমীকরণটিকে $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{24/5}=1$ রূপে লিখিলে দেখা যায়, $a^2=6$ এবং $b^2=\frac{24}{5}$.

$\therefore$ সরলরেখা (1) বা (2) এর ঐ উপবৃত্তের স্পর্শক হইবার শর্ত হইল

$$c=\pm\sqrt{6(-\tfrac{2}{5})^2+\tfrac{24}{5}}=\pm\tfrac{12}{5}. \quad \cdots \quad \cdots \quad (3)$$

$\therefore$ (1) ও (3) হইতে দেখা যায়, উপবৃত্তের দুইটি স্পর্শক প্রদত্ত সরলরেখার লম্ব হইবে, এবং এই দুইটি স্পর্শকের সমীকরণ

$$\mathbf{2x+5y=12} \text{ এবং } \mathbf{2x+5y+12=0.}$$

উদা. 7. Find the equations of the tangents to the ellipse $3x^2+5y^2=30$, which are inclined at an angle of 45° to the positive direction of the x-axis.

উপবৃত্তের সমীকরণের উভয় পক্ষকে 30 দ্বারা ভাগ করিয়া সমীকরণটিকে $\frac{x^2}{10}+\frac{y^2}{6}=1$ রূপে লিখিলে দেখা যায়,

$$a^2=10 \text{ এবং } b^2=6.$$

আবার, এস্থলে স্পর্শকের প্রবণতা $m=\tan 45°=1$.

$\therefore$ নির্ণেয় স্পর্শকের সমীকরণ $y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 + b^2}$

অর্থাৎ, $y = x \pm \sqrt{10+6} = x \pm 4.$

$\therefore$ প্রদত্ত শর্তানুগ দুইটি স্পর্শক থাকিবে এবং তাহাদের সমীকরণ $y = x + 4$ এবং $y = x - 4$,

অর্থাৎ, $\mathbf{x - y + 4 = 0}$, এবং $\mathbf{x = y + 4}$.

উদা. 8. Find the equations of the tangents, drawn from the point $(-2, -3)$, to the ellipse $2x^2 + 3y^2 = 5$, and find also the points of contact.

উপবৃত্তটির সমীকরণ $\dfrac{x^2}{\frac{5}{2}} + \dfrac{y^2}{\frac{5}{3}} = 1$ রূপে লিখিলে দেখা যায়, $a^2 = \frac{5}{2}$ এবং $b^2 = \frac{5}{3}$.

এখন m এর সকল বাস্তব মানের জন্যই $y = mx + \sqrt{\frac{5}{2}m^2 + \frac{5}{3}}$ ··· (1)
উপবৃত্তটির স্পর্শক। এই স্পর্শক $(-2, -3)$ বিন্দুগামী হইলে,

$$-3 = -2m + \sqrt{\tfrac{5}{2}m^2 + \tfrac{5}{3}}, \quad \text{বা,} \quad (2m-3)^2 = \tfrac{5}{2}m^2 + \tfrac{5}{3},$$

বা, $\frac{3}{2}m^2 - 12m + \frac{22}{3} = 0$, বা, $9m^2 - 72m + 44 = 0$;

$$\therefore \quad m = \frac{72 \pm \sqrt{(-72)^2 - 4.9.44}}{18} = \frac{72 \pm \sqrt{3600}}{18}$$

$$= \frac{72 \pm 60}{18} = \frac{22}{3}, \frac{2}{3} \qquad \cdots \quad (2)$$

$\therefore$ (1) এবং (2) হইতে $(-2, -3)$ বিন্দু হইতে উপবৃত্তে অঙ্কিত স্পর্শকদ্বয়ের সমীকরণ

$$y = \tfrac{22}{3}x + \sqrt{\tfrac{5}{2}.(\tfrac{22}{3})^2 + \tfrac{5}{3}} = \tfrac{22}{3}x + \tfrac{35}{3},$$

বা, $\mathbf{3y = 22x + 35.}$ ··· (3)

এবং $y = \frac{2}{3}x + \sqrt{\frac{5}{2}.(\frac{2}{3})^2 + \frac{5}{3}} = \frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$, বা, $\mathbf{3y = 2x + 5.}$ (4)

স্পর্শবিন্দুর স্থানাঙ্ক: সমীকরণ (3) এবং প্রদত্ত উপবৃত্তের সমীকরণ হইতে (3) এর স্পর্শবিন্দুর ভুজ-নির্ণায়ক $2x^2 + 3(\frac{22}{3}x + \frac{35}{3})^2 = 5$,

বা, $\frac{490}{3}x^2 + \frac{1540}{3}x + \frac{1210}{3} = 0$,

বা, $49x^2 + 154x + 121 = 0$, বা, $(7x + 11)^2 = 0$

সমীকরণটি পাওয়া যায়।

$\therefore \quad x = -\frac{11}{7}$; $\quad \therefore \ y = \frac{22}{3}.(-\frac{11}{7}) + \frac{35}{3} = \frac{1}{7}$.

$\therefore \quad 3y = 22x + 35$ স্পর্শকটির স্পর্শবিন্দু $(-\frac{11}{7}, \frac{1}{7})$.

এইরূপে, $3y = 2x + 5$ স্পর্শকটির স্পর্শবিন্দু $\mathbf{(-1, 1)}$.

বিকল্প পদ্ধতি ঃ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ উপবৃত্তে $y=mx+\sqrt{a^2m^2+b^2}$ স্পর্শকটির স্পর্শবিন্দু

$$\left(\frac{-a^2m}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}, \frac{b^2}{\sqrt{a^2m^2+b^2}}\right);$$

$\therefore$ স্পর্শক (3) এর স্পর্শবিন্দু $\left(\frac{-\frac{5}{2}\cdot\frac{22}{3}}{\sqrt{\frac{5}{2}\cdot(\frac{22}{3})^2+\frac{5}{3}}}, \frac{\frac{5}{3}}{\sqrt{\frac{5}{2}\cdot(\frac{22}{3})^2+\frac{5}{3}}}\right)$,

অর্থাৎ, $\left(-\frac{\frac{5}{2}\cdot\frac{22}{3}}{\frac{35}{3}}, \frac{\frac{5}{3}}{\frac{35}{3}}\right)$, অর্থাৎ, $(-\frac{11}{7}, \frac{1}{7})$;

এবং স্পর্শক (4) এর স্পর্শবিন্দু $\left(\frac{-\frac{5}{2}\cdot\frac{2}{3}}{\sqrt{\frac{5}{2}\cdot(\frac{2}{3})^2+\frac{5}{3}}}, \frac{\frac{5}{3}}{\sqrt{\frac{5}{3}\cdot(\frac{2}{3})^2+\frac{5}{3}}}\right)$,

অর্থাৎ, $\left(-\frac{\frac{5}{2}\cdot\frac{2}{3}}{\frac{5}{3}}, \frac{\frac{5}{3}}{\frac{5}{3}}\right)$ অর্থাৎ, $(-1, 1)$.

উদা. 9. Find the equation of the diameter of the ellipse $3x^2+5y^2=15$, which bisects all chords parallel to $3x-4y+4=0$.

উপবৃত্তটির সমীকরণের দুই পক্ষকে 15 দ্বারা ভাগ করিয়া,

$$\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{3}=1; \quad \therefore \quad a^2=5 \text{ এবং } b^2=3.$$

সরলরেখার সমীকরণ $4y=3x+4$, বা, $y=\frac{3}{4}x+1$ রূপে লিখিলে, দেখা যায় $m=\frac{3}{4}$.

$\therefore$ নির্ণেয় ব্যাসের সমীকরণ $y=m_1x$ হইলে,

$$mm_1=-\frac{b^2}{a^2}, \text{ বা, } \frac{3}{4}\cdot m_1=-\frac{3}{5}; \quad \therefore \quad m=-\frac{4}{5};$$

$\therefore$ নির্ণেয় ব্যাসের সমীকরণ $y=-\frac{4}{5}x$, বা, $\mathbf{5y+4x=0}$.

উদা. 10. Prove that $lx+my=n$ is

(i) tangent to $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, if $a^2l^2+b^2m^2=n^2$,

(ii) normal to $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, if $\frac{a^2}{l^2}+\frac{b^2}{m^2}=\frac{(a^2-b^2)^2}{n^2}$.

(i) যে-কোনও স্পর্শকের সমীকরণ $y=m_1x+\sqrt{a^2m_1^2+b^2}$.

$\therefore$ $lx+my=n$, বা, $y=-\frac{l}{m}x+\frac{n}{m}$ স্পর্শক হইলে $m_1=-\frac{l}{m}$,

এবং $\sqrt{a^2m_1^2+b^2}=\frac{n^2}{m^2}$; $\therefore$ $a^2\left(-\frac{l}{m}\right)^2+b^2=\frac{n^2}{m^2}$,

বা, $a^2l^2+b^2m^2=n^2$.

(ii) যে-কোন অভিলম্বের সমীকরণ $ax \sec\phi - by \operatorname{cosec}\phi = a^2 - b^2$.

$\therefore$ $lx + my = n$ অভিলম্ব হইলে,

$$\frac{l}{a \sec\phi} = \frac{m}{-b \operatorname{cosec}\phi} = \frac{n}{a^2 - b^2},$$

$$\therefore \quad \cos\phi = \frac{an}{l(a^2 - b^2)}, \ \sin\phi = \frac{-bn}{m(a^2 - b^2)},$$

$$\therefore \quad \frac{a^2n^2}{l^2(a^2 - b^2)^2} + \frac{b^2n^2}{m^2(a^2 - b^2)^2} = \cos^2\phi + \sin^2\phi = 1,$$

বা $\quad \dfrac{a^2}{l^2} + \dfrac{b^2}{m^2} = \dfrac{(a^2 - b^2)^2}{n^2}.$

উদা. 11. Find the equation of the diameter of the ellipse $3x^2 + 4y^2 = 36$, which is conjugate to the diameter $2y = 3x$.

উপবৃত্তটির সমীকরণের উভয় পক্ষকে 36 দ্বারা ভাগ করিলে, $\dfrac{x^2}{12} + \dfrac{y^2}{9} = 1$;

$\therefore$ এস্থলে, $a^2 = 12$ এবং $b^2 = 9$.

প্রদত্ত ব্যাসের সমীকরণ $2y = 3x$, বা, $y = \frac{3}{2}x$; $\therefore$ $m = \frac{3}{2}$.

$\therefore$ নির্ণেয় প্রতিযোগী ব্যাস $y = m_1x$ হইলে,

$$m_1 \times \tfrac{3}{2} = -\frac{b^2}{a^2} = -\tfrac{9}{12}; \quad \therefore \quad m_1 = -\tfrac{1}{2}.$$

$\therefore$ নির্ণেয় প্রতিযোগী ব্যাসের সমীকরণ $y = -\frac{1}{2}x$, বা, $\mathbf{x + 2y = 0}$.

উদা. 12. Show that, for the ellipse $5x^2 + 6y^2 = 15$, the two diameters having $3y + 2x = 0$ and $5x - 4y = 0$ for their equations are conjugate.

উপবৃত্তটির সমীকরণের উভয় পক্ষকে 15 দ্বারা ভাগ করিয়া উহাকে $\dfrac{x^2}{3} + \dfrac{y^2}{\frac{5}{2}} = 1$ রূপে লিখিলে, দেখা যায় $a^2 = 3$ এবং $b^2 = \frac{5}{2}$.

$$\therefore \quad -\frac{b^2}{a^2} = -\frac{\frac{5}{2}}{3} = -\tfrac{5}{6} \qquad \cdots \qquad \cdots \ (1)$$

আবার ব্যাসের সমীকরণ দুইটিকে যথাক্রমে $y = -\frac{2}{3}x$ এবং $y = \frac{5}{4}x$ রূপে লিখিলে দেখা যায় $m_1 = -\frac{2}{3}$ এবং $m_2 = \frac{5}{4}$.

$$\therefore \quad m_1 \times m_2 = -\frac{2}{3}\cdot\frac{5}{4} = -\frac{5}{6} = -\frac{b^2}{a^2}. \qquad [\text{(1) হইতে}]$$

$\therefore$ ব্যাস দুইটি পরস্পর প্রতিযোগী।

উদা. 13. For the ellipse $8x^2+12y^2=96$, find a pair of conjugate diameters which are inclined to each other at an angle $\tan^{-1} 7$. [C. U. 1949]

উপবৃত্তটির সমীকরণের উভয় পক্ষকে 96 দ্বারা ভাগ করিয়া উহাকে $\frac{x^2}{12}+\frac{y^2}{8}=1$ রূপে লিখিলে, দেখা যায় $a^2=12$ এবং $b^2=8$.

$\therefore$ প্রতিযোগী ব্যাসদ্বয় $y=m_1x$ এবং $y=m_2x$ হইলে,

$$m_1m_2=-\frac{b^2}{a^2}=-\frac{8}{12}=-\frac{2}{3},$$

বা, $3m_1m_2=-2$ ... ... (1)

আবার, ব্যাসদ্বয়ের অন্তর্ভুক্ত কোণ $\tan^{-1} 7$ বলিয়া,

$$7=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}=\frac{m_1-m_2}{1-\frac{2}{3}}=\frac{m_1-m_2}{\frac{1}{3}},$$

বা, $m_1-m_2=\frac{7}{3}$ ... ... (2)

(1) এবং (2) সমাধান করিয়া, $m_1=\frac{1}{3}$, $m_2=-2$ এবং $m_1=2$, $m_2=-\frac{1}{3}$;

$\therefore$ ব্যাসদ্বয়ের সমীকরণ $y=\frac{1}{3}x$, $y=-2x$ এবং $y=2x$, $y=-\frac{1}{3}x$;

বা, $\mathbf{x-3y=0,\ 2x+y=0}$ **এবং** $\mathbf{2x-y=0,\ x+3y=0.}$

উদা. 14. In the ellipse $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$, construct the equation of that particular chord, which is bisected at the point $(2, -1)$.

[C. U. B. A. & B. Sc., 1956]

নির্ণেয় জ্যা-টি $(2, -1)$ বিন্দুগামী বলিয়া ইহার সমীকরণ

$y+1=m(x-2)$ ... ... (1)

ধরা যায়। এখন, এই জ্যা এবং ইহার সমান্তরাল জ্যা-সমূহের মধ্যবিন্দুগামী ব্যাসের সমীকরণ

$$y=-\frac{b^2}{a^2m}x=-\frac{4}{9m}x.$$

$(2, -1)$ বিন্দুটিও এই ব্যাসের উপর অবস্থিত ;

$\therefore \quad -1=-\frac{4}{9m}\cdot 2$, বা, $m=\frac{8}{9}$.

$\therefore$ (1) হইতে, নির্ণেয় জ্যা-এর সমীকরণ $y+1=\frac{8}{9}(x-2)$,

বা, $\mathbf{8x-9y=25}$.

উদা. 15. Find the locus of the middle points of all chords of the ellipse $5x^2+6y^2=30$, which pass through the point $(3, -5)$.

উভয় পক্ষকে 30 দ্বারা ভাগ করিয়া উপবৃত্তটিকে $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{5}=1$ রূপে লেখা যায় ; অতএব, উপবৃত্তটির কোন জ্যা-এর মধ্যবিন্দু (x_1, y_1) হইলে, ইহার সমীকরণ হইবে $\frac{xx_1}{a^2}+\frac{yy_1}{b^2}=\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}$,

অর্থাৎ, এস্থলে, $\frac{xx_1}{6}+\frac{yy_1}{5}=\frac{x_1^2}{6}+\frac{y_1^2}{5}$.

জ্যা-টি $(3, -5)$ বিন্দুগামী হইলে,

$$\frac{3x_1}{6}+\frac{(-5)y_1}{5}=\frac{x_1^2}{6}+\frac{y_1^2}{5},$$

বা, $$\frac{x_1^2}{6}+\frac{y_1^2}{5}=\frac{x_1}{2}-y_1\,;$$

$\therefore$ মধ্যবিন্দু (x_1, y_1) এর সঞ্চারপথ $\mathbf{\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{5}=\frac{x}{2}-y}$.

প্রশ্নমালা 5

1. Find the points of intersection of the straight line

(i) $x+y-4=0$ with the ellipse $3x^2+5y^2=32$;

(ii) $4x+5y=20$ with the ellipse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$;

(iii) $3x-7y+25=0$ with the ellipse $3x^2+7y^2=115$.

Find in every case, the length of the chord which the ellipse intercepts on the corresponding straight line.

2. Show that the straight line

(i) $2y=x+5$ touches the ellipse $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$;

(ii) $3x+5y=25$ touches the ellipse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$;

(iii) $3x-2y+10=0$ touches the ellipse $7x^2+8y^2=56$.

Find, in each case, the point of contact.

3. Show that the straight line $y = x + \sqrt{\frac{5}{6}}$ is a tangent to the ellipse $2x^2 + 3y^2 = 1$. [C. U. B. A. & B. Sc., 1955]

Find the point of contact.

4. For what values of m will the straight line $4y = mx + 8$ touch the ellipse $15x^2 + 16y^2 = 40$? Find the point of contact in each case.

5. The ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ is touched by the straight line $5y = 3x + 25$, and its eccentricity is $\frac{3}{5}$. Find a and b.

[Gauhati, 1948]

6. Find the equation of the tangent to

(*a*) the ellipse $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$, at the point (4, 0),

(*b*) the ellipse $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$, at the point (0, 4),

(*c*) $\frac{x^2}{18} + \frac{y^2}{8} = 1$, at the point (3, 2).

7. Find the equations of the tangent and the normal to

(i) the ellipse $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$, at the point $\left(\frac{15}{7}, -\frac{4}{7}\right)$;

(ii) the ellipse $3x^2 + 5y^2 = 17$ at the point (2, 1) ;

(iii) the ellipse $5x^2 + 9y^2 = 81$ at the point (3, −2).

8. Find the equations of the tangents to the ellipse

(i) $x^2 + 3y^2 = 3$, which are parallel to the straight line $y = 4x - 3$;

(ii) $9x^2 + 32y^2 = 96$, which are parallel to the straight line $3x - 4y = 8$.

Find, in each case, the point of contact.

9. Find the equations of the tangents to the ellipse

(i) $2x^2 + 3y^2 = 8$, which are perpendicular to the straight line $6x + 5y + 4 = 0$;

(ii) $3x^2 + 5y^2 = 32$, which are perpendicular to the straight line $5x + 3y + 1 = 0$.

10. Find the equations of the tangents to the ellipse $2x^2+3y^2=18$, which make an angle of 60° with the positive direction of the axis of x.

11. Find the equations of the tangents drawn from the point (3, 6) to the ellipse $4x^2+9y^2=72$ and find the points of contact.

Prove that $5x-2y=8\sqrt{2}$ is a normal to the ellipse $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$.

12. Find the equation of the diameter of the ellipse $3x^2+4y^2=1$, which bisects all chords parallel to $y=3x-1$.

13. Find the equation of the diameter of the ellipse $5x^2+6y^2=30$, which bisects all chords parallel to $5x+6y+8=0$.

14. Find the equation of the diameter of the ellipse $2x^2+3y^2=24$ which is conjugate to $2x+3y=0$.

15. Show that the diameters $5y-6x=0$ and $2x+3y=0$ are conjugate diameters of the ellipse $4x^2+5y^2=20$.

16. Show that the diameters whose equations are $y+3x=0$ and $4y-x=0$ are conjugate diameters of the ellipse $3x^2+4y^2=5$.

17. Show that the straight lines $4x-3y+4=0$ and $x+3y-7=0$ are parallel to the conjugate diameters of the ellipse $4x^2+9y^2=36$. [C. U. B. A. & B. Sc., 1949]

18. For the ellipse, $3x^2+4y^2=12$, find a pair of conjugate diameters which are inclined to the other at an angle $\tan^{-1} 13$.

19. For the ellipse, determine the pair of conjugate diameters which are inclined to each other at an angle of 135°.

[C. U. B. A. & B. Sc., 1958]

20. In the ellipse $\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{6}=1$, construct the equation of that particular chord, which is bisected at the point $(2, -1)$.

21. In the ellipse, $3x^2+4y^2=36$, construct the equation of that particular chord, which is bisected at the point $(3, -1)$.

22. If any tangent to the ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ intercepts lengths h, k on the axes, prove that $\frac{a^2}{h^2}+\frac{b^2}{k^2}=1$. [C. U. B. A. & B. Sc., 1951]

23. The sum of the squares of the perpendiculars on any tangent from two points on the minor axis, each distant $\sqrt{a^2-b^2}$ from the centre is $2a^2$. [C. U. B. A. & B. Sc., 1953]

24. The distance of a point on the ellipse $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{2}=1$ from the centre is 2, find the eccentric angle.

[C. U. B. A. & B. Sc., 1918]

25. Find the eccentric angle of a point on the ellipse $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=2$ at a distance 3 from the centre.

[C. U. B. A. & B. Sc., 1921]

26. The ordinate of a point P on an ellipse whose centre is O and semi-minor axis is b is produced to meet the auxiliary circle at Q. The parallel to OQ through P meets the major axis in G; then will $PG=b$. [C. U. B. A. & B. Sc., 1942]

27. Prove that $\frac{ax}{3}+\frac{by}{4}=c$ is a normal to $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, if $5c=a^2e^2$.

চতুর্থ অধ্যায়

পরাবৃত্ত

(Hyperbola)

4·1. পরাবৃত্ত।

কনিকের উৎকেন্দ্রতা (e) এক অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে, কনিককে **পরাবৃত্ত** (Hyperbola) বলা হয়, অর্থাৎ,

কোন সমতলের উপর অবস্থিত একটি নির্দ্দিষ্ট স্থির বিন্দু এবং একটি নির্দ্দিষ্ট ও স্থির সরলরেখা হইতে ঐ সমতলের উপর গতিশীল কোন বিন্দুর দূরত্বদ্বয়ের অনুপাত ধ্রুবক কিন্তু এক অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে, গতিশীল বিন্দুটির সঞ্চারপথকে **পরাবৃত্ত** বলে।

নির্দ্দিষ্ট বিন্দুটিকে ঐ পরাবৃত্তের **নাভি** (Focus), নির্দ্দিষ্ট সরলরেখাকে উহার **নিয়ামক** (Directrix) এবং দূরত্বদ্বয়ের ধ্রুবক অনুপাতকে ঐ পরাবৃত্তের **উৎকেন্দ্রতা** (Eccentricity) বলা হয়।

সাধারণতঃ নাভিকে S দ্বারা এবং উৎকেন্দ্রতাকে e দ্বারা সূচিত করা হয়।

নাভিবিন্দুগামী এবং নিয়ামকের উপর লম্ব-সরলরেখা এবং পরাবৃত্তের ছেদবিন্দুকে ঐ পরাবৃত্তের **শীর্ষবিন্দু** (Vertex) বলে।

নাভিবিন্দুগামী এবং নিয়ামকের সমান্তরাল জ্যা-কে পরাবৃত্তের **নাভিলম্ব** (Latus rectum) বলে।

4·2. পরাবৃত্তের সমীকরণ।

[*Equation of a hyperbola*]

S পরাবৃত্তটির নাভি এবং ZK উহার নিয়ামক। S হইতে নিয়ামকের উপর SZ লম্ব টানিয়া S এর দিকে বর্দ্ধিত করা হইল ; ইহা হইল অক্ষ।

SZ এর উপর এরূপ একটি বিন্দু A নির্ণয় করা যায়, অর্থাৎ SZ কে এরূপে অন্তর্বিভক্ত করা যায় যে,

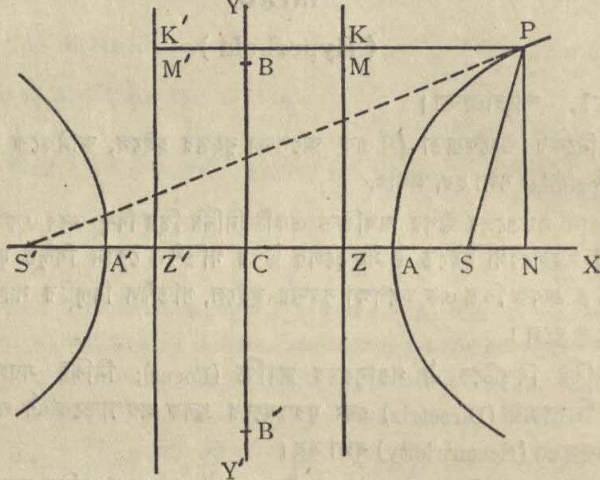
$$SA = e.\ AZ \quad \cdots \quad \cdots \quad (1)$$

আবার, $e > 1$ বলিয়া, বর্দ্ধিত SZ এর উপর এরূপ একটি বিন্দু A' নির্ণয় করা যায় যে,

$$SA' = e.\ A'Z \quad \cdots \quad \cdots \quad (2)$$

মনে কর, $AA' = 2a$, এবং C, AA' এর মধ্যবিন্দু।

[A ও A' পরাবৃত্তের শীর্ষবিন্দু এবং C পরাবৃত্তের কেন্দ্র (centre).]



(1) এবং (2) যোগ করিয়া,

$$SA + SA' = e(AZ + A'Z),$$

বা, $SA + (SA + AA') = e.AA'$,

বা, $2SA + 2AC = e.2AC$,

বা, $2(SA + AC) = 2.ae$,

বা, $CS = ae$. ... ... (3)

আবার, (2) হইতে (1) বিয়োগ করিয়া,

$$SA' - SA = e(A'Z - AZ),$$

বা, $AA' = e\{A'C + CZ) - (CA - CZ)\}$
$= e.2CZ$, ($\because A'C = CA$)

বা, $2a = 2e.CZ$; $\therefore CZ = \dfrac{a}{e}$. ... (4)

এখন, কেন্দ্র C কে মূলবিন্দু, বর্দ্ধিত CS কে x-অক্ষ এবং C বিন্দু দিয়া অঙ্কিত AA' এর লম্বরেখাকে y-অক্ষ ধর এবং মনে কর, পরাবৃত্তের উপর অবস্থিত

যে-কোন বিন্দু P এর স্থানাঙ্ক (x, y). P বিন্দু হইতে নিয়ামকের উপর PM লম্ব এবং CS, অর্থাৎ x-অক্ষের উপর PN লম্ব টান।

$CS = ae$ বলিয়া, নাভি S এর স্থানাঙ্ক $(ae, 0)$,

এখন, $SP^2 = (e.PM)^2 = (e.ZN)^2 = e^2 ZN^2 = e^2 (CN - CZ)^2$;

$\therefore \ (x-ae)^2 + y^2 = e^2 \left(x - \dfrac{a}{e}\right)^2$, [(4) হইতে]

বা, $x^2 - 2aex + a^2e^2 + y^2 = e^2x^2 - 2aex + a^2$,

বা, $(e^2-1)x^2 - y^2 = a^2 (e^2-1)$,

বা, $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{a^2(e^2-1)} = 1.$ ... (5)

ইহাই পরাবৃত্তের সমীকরণ।

এখন, $e > 1$ বলিয়া $e^2 > 1$;

$\therefore \ e^2 - 1$, সুতরাং, $a^2 (e^2-1)$ একটি ধনাত্মক রাশি।

মনে কর, $a^2 (e^2 - 1) = b^2$;

তাহা হইলে, (5) হইতে পরাবৃত্তের সমীকরণ হইল $\mathbf{\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1.}$

অনুসিদ্ধান্ত 1. $\mathbf{a^2(e^2-1) = b^2}$, বা $a^2e^2 = a^2 + b^2$,

বা, $e^2 = \dfrac{a^2+b^2}{a^2} = 1 + \dfrac{b^2}{a^2}$; $\therefore \ e = \sqrt{1 + \mathbf{\dfrac{b^2}{a^2}}}$.

অনুসিদ্ধান্ত 2. $a^2 (e^2-1) = b^2$, বা, $a^2e^2 = a^2 + b^2$,

বা, $(ae)^2 = a^2 + b^2$, অর্থাৎ, $\mathbf{CS^2 = a^2 + b^2}$,

এবং $b^2 = CS^2 - a^2$, বা, $\mathbf{b^2 = CS^2 - CA^2}$.

অনুসিদ্ধান্ত 3. পরাবৃত্তের সমীকরণ হইতে,

$$\frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1 = \frac{x^2 - a^2}{a^2} = \frac{(x-a)(x+a)}{a^2};$$

$$\therefore \ \frac{PN^2}{b^2} = \frac{AN.A'N}{a^2}, \text{ বা, } \mathbf{\frac{PN^2}{AN.A'N} = \frac{b^2}{a^2}}.$$

অনুসিদ্ধান্ত 4. A বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(a, 0)$,

A' বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(-a, 0)$,

S বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(ae, 0)$,

নিয়ামক ZK এর সমীকরণ $x = \dfrac{a}{e}$.

4·3. সংজ্ঞা।

শীর্ষদ্বয় সংযোজক এবং শীর্ষদ্বয়ের মধ্যে সীমাবদ্ধ $A'A$ সরলরেখাকে পরাবৃত্তের **তির্য্যক্ অক্ষ** (Transverse axis) বলে। যদি পরাবৃত্তের কেন্দ্র দিয়া অঙ্কিত তির্য্যক্ অক্ষের লম্ব-সরলরেখার উপর B ও B' এরূপ দুইটি বিন্দু হয় যে, $B'C = CB = b$, তাহা হইলে BB' কে পরাবৃত্তের **অনুবন্ধী** (Conjugate) অক্ষ বলা হয়।

তির্য্যক্ অক্ষ $AA' = 2a$, এবং অনুবন্ধী অক্ষ $BB' = 2b$.

পরাবৃত্তের তির্য্যক্ এবং অনুবন্ধী অক্ষ সাধারণতঃ অসমান থাকে। তির্য্যক্ অক্ষ ও অনুবন্ধী অক্ষ সমান হইলে পরাবৃত্তকে ইংরেজীতে Equilateral বা Rectangular বলা হয়, আর বাংলায় উহাকে বলা যাইতে পারে **সমাক্ষ পরাবৃত্ত** বা **সম পরাবৃত্ত**।

সমাক্ষ পরাবৃত্তে $2a = 2b$, বা, $a = b$.

$\therefore$ সমাক্ষ পরাবৃত্তের সমীকরণ $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{a^2} = 1$, বা, $\mathbf{x^2 - y^2 = a^2}$.

ইহার উৎকেন্দ্রতা $e = \sqrt{1 + \dfrac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1 + \dfrac{a^2}{a^2}} = \sqrt{2}$.

4·4. পরাবৃত্তের দ্বিতীয় নাভি ও দ্বিতীয় নিয়ামক।

C বিন্দুর যে পার্শ্বে S বিন্দু অবস্থিত তাহার বিপরীত পার্শ্বে বর্দ্ধিত তির্য্যক্ অক্ষের উপর S' বিন্দু লও, যেন $CS = CS'$ হয়, এবং C বিন্দুর যে পার্শ্বে Z বিন্দু অবস্থিত তাহার বিপরীত পার্শ্বে তির্য্যক্ অক্ষের উপর Z' বিন্দু লও, যেন $CZ = CZ'$ হয় ; Z' বিন্দু দিয়া তির্য্যক্ অক্ষের লম্ব বা নিয়ামকের সমান্তরাল করিয়া $Z'K'$ সরলরেখা টানা হইল। [পৃষ্ঠা 122 এর চিত্র দ্রষ্টব্য]

তাহা হইলে, $CS' = SC = ae$. $\therefore$ S' বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(-ae, 0)$;

এবং $CZ' = ZC = \dfrac{a}{e}$,

পরাবৃত্তের উপর অবস্থিত যে-কোন বিন্দু $P\ (x, y)$ হইতে $Z'K'$ এর উপর PM' লম্ব টানা হইল।

$\therefore$ $S'P^2 = (x + ae)^2 + y^2$, এবং $PM' = NZ' = CN + CZ' = x + \dfrac{a}{e}$.

এখন পরাবৃত্তের সমীকরণ $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{a^2(e^2 - 1)} = 1$,

বা, $x^2(e^2-1)-y^2=a^2(e^2-1)$,

বা, $x^2+a^2e^2+y^2=e^2x^2+a^2$,

বা, $(x^2+2aex+a^2e^2)+y^2=e^2x^2+2aex+a^2$,

বা, $(x+ae)^2+y^2=e^2\left(x^2+\dfrac{2ax}{e}+\dfrac{a^2}{e^2}\right)=e^2\left(x+\dfrac{a}{e}\right)^2$,

বা, $S'N^2+PN^2=e^2(ZC'+CN)^2$,

বা, $S'P^2=e^2.PM'^2$, বা, $S'P=e.PM'$,

বা, $\dfrac{S'P}{PM'}=e$.

দেখা গেল, S' বিন্দু হইতে পরাবৃত্তের উপর অবস্থিত যে-কোন বিন্দুর দূরত্ব এবং $Z'K'$ রেখা হইতে ইহার দূরত্বের অনুপাত পরাবৃত্তের উৎকেন্দ্রতা e এর সমান ; অতএব, S' বিন্দুকে নাভি এবং $Z'K'$ রেখাকে নিয়ামক ধরিলেও একই পরাবৃত্ত পাওয়া যাইবে। অতএব, দেখা গেল পরাবৃত্তের সর্ব্বদাই একটি দ্বিতীয় নাভি এবং একটি দ্বিতীয় নিয়ামক থাকে।

অনুসিদ্ধান্ত। S' বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(-ae, 0)$, এবং দ্বিতীয় নিয়ামক $Z'K'$ এর সমীকরণ $x=-\dfrac{a}{e}$.

4·5. পরাবৃত্তের আকার।

পরাবৃত্তের সমীকরণ $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ হইতে দেখা যায়,

$$y=\pm b\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1} \qquad \cdots \qquad \cdots \quad (1)$$

এবং

$$x=\pm a\sqrt{\frac{y^2}{b^2}+1} \qquad \cdots \qquad \cdots \quad (2)$$

ইহা হইতে পরাবৃত্তের আকার-নির্ণায়ক নিম্নলিখিত তথ্যগুলি পাওয়া যায়ঃ

(i) (1) হইতে, $x^2<a^2$, অর্থাৎ $x<a$, অথবা, $>-a$ হইলে, x^2/a^2, 1 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হয় এবং মূলচিহ্নের নীচে ঋণাত্মক চিহ্ন আসিয়া যায় বলিয়া, x এর ঐ সকল মানের জন্য y অবাস্তব হয় ; সুতরাং, a অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর এবং $-a$ অপেক্ষা বৃহত্তর ভুজ-বিশিষ্ট কোন বিন্দুই পরাবৃত্তের উপর থাকিবে না ; অতএব, A ও A' বিন্দুদ্বয়ের মধ্যে পরাবৃত্তের কোন অংশই থাকিবে না।

(ii) (1) হইতে দেখা যায়, $x^2=a^2$, অর্থাৎ $x=a$, অথবা, $-a$ হইলে, $y=0$ হয় ; অতএব, পরাবৃত্তটি x-অক্ষকে A' ও A বিন্দুদ্বয়ে ছেদ করে।

(1) হইতে আরও দেখা যায়, $x^2>a^2$, অর্থাৎ, $x>a$, অথবা, $x<-a$ এইরূপ x এর সকল মানের জন্যই y এর পরস্পর সমান কিন্তু বিপরীত চিহ্ন-বিশিষ্ট দুইটি করিয়া মান থাকে ; অতএব, পরাবৃত্তটি x-অক্ষে প্রতিসম এবং A বিন্দু হইতে আরম্ভ করিয়া x-অক্ষের ধনাত্মক দিকে, ইহার উভয় পার্শ্বে অসীম পর্য্যন্ত বিস্তৃত এবং A' বিন্দু হইতে আরম্ভ করিয়া x-অক্ষের ঋণাত্মক দিকে, ইহার উভয় পার্শ্বে অসীম পর্য্যন্ত বিস্তৃত।

(iii) (2) হইতে দেখা যায়, y এর ধনাত্মক বা ঋণাত্মক সকল মানের জন্যই x এর পরস্পর সমান, কিন্তু বিপরীত চিহ্ন-বিশিষ্ট দুইটি করিয়া মান থাকে ; অতএব, পরাবৃত্তটি y-অক্ষে প্রতিসম।

এই সকল তথ্য হইতে এই সিদ্ধান্তে উপনীত হওয়া যায় যে, পরাবৃত্ত, অনু. 4·2 এর চিত্রের ন্যায় A ও A' বিন্দুগামী, x এবং y উভয় অক্ষে প্রতিসম, x অক্ষের ধনাত্মক এবং ঋণাত্মক উভয়দিকে অসীম পর্য্যন্ত বিস্তৃত দুইটি সন্তত রেখা।

4·6. নাভিদ্বয় হইতে পরাবৃত্তের উপর অবস্থিত যে-কোন বিন্দুর দূরত্বদ্বয়ের অন্তর তির্য্যক্ অক্ষের সমান।

[*The difference of the focal distances of any point on a hyperbola is equal to the transverse axis.*]

পরাবৃত্তের উপর অবস্থিত যে-কোন বিন্দু P এর স্থানাঙ্ক (x, y).

অনু. 4·2 এর চিত্র হইতে,

$$SP=e.PM \text{ এবং } S'P=e.PM' ;$$

$$\therefore \quad S'P-SP=e(PM'-PM)=e.MM'=e.ZZ'$$

$$=e.2CZ=e.2.\frac{a}{e}=2a= \text{তির্য্যক্ অক্ষ।}$$

বিশেষ দ্রষ্টব্য। নাভি হইতে পরাবৃত্তের উপর অবস্থিত যে-কোন বিন্দুর দূরত্ব ঃ

$$SP=e.PM=e.NZ=e(CN-CZ)=e\left(x-\frac{a}{e}\right)$$

$$=ex-a ;$$

$$S'P = e.PM' = e.NZ' = e(CN + CZ') = e\left(x + \frac{a}{e}\right)$$

$$= \mathbf{ex + a.}$$

4·7. পরাবৃত্তের নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য।

S ও S' নাভিদ্বয় দিয়া অঙ্কিত তির্য্যক্ অক্ষের লম্ব LSL' ও L_1SL_1' জ্যা-দ্বয় পরাবৃত্তের দুইটি নাভিলম্ব।

এখন, L বিন্দুর স্থানাঙ্ক (CS, SL), অর্থাৎ (ae, SL). L বিন্দু পরাবৃত্তের উপর অবস্থিত বলিয়া,

$$\frac{a^2e^2}{a^2} - \frac{SL^2}{b^2} = 1,$$

বা, $SL^2 = b^2(e^2 - 1) = b^2\left(1 + \frac{b^2}{a^2} - 1\right)$

$$= \frac{b^4}{a^2};$$

$\therefore \quad SL = \frac{b^2}{a}$; এইরূপে, $SL' = \frac{b^2}{a}$.

$$\therefore \quad \mathbf{LSL' = \frac{2b^2}{a}}.$$

একই পদ্ধতিতে দেখানো যায় $L_1S'L_1' = \frac{2b^2}{a}$.

দ্রষ্টব্য। নাভিলম্বের সমীকরণ $\mathbf{x = ae,\ x = -ae.}$

4·8. পরাবৃত্ত-সংশ্লিষ্ট কতিপয় অবশ্য-জ্ঞাতব্য তথ্য।

নিম্নে পরাবৃত্ত-সংক্রান্ত কতিপয় অবশ্য-জ্ঞাতব্য সূত্র এবং অন্যান্য তথ্য লিপিবদ্ধ হইল। উপবৃত্তের সমীকরণে b^2 স্থলে $-b^2$ লিখিয়া পরাবৃত্তের সমীকরণ পাওয়া যায়। পরাবৃত্তের নিম্নপ্রদত্ত বিভিন্ন সূত্র, সমীকরণ এবং ফলসমূহও উপবৃত্তের অনুরূপ সূত্র, সমীকরণ এবং ফলসমূহে a^2 স্থলে $-b^2$ লিখিয়া পাওয়া যায়। প্রমাণ সর্ব্বতোভাবে উপবৃত্তের প্রমাণ-পদ্ধতির অনুরূপ বিধায় এস্থলে কেবলমাত্র ফলগুলি লিপিবদ্ধ হইল। প্রতিক্ষেত্রে শিক্ষার্থিগণকে স্বকৃত প্রমাণ দ্বারা ফলের সত্যতা স্থির করিতে হইবে।

1. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ পরাবৃত্ত-সম্পর্কে যে-কোন বিন্দু (x_1, y_1) এর অবস্থান।

বিন্দুটির পরাবৃত্তের ভিতরে থাকে, যদি $\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}>1$ হয়;

বিন্দুটি পরাবৃত্তের উপর থাকে, যদি $\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}=1$ হয়;

বিন্দুটি পরাবৃত্তের বাহিরে থাকে, যদি $\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}<1$ হয়।

উপবৃত্তের অনুরূপ ফলের সহিত পার্থক্য দ্রষ্টব্য।

2. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ পরাবৃত্তের সহিত $y=mx+c$ সরলরেখার ছেদ।

সরলরেখাটি পরাবৃত্তকে দুইটি বাস্তব এবং পৃথক্ বিন্দুতে ছেদ করে,
যদি $c^2>a^2m^2-b^2$ হয়, অর্থাৎ, যদি $c>\sqrt{a^2m^2-b^2}$ অথবা, $<-\sqrt{a^2m^2-b^2}$ হয়।

সরলরেখাটি পরাবৃত্তকে দুইটি পরস্পর মিলিত বিন্দুতে ছেদ করে,
যদি $c^2=a^2m^2-b^2$ হয়, অর্থাৎ, যদি $c=\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$ হয়।

সরলরেখাটি পরাবৃত্তকে দুইটি অবাস্তব বিন্দুতে ছেদ করে, অর্থাৎ, আদৌ ছেদ করে না,

যদি $c^2<a^2m^2-b^2$ হয়, অর্থাৎ,

যদি $-\sqrt{a^2m^2-b^2}<c<\sqrt{a^2m^2-b^2}$ হয়।

3. $y=mx+c$ সরলরেখার $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ পরাবৃত্তের স্পর্শক হইবার শর্ত।

$$c=\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}.$$

4. m এর সকল মানের জন্যই $y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$ সরলরেখা $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ পরাবৃত্তের স্পর্শক।

$y=mx+\sqrt{a^2m^2-b^2}$ এর স্পর্শবিন্দু $\left(\frac{-a^2m}{\sqrt{a^2m^2-b^2}}, \frac{-b^2}{\sqrt{a^2m^2-b^2}}\right)$;

$y=mx-\sqrt{a^2m^2-b^2}$ এর স্পর্শবিন্দু $\left(\frac{a^2m}{\sqrt{a^2m^2-b^2}}, \frac{b^2}{\sqrt{a^2m^2-b^2}}\right)$.

5. $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ **পরাবৃত্তের (x_1, y_1) বিন্দুতে স্পর্শক এবং অভিলম্বের সমীকরণ।**

স্পর্শক ঃ $\frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}=1.$

অভিলম্ব ঃ $\frac{x-x_1}{\frac{x_1}{a^2}}=\frac{y-y_1}{-\frac{y_1}{b^2}}.$

6. নিয়ামক বৃত্ত (Director Circle)।

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ পরাবৃত্তের দুইটি পরস্পর লম্ব-স্পর্শকের ছেদবিন্দুর সঞ্চারপথ $x^2+y^2=a^2-b^2$.

ইহা মূলবিন্দুতে কেন্দ্র এবং $\sqrt{a^2-b^2}$ ব্যাসার্দ্ধ-বিশিষ্ট একটি বৃত্ত।

প্রশ্ন। Interpret the cases when $b^2 \lesseqgtr a^2$.

7. ব্যাস (Diameter)।

ব্যাস বা $y=mx+c$ রেখার সমান্তরাল পরাবৃত্তের একদল জ্যা-এর মধ্যবিন্দুসমূহের সঞ্চারপথ ঃ $y=\frac{b^2}{a^2m}x.$

দ্রষ্টব্য। $y=mx+c$ এর সমান্তরাল জ্যা-সমূহকে সমদ্বিখণ্ডনকারী ব্যাসের সমীকরণ $y=m_1x$ হইলে,

$$mm_1=\frac{b^2}{a^2}.$$

8. প্রতিযোগী বা অনুবন্ধী ব্যাস (Conjugate Diameter)।

$y=mx$ এবং $y=m_1x$ ব্যাস দুইটির প্রতিযোগী হইবার শর্ত ঃ $mm_1=\frac{b^2}{a^2}.$

9. (x_1, y_1) বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত জ্যা-এর সমীকরণ ঃ

$$\frac{xx_1}{a^2}-\frac{yy_1}{b^2}=\frac{x_1^2}{a^2}-\frac{y_1^2}{b^2}.$$

10. পরাবৃত্তের উপর অবস্থিত বিন্দুর স্থানাঙ্ক একটিমাত্র চলরাশি-দ্বারা প্রকাশ।

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ পরাবৃত্তের উপর অবস্থিত যে-কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক $(a \sec \theta, b \tan \theta)$.

$(a \sec \theta, b \tan \theta)$ বিন্দুতে স্পর্শক : $\frac{x}{a} \sec \theta - \frac{y}{b} \tan \theta = 1.$

4·9. অনুবন্ধী পরাবৃত্ত।

কোন পরাবৃত্তের তির্য্যক্ অক্ষ এবং অনুবন্ধী অক্ষ যথাক্রমে অন্য একটি পরাবৃত্তের অনুবন্ধী অক্ষ ও তির্য্যক্ অক্ষ হইলে, দ্বিতীয় পরাবৃত্তটিকে প্রথমটির **অনুবন্ধী** (Conjugate) পরাবৃত্ত বলে।

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ পরাবৃত্তের অনুবন্ধী পরাবৃত্তের সমীকরণ $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1.$

4·10. কোন পরাবৃত্তের দুইটি পরস্পর অনুবন্ধী ব্যাস ঐ পরাবৃত্তের অনুবন্ধী পরাবৃত্তেও পরস্পর অনুবন্ধী।

[*A pair of conjugate diameters of a hyperbola are also conjugate with respect to its conjugate hyperbola.*]

$y=m_1x$ এবং $y=m_2x$ ব্যাস দুইটি $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ পরাবৃত্তে অনুবন্ধী ;

$$\therefore \quad m_1m_2=\frac{b^2}{a^2}. \qquad \cdots \quad (1)$$

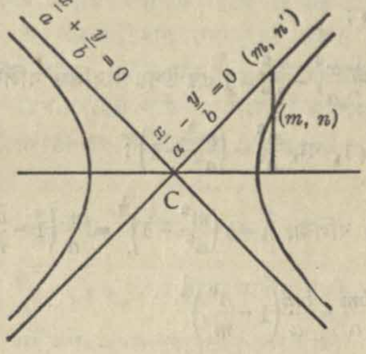
আবার, ঐ পরাবৃত্তে a^2 স্থলে $-a^2$ এবং b^2 স্থলে $-b^2$ লিখিয়া উহার অনুবন্ধী পরাবৃত্তে $\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1$ পাওয়া যায় ; অতএব, ঐ ব্যাস দুইটির এই অনুবন্ধী পরাবৃত্তে পরস্পর অনুবন্ধী হইবার শর্ত্ত

$$m_1m_2=\frac{-b^2}{-a^2}=\frac{b^2}{a^2}.$$

(1) হইতে দেখা যায় এই শর্ত্ত সিদ্ধ হইয়াছে। $\therefore$ ব্যাস দুইটি অনুবন্ধী পরাবৃত্তে পরস্পর অনুবন্ধী।

4·11. অসীমপথ (Asymptotes)।

পরাবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ হইতে সুস্পষ্ট যে, ঐ পরাবৃত্তের উপর অবস্থিত কোন বিন্দু (x, y) এর



সকল অবস্থানের জন্যই $\frac{x^2}{a^2} > \frac{y^2}{b^2}$. ··· (1)

এখন, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ দ্বারা $\frac{x}{a}-\frac{y}{b}=0$ এবং $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=0$ কেন্দ্রগামী সরল-রেখা-যুগ্ম সূচিত হয়। স্পষ্টই, এই সরলরেখা-যুগ্মের উপর অবস্থিত কোন কোন বিন্দু (x, y) এর সকল অবস্থানের জন্যই

$$\frac{x^2}{a^2}=\frac{y^2}{b^2}. \quad \cdots \quad (2)$$

এখন, পরাবৃত্তের উপর অবস্থিত m ভুজবিশিষ্ট কোন বিন্দুর কোটি, মনে কর, n ;

এবং সরলরেখা-যুগ্মের উপর অবস্থিত m ভুজবিশিষ্ট কোন বিন্দুর কোটি, মনে কর, n'.

(1) হইতে, $\frac{m^2}{a^2} > \frac{n^2}{b^2}$;

(2) হইতে, $\frac{m^2}{a^2}=\frac{n'^2}{b^2}$.

$\therefore\ n'^2 > n^2$; ··· (3)

এখন, মনে করা যাক পূর্ব্বপৃষ্ঠায় অঙ্কিত চিত্রের ন্যায়, m, n, n' ধনাত্মক। তাহা হইলে, (3) হইতে, $n' > n$, এবং (m, n') বিন্দুটি $\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = 0$ এর উপর অবস্থিত হইবে ;

$$\therefore \quad n' = \frac{b}{a} m ;$$

এবং (m, n) বিন্দু $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ এর উপর অবস্থিত বলিয়া,

$$\frac{m^2}{a^2} - \frac{n^2}{b^2} = 1, \text{ বা, } \frac{n^2}{b^2} = \left(\frac{m^2}{a^2} - 1\right);$$

$$\therefore \quad n \text{ ধনাত্মক বলিয়া, } n = b\left(\frac{m^2}{a^2} - 1\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{bm}{a}\left(1 - \frac{a^2}{m^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$\therefore \quad n' - n = \frac{bm}{a} - \frac{bm}{a}\left(1 - \frac{a^2}{m^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{bm}{a}\left\{1 - \left(1 - \frac{a^2}{m^2}\right)^{\frac{1}{2}}\right\}$$

$$= \frac{bm}{a}\left\{1 - \left(1 - \frac{1}{2}\frac{a^2}{m^2} - \frac{1}{8}\frac{a^4}{m^4} - \frac{1}{16}\frac{a^6}{m^6} - \cdots\right)\right\}$$

[$m > a$ ধরিয়া, $(1 - a^2/m^2)^{\frac{1}{2}}$ কে দ্বিপদ উপপাদ্য-সাহায্যে, একটি অভিসারী অসীম শ্রেণীতে সম্প্রসারিত করিয়া]

$$= \frac{ab}{2m} + \frac{a^3 b}{8m^3} + \cdots\cdots, \text{ (একটি অভিসারী অসীম শ্রেণী)।}$$

এখন, $m \to \infty$ হইলে, স্পষ্টই $(n' - n) \to 0$.

অনুরূপ পদ্ধতিতে প্রমাণ করা যায় যে,

(m, n) বিন্দুটি পরাবৃত্তের চতুর্থ পাদে অবস্থিত শাখায় অবস্থিত হইলে
$m \to \infty$ হইলে, $(n' - n) \to 0$;

(m, n) বিন্দুটি পরাবৃত্তের দ্বিতীয় পাদে অবস্থিত শাখায় অবস্থিত হইলে,
$m \to -\infty$ হইলে, $(n' - n) \to 0$;

এবং (m, n) বিন্দুটি পরাবৃত্তের তৃতীয় পাদে অবস্থিত শাখায় অবস্থিত হইলেও
$m \to -\infty$ হইলে, $(n' - n) \to 0$.

দেখা যাইতেছে, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$ দ্বারা সূচিত সরলরেখাদ্বয় সসীম স্থানাঙ্ক-যুক্ত কোন বিন্দুতেই পরাবৃত্তটিকে ছেদ করে না ; কিন্তু x-অক্ষ বরাবর m এর ক্রমবর্দ্ধমান মানের জন্য সরলরেখা-যুগ্ম ক্রমেই পরাবৃত্তটির নিকটবর্ত্তী হয় এবং x-অক্ষ বরাবর ইহার ঋণাত্মক দিকে m এর ক্রমবর্দ্ধমান মানসমূহের জন্য, অর্থাৎ, m এর ক্রম-ক্ষীয়মাণ মানসমূহের জন্যও সরলরেখা-যুগ্ম ক্রমেই পরাবৃত্তটির নিকটবর্ত্তী হয়। কোন রেখা (curve) এর ক্ষেত্রে, এইরূপ গুণবিশিষ্ট সরলরেখা বা সরলরেখাসমূহের অস্তিত্ব থাকিলে, উক্ত সরলরেখা বা সরলরেখা-সমূহকে ঐ রেখা (curve)-এর **অসীমপথ** (Asymptote) বলা হয়। বর্ত্তমান ক্ষেত্রে,

$$\frac{\mathbf{x}^2}{\mathbf{a}^2}-\frac{\mathbf{y}^2}{\mathbf{b}^2}=\mathbf{0}, \text{ অর্থাৎ, } \mathbf{y}=\pm\frac{\mathbf{b}}{\mathbf{a}}\mathbf{x}.$$

সরলরেখা-যুগ্ম $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ পরাবৃত্তের অসীম পথ।

দ্রষ্টব্য। (i) অসীমপথ-যুগল পরাবৃত্তের কেন্দ্রগামী ;

(ii) অসীমপথ-যুগলের প্রবণতা $(m)=\pm\frac{b}{a}$;

$$\therefore \quad m^2=\frac{b^2}{a^2}.$$

অনুসিদ্ধান্ত। পরাবৃত্ত এবং তাহার অনুবন্ধী পরাবৃত্তের অসীমপথ একই।

4·12. সমাক্ষ পরাবৃত্ত বা সম পরাবৃত্ত।

সমাক্ষ বা সম পরাবৃত্ত (Rectangular or equilateral hyperbola)-এর সংজ্ঞা পূর্ব্বে অনু. 4·3 এ বিবৃত হইয়াছে। দেখা গিয়াছে, ইহার সমীকরণ $x^2-y^2=a^2$, এবং উৎকেন্দ্রতা $\sqrt{2}$.

$x^2-y^2=a^2$ সমাক্ষ পরাবৃত্তের অসীমপথের সমীকরণ

$$x^2-y^2=0 \text{ বা } y=\pm x.$$

এই সমীকরণ, $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ এর অসীমপথ $y=\pm\frac{b}{a}x$-এ $b=a$ বসাইয়াও পাওয়া যায়।

সমাক্ষ পরাবৃত্তের অসীমপথ-যুগলের প্রবণতার গুণফল $=1\times(-1)=-1$ বলিয়া ঐ অসীমপথ-যুগল পরস্পর লম্ব।

4·13. বিবিধ উদাহরণ।

উদা. 1. Find the equation of the hyperbola, referred to its axes as axes of co-ordinates,

(i) whose transverse and conjugate axes are respectively 8 and 6 ;

(ii) whose conjugate axis is 12 and the distance between whose foci is 20 ;

(iii) which passes through the points (2, 1) and (3, −2).

(i) এস্থলে, $2a=8$ এবং $2b=6$; $\therefore\ a=4$ এবং $b=3$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$ বা $\mathbf{9x^2-16y^2=144}$.

(ii) এস্থলে, $2b=12$; $\therefore\ b=6$;

এবং নাভিদ্বয়ের দূরত্ব $=2ae=20$; $\therefore\ ae=10$.

এখন, $b^2=a^2(e^2-1)=a^2e^2-a^2$;

$\therefore\ 36=100-a^2$; $\therefore\ a^2=100-36=64$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ $\frac{x^2}{64}-\frac{y^2}{36}=1$ বা $36x^2-64y^2=64\times 36$,

বা $\mathbf{9x^2-16y^2=576}$.

(iii) মনে কর, পরাবৃত্তটির সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$.

পরাবৃত্তটি (2, 1) এবং (3, −2) বিন্দুদ্বয়গামী বলিয়া,

$$\left.\begin{aligned}&\frac{4}{a^2}-\frac{1}{b^2}=1\\ \text{এবং}\quad &\frac{9}{a^2}-\frac{4}{b^2}=1\end{aligned}\right\}$$

সমীকরণ দুইটি সমাধান করিয়া, $a^2=\frac{7}{3}$, $b^2=\frac{7}{5}$.

$\therefore$ নির্ণেয় সমীকরণ $\frac{x^2}{\frac{7}{3}}-\frac{y^2}{\frac{7}{5}}=1$,

বা, $\mathbf{3x^2-5y^2=7}$.

উদা. 2. Find the equation of the hyperbola, referred to its axes as axes of co-ordinates.

(i) whose one of the foci is $(2\sqrt{15}, 0)$ and the eccentricity $\sqrt{\frac{5}{3}}$;

(ii) which passes through the point $(5, -3)$ and has the eccentricity $\frac{2\sqrt{10}}{5}$.

(i) এস্থলে, $e = \sqrt{\frac{5}{3}}$ এবং $ae = 2\sqrt{15}$;

$\therefore \quad a = \frac{2\sqrt{15}}{\sqrt{\frac{5}{3}}} = 6; \quad \therefore \quad a^2 = 36 \qquad \cdots \quad (1)$

এবং $\quad b^2 = a^2(e^2 - 1) = 36(\frac{5}{3} - 1) = 36.\frac{2}{3} = 24. \qquad \cdots \quad (2)$

$\therefore$ (1) এবং (2) হইতে, পরাবৃত্তের সমীকরণ $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{24} = 1$,

বা, $\mathbf{2x^2 - 3y^2 = 72.}$

(ii) মনে কর, পরাবৃত্তটির সমীকরণ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \qquad \cdots \quad (1)$

পরাবৃত্তটি $(5, -3)$ বিন্দুগামী বলিয়া, $\frac{25}{a^2} - \frac{9}{b^2} = 1 \qquad \cdots \quad (2)$

আবার, $e = \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}} = \frac{2\sqrt{10}}{5}$;

$\therefore 1 + \frac{b^2}{a^2} = \left(\frac{2\sqrt{10}}{5}\right)^2 = \frac{8}{5}$,

বা, $\quad \frac{b^2}{a^2} = \frac{3}{5}$ বা $b^2 = \frac{3}{5}a^2 \qquad \cdots \quad (3)$

(2) এবং (3) হইতে, $\frac{25}{a^2} - \frac{9}{\frac{3}{5}a^2} = 1$, বা, $a^2 = 25 - 15 = 10$,

এবং (3) হইতে, $b^2 = \frac{3}{5}a^2 = \frac{3}{5}.10 = 6$,

$\therefore$ (1) হইতে নির্ণেয় সমীকরণ $\frac{x^2}{10} - \frac{y^2}{6} = 1$,

বা, $\mathbf{3x^2 - 5y^2 = 30.}$

উদা. 3. Find the equation of the hyperbola having the point $(-2, 3)$ as focus, 5 as eccentricity and the line $3x - 4y - 5 = 0$ as directrix.

মনে কর, পরাবৃত্তের উপর অবস্থিত যে-কোন বিন্দুর স্থানাঙ্ক (x, y).

নাভি হইতে এই বিন্দুর দূরত্ব $= \sqrt{(x+2)^2+(y-3)^2}$
$= \sqrt{x^2+y^2+4x-6y+13}.$

নিয়ামক হইতে (x, y) বিন্দুর দূরত্ব $= \dfrac{3x-4y-5}{\sqrt{3^2+4^2}} = \dfrac{3x-4y-5}{5}$;

$\therefore$ পরাবৃত্তের উপর (x, y) বিন্দুর সকল অবস্থানের জন্য নাভি হইতে (x, y) বিন্দুর দূরত্ব $= e$. [নিয়ামক হইতে (x, y) বিন্দুর দূরত্ব] বলিয়া, নির্ণেয় পরাবৃত্তের সমীকরণ

$$\sqrt{x^2+y^2+4x-6y+13} = 5 \times \frac{3x-4y-5}{5} = 3x-4y-5,$$

বা, উভয় পক্ষ বর্গ করিয়া, $x^2+y^2+4x-6y+13 = (3x-4y-5)^2$
$= 9x^2+16y^2+25-24xy-30x+40y,$

বা, $\mathbf{8x^2+15y^2-24xy-34x+46y+12=0.}$

উদা. 4. Find the latus rectum, eccentricity, the co-ordinates of the foci and the equations for the directrices of the hyperbola $x^2-4y^2=16$.

পরাবৃত্তের সমীকরণ $x^2-4y^2=16$, বা, $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{4}=1$;

$\therefore$ এস্থলে, $a^2=16$; $\therefore$ $a=4$; এবং $b^2=4$.

$\therefore$ নাভিলম্বের দৈর্ঘ্য $= \dfrac{2b^2}{a} = \dfrac{2.4}{4} = \mathbf{2.}$

উৎকেন্দ্রতা $e = \sqrt{1+\dfrac{b^2}{a^2}} = \sqrt{1+\dfrac{4}{16}} = \mathbf{\dfrac{2\sqrt{5}}{4}}$

নাভির স্থানাঙ্ক $(\pm ae, 0)$, অর্থাৎ, $\left(\pm 4\cdot\dfrac{2\sqrt{5}}{4}, 0\right)$

অর্থাৎ, $\mathbf{(\pm 2\sqrt{5}, 0)}$.

নিয়ামকের সমীকরণ $x = \pm\dfrac{a}{e} = \pm\dfrac{4}{\frac{2\sqrt{5}}{4}} = \pm\dfrac{8}{\sqrt{5}} = \pm\mathbf{\dfrac{8\sqrt{5}}{5}}.$

উদা. 5. Find the (i) transverse axis, (ii) conjugate axis, (iii) eccentricity, (iv) co-ordinates of the centre, (v) co-ordinates of the foci and (vi) the equations of the directrices of the hyperbola $4x^2-9y^2-16x-54y-101=0$.

প্রদত্ত পরাবৃত্তের সমীকরণ $4x^2-9y^2-16x-54y-101=0$,

বা, $(4x^2-16x+16)-(9y^2+54y+81)=36$,

বা, $(2x-4)^2-(3y+9)^2=36$,

বা, $4(x-2)^2-9(y+3)^2=36$,

বা, $\frac{(x-2)^2}{9}-\frac{(y+3)^2}{4}=1$.

পরাবৃত্তের সমীকরণ হইতে, স্পষ্টই $a=3$, $b=2$;

$\therefore$ (i) তির্য্যক অক্ষ $=2a=6$; (ii) অনুবন্ধী অক্ষ $=2b=4$;

(iii) উৎকেন্দ্রতা $e=\sqrt{1+\frac{b^2}{a^2}}=\sqrt{1+\frac{4}{9}}=\frac{\sqrt{13}}{3}$.

(iv) তির্য্যক অক্ষের সমীকরণ $y+3=0$,

এবং অনুবন্ধী অক্ষের সমীকরণ $x-2=0$;

কেন্দ্র এই দুই অক্ষের ছেদবিন্দু বলিয়া, উহার স্থানাঙ্ক $(2, -3)$

(v) নাভিদ্বয় বর্দ্ধিত তির্য্যক্ অক্ষের উপর কেন্দ্রের উভয় পার্শ্বে অবস্থিত, এবং কেন্দ্র হইত উহাদের দূরত্ব $ae=3\cdot\frac{\sqrt{13}}{3}=\sqrt{13}$.

এখন, তির্য্যক্ অক্ষের উপর অবস্থিত বলিয়া নাভিদ্বয়ের উভয়েরই কোটি -3 ;

আর একটির ভুজ $2+\sqrt{13}$ এবং অপরটির ভুজ $2-\sqrt{13}$.

$\therefore$ নাভিদ্বয়ের স্থানাঙ্ক $(2+\sqrt{13}, -3)$ এবং $(2-\sqrt{13}, -3)$.

(iv) নিয়ামকদ্বয় অনুবন্ধী অক্ষের সমান্তরাল, অর্থাৎ, উহারা $x-2=0$, অর্থাৎ, $x=2$ রেখার সমান্তরাল। আবার, উহারা অনুবন্ধী অক্ষের উভয় পার্শ্বে অবস্থিত এবং এই কক্ষ হইতে উহাদের দূরত্ব কেন্দ্র হইতে উহাদের দূরত্বের সমান। অতএব,

$$\frac{a}{e}=\frac{3}{\sqrt{13}/3}=\frac{9}{\sqrt{13}}=\frac{9\sqrt{13}}{13};$$

$\therefore$ নিয়ামকদ্বয়ের সমীকরণ

$$x=2+\frac{9\sqrt{13}}{13}, \text{ অর্থাৎ, } \mathbf{13x=26+9\sqrt{13}},$$

এবং $$x=2-\frac{9\sqrt{13}}{13}, \text{ অর্থাৎ, } \mathbf{13x=26-9\sqrt{13}}.$$

উদা. 6. Find the points of intersection of the straight line $2x+5y=4$ with the hyperbola $4x^2-5y^2=16$.

সরলরেখার সমীকরণ $2x=-5y+4$; ... ... (1)

$\therefore$ বর্গ করিয়া, $4x^2=(-5y+4)^2$.

পরাবৃত্তের সমীকরণে, $4x^2$ এর এই মান বসাইয়া,

$$(-5y+4)^2-5y^2=16 \text{ বা } 20y^2-40y=0,$$

বা, $y^2-2y=0$, বা, $y(y-2)=0$;

$\therefore$ $y=0, 2$.

$y=0$ হইলে, (1) হইতে, $2x=-5.0+4=4$;

$\therefore$ $x=2$;

$y=2$ হইলে, (1) হইতে, $2x=-5.2+4=-6$;

$\therefore$ $x=-3$.

$\therefore$ নির্ণেয় ছেদবিন্দুর স্থানাঙ্ক **(2, 0)** এবং **(−3, 2).**

উদা. 7. Show that the straight line $3x-4y+2=0$ touches the hyperbola $x^2-2y^2=4$ and find the point of contact.

সরলরেখার সমীকরণ হইতে $x=\dfrac{4y-2}{3}$ ... ... (1)

পরাবৃত্তের সমীকরণে বসাইলে, সরলরেখা ও পরাবৃত্তের ছেদবিন্দুর কোটি-নির্ণায়ক যে,

$$\left(\frac{4y-2}{3}\right)^2-2y^2=4, \text{ বা, } -2y^2-16y-32=0,$$

বা, $y^2+8y+16=0$, বা, $(y+4)^2=0$ ... ... (2)
দ্বিঘাত সমীকরণটি পাওয়া যায়, তাহার বীজদ্বয় অভিন্ন, দুইটিই -4 বলিয়া, সরলরেখাটি পরাবৃত্তটিকে স্পর্শ করিবে।

(2) হইতে দেখা যায়, স্পর্শবিন্দুর কোটি $y=-4$;

$\therefore$ (1) এ y এর এই মান বসাইয়া, $x=\dfrac{4.(-4)-2}{3}=-6$.

$\therefore$ নির্ণেয় স্পর্শবিন্দু **(−6, 2).**

উদা. 8. Find the equations of the tangent and the normal to the hyperbola $3x^2-8y^2=16$ at the point $(4, -2)$.

স্পর্শকের সমীকরণ, $3x.4 - 8y(-2) = 16$,

বা, $\mathbf{3x + 4y = 4}$,

এই সমীকরণ হইতে দেখা যায় স্পর্শকের প্রবণতা $(m) = -\frac{3}{4}$.

$\therefore$ অভিলম্বের প্রবণতা হইবে $\frac{4}{3}$,

[$\because$ অভিলম্বের প্রবণতা $\times (-\frac{3}{4}) = -1$.]

$\therefore$ অভিলম্বের সমীকরণ, $(y+2) = \frac{4}{3}(x-4)$.

বা, $\mathbf{4x - 3y = 22}$.

$\dfrac{x - x_1}{\frac{x_1}{a^2}} = \dfrac{y - y_1}{-\frac{y_1}{b^2}}$ এ (x_1, y_1) এর পরিবর্তে প্রদত্ত বিন্দুটির স্থানাঙ্ক বসাইয়াও অভিলম্বের সমীকরণ পাওয়া যায়।

উদা. 9. Find the equations of the tangents to the hyperbola $4x^2 - 9y^2 = 36$ which are parallel to the straight line

$$5x - 6y + 8 = 0.$$

পরাবৃত্তের সমীকরণের উভয় পক্ষকে 36 দ্বারা ভাগ করিলে,

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1\ ;$$

$\therefore\ a^2 = 9,\ b^2 = 4.$

প্রদত্ত সরলরেখার সমীকরণ $6y = 5x + 8$, বা, $y = \frac{5}{6}x + \frac{4}{3}$;

$\therefore$ উহার সমান্তরাল যে-কোন সরলরেখার সমীকরণ

$$y = \frac{5}{6}x + c. \qquad \cdots \qquad \cdots \quad (1)$$

ইহাতে $m = \frac{5}{6}$.

এই সরলরেখা, পরাবৃত্তটির স্পর্শক হইলে,

$$c^2 = a^2m^2 - b^2 = 9\,.\,(\tfrac{5}{6})^2 - 4 = \frac{9.25}{46} - 4 = \tfrac{25}{4} - 4 = \tfrac{9}{4}.$$

$\therefore\ c = \pm\frac{3}{2}.$

$\therefore$ প্রদত্ত সরলরেখার সমান্তরাল স্পর্শকের সমীকরণ

$y = \frac{5}{6}x + \frac{3}{2}$ এবং $y = \frac{5}{6}x - \frac{3}{2}$,

বা, $\mathbf{5x - 6y + 9 = 0}$ এবং $\mathbf{5x - 6y - 9 = 0}$.

উদা. 10. Find the equation of the diameter of the hyperbola $4x^2 - 5y^2 = 60$ which bisects all chords parallel to $3x - 5y + 8 = 0$.

উভয় পক্ষকে 60 দ্বারা ভাগ করিয়া প্রদত্ত পরাবৃত্তের সমীকরণ

$$\frac{x^2}{15}-\frac{y^2}{12}=1$$

রূপে লিখিলে দেখা যায়, $a^2=15$ এবং $b^2=12$.

আর, সরলরেখার সমীকরণ $y=\frac{3}{5}x+\frac{8}{5}$ রূপে লিখিলে দেখা যায় $m=\frac{3}{5}$.

∴ প্রদত্ত সরলরেখার সমান্তরাল জ্যা-সমূহ সমদ্বিখণ্ডনকারী ব্যাসের সমীকরণ

$$y=\frac{b^2}{a^2m}x=\frac{12}{15\,.\,\frac{3}{5}}x=\frac{4}{3}x,$$

বা, $\mathbf{4x-3y=0.}$

উদা. 11. Show that the diameters $3x-7y=0$ and $3y=4x$ are conjugate with respect to the hyperbola $4x^2-7y^2=28$.

উভয় পক্ষকে 28 দ্বারা ভাগ করিয়া প্রদত্ত পরাবৃত্তের সমীকরণ

$$\frac{x^2}{7}-\frac{y^2}{4}=1$$

রূপে লিখিলে দেখা যায় $a^2=7, b^2=4$.

আর, ব্যাস দুইটির প্রবণতা $m=\frac{3}{7}$ এবং $m_1=\frac{4}{3}$.

এখন, $mm_1=\frac{3}{7}\times\frac{4}{3}=\frac{4}{7}=\frac{b^2}{a^2}$,

∴ ব্যাস দুইটি পরস্পর অনুবন্ধী।

উদা. 12. Find the equation of the chord of the hyperbola $3x^2-4y^2=36$, which is bisected at the point (6, 1).

পরাবৃত্তের সমীকরণের উভর পক্ষকে 36 দ্বারা ভাগ করিয়া, উহাকে

$$\frac{x^2}{12}-\frac{y^2}{9}=1$$

রূপে লিখিলে দেখা যায়, $a^2=12, b^2=9$.

এখন, মনে কর, জ্যা-টি (6, 1) বিন্দুতে সমদ্বিখণ্ডিত, অতএব, (6, 1) বিন্দুগামী নির্ণেয় জ্যা-এর সমীকরণ

$$y-1=m(x-6) \qquad \cdots \qquad \cdots \quad (1)$$

এই জ্যা-এর মধ্যবিন্দু, অর্থাৎ, (6, 1) বিন্দুগামী ব্যাসের সমীকরণ $y=\frac{b^2}{a^2m}x=\frac{9}{12m}x=\frac{3}{4m}x$;

এই ব্যাস (6, 1) বিন্দুগামী বলিয়া, $1=\frac{3}{4.m}\cdot 6$,

বা, $m=\frac{9}{2}$.

$\therefore$ (1) হইতে, নির্ণেয় জ্যা-এর সমীকরণ

$y-1=\frac{9}{2}(x-6)$, বা, $\mathbf{9x-2y=52}$.

প্রশ্নমালা 6

1. Find the equation of the hyperbola, referred to its axes as the axes of co-ordinates,

(i) where transverse and conjugate axes are respectively 6 and 5 ;

(ii) whose conjugate axis is 2 and the distance between whose foci is $2\sqrt{5}$;

(iii) which passes through the points $(-2, 1)$ and $(3, -\sqrt{5})$;

(iv) whose one of the foci is $(-6\sqrt{2}, 0)$ and the eccentricity $\frac{3\sqrt{2}}{4}$;

(v) whose transverse axis is 8 and whose eccentricity is $\frac{5}{4}$;

(vi) which passes through the point $(4, \frac{7}{3})$ and has the eccentricity $\frac{4}{3}$;

(vii) whose conjugate axis is 5 and which passes through the point $(5, \frac{10}{3})$;

(viii) whose latus rectum is $\frac{9}{4}$ and whose eccentricity is $\frac{5}{4}$;

(ix) whose transverse axis is 4 and whose vertex bisects the distance between the centre and the focus.

2. Find the eccentricity, the length of the latus rectum, the co-ordinates of the foci and the equations of the directrices for the hyperbola

(i) $x^2-4y^2=16$; (ii) $5x^2-4y^2=20$;

(iii) $11x^2-25y^2=275$.

3. Find the (i) transverse axis, (ii) conjugate axis, (iii) eccentricity, (iv) co-ordinates of the centre, (v) co-ordinates of the foci and (vi) the equations of the directrices of the hyperbola $9x^2 - 16y^2 - 18x - 64y = 631$.

4. The hyperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ passes through the point of intersection of the line $2x - 3y + 2 = 0$ and $5x - 2y = 28$ and its latus rectum is 6 ; find a and b.

5. For what value of A does the hyperbola $Ax^2 - 5y^2 = 4$ pass through the points $(\pm 2, 0)$?

Find (i) the length of the latus rectum, (ii) the length of the two axes, and (iii) the eccentricity of the hyperbola.

6. Find the equation of the hyperbola, with reference to its axes as axes of co-ordinates, which meets the straight line $6x - 5y = 3$ on the axis of x and whose eccentricity is $\frac{3}{2}$.

7. Find the co-ordinates of the points of intersection of the hyperbola $2x^2 - 3y^2 = 5$ and the straight line $2x + 3y = 1$. What is the position of the middle point of the chord intercepted by the hyperbola on the straight line ?

8. Find the equation of the hyperbola having one of its foci at the point $(3, -4)$, $\frac{10}{8}$ as eccentricity and the straight line $6x = 8y + 5$ as the directrix.

9. Show that the straight line

(i) $2x - 3y + 6 = 0$ touches the hyperbola $2x^2 - 9y^2 = 36$;

(ii) $3x - 8y = 2$ touches the hyperbola $5x^2 - 36y^2 = 180$.

Find the point of contact in each case.

10. For what value or values of m will the straight line $5y = mx - 9$ touch the hyperbola $7x^2 - 16y^2 = 112$.

11. The straight line $4x - 3y + 9 = 0$ touches the hyperbola $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ whose eccentricity is $\frac{4}{5}$. Find a and b.

12. Find the equation of the tangent and the normal to

(i) the hyperbola $5x^2 - 8y^2 = 40$ at the point $(4, -5)$;

(ii) the hyperbola $3x^2 - 4y^2 = 48$ at the point $(-4, -3)$.

13. Find the equation of the tangents to the hyperbola

(*a*) $x^2 - 9y^2 = 9$, which are parallel to the straight line $5x - 9y + 8 = 0$;

(*b*) $8x^2 - 9y^2 = 72$, which are perpendicular to the straight line $2x + 3y + 8 = 0$;

(*c*) $5x^2 - 7y^2 = 35$, which make an angle of 60° with the positive direction of the axis of x.

14. Show that the straight line $10x + 3y = 0$ bisects all chords of the hyperbola $5x^2 - 8y^2 = 40$, which are parallel to the straight line $3x + 16y + 8 = 0$.

15. Show that the straight lines $7x - 8y = 0$ and $4x - 5y = 0$ are conjugate diameters with respect to the hyperbola $7x^2 - 10y^2 = 70$.

16. For the hyperbola $16x^2 - 9y^2 = 144$, find the equation of the diameter which is conjugate to the diameter whose equation is $x = 2y$. [C. U. B. A. & B. Sc., 1946]

17. Find the equation of the chord of the hyperbola $4x^2 - 5y^2 = 60$ which is bisected at the point $(5, 3)$.

18. Find the equations of the asymptotes of the hyperbolas

(i) $4x^2 - 9y^2 = 36$; (ii) $x^2 - y^2 = 25$.

উত্তরমালা

বীজগণিত

প্রশ্নমালা 1

1. (1) বাস্তব, অমূলদ এবং অসমান। (2) কাল্পনিক এবং অসমান।
(3) বাস্তব, মূলদ এবং অসমান। (4) বাস্তব ও সমান।
(5) বাস্তব, অমূলদ এবং অসমান। (6) কাল্পনিক ও অসমান।
(7) বাস্তব, মূলদ এবং অসমান। (8) বাস্তব ও অমূলদ এবং অসমান।

3. ± 12. 4. 8. 5. 0, 3.

প্রশ্নমালা 2

1. (i) $\frac{b^4 - 4ab^2c + 2a^2c^2}{a^4}$; (ii) $\frac{(2abc - b^3)\sqrt{b^2 - 4ac}}{a^4}$;

(iii) $\frac{-b(b^4 - 5ab^2c + 5a^2c^2)}{a^5}$;

(iv) $\frac{(b^4 - 3ab^2c + a^2c^2)\sqrt{b^2 - 4ac}}{a^5}$;

(v) $\frac{(b^2 - 2ac)b^4 - (4ab^2c + a^2c^2)}{a^6}$;

(vi) $\frac{b(ac - b^2)(b^2 - 3ac)\sqrt{b^2 - 4ac}}{a^6}$; (vii) $-\frac{bc}{a^2}$;

(viii) $\frac{c(b^2 - 2ac)}{a^3}$; (ix) $\frac{bc(3ac - b^2)}{a^4}$;

(x) $\frac{c(b^4 - 4ab^2c + 2a^2c^2)}{a^5}$; (xi) $\frac{bc^4}{a^7}(3ac - b^2)$;

(xii) $\frac{b^4 - 4ab^2c + 2a^2c^2}{a^3c}$; (xiii) $\frac{bc - 2ac}{a^4c^2}.(b^4 - 4ab^2c + a^2c^2)$

(xiv) $\frac{(b^2 - 2ac)(b^4 - 4ab^2c + a^2c^2)}{a^3c^3}$; (xv) $\frac{-3b}{ac + 2b^2}$;

(xvi) $\dfrac{b^4-4ab^2c+2a^2c^2}{a^2c^2}$; (xvii) $\dfrac{b(3ac-b^2)}{a^2c}$;

(xviii) $\dfrac{(2abc-b^3)\sqrt{b^2-4ac}}{ac^3}$;

(xix) $\dfrac{b(ac-b^2)(b^2-3ac)\sqrt{b^2-4ac}}{a^2c^4}$;

(xx) $\left(\dfrac{c}{a}\right)^q\left\{\left(\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^{p+1-q}+\left(\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)^{p+1-q}\right\}$.

2. $-\frac{2}{3}$. **3.** (i) p^2-q; (ii) $-p^3+3pq+q$;

(iii) $p^4-4p^2q+3q^2$; (iv) $\dfrac{-p(p^2-3q)}{q^3}$;

(v) $1-p+p^2-q-pq+q^2$; (vi) $\dfrac{p^3-3pq}{q}$;

(vii) $-p(p^2-4q)(p^2-q)/q$.

4. (*a*) (i) $\dfrac{-p^3+3pq}{q^3}$; (ii) $\dfrac{p^4-4p^2q+2q^2}{q^2}$; (iii) $\dfrac{p^4-4p^2q+2q^2}{q^4}$.

(*b*) 2.

6. $\dfrac{b}{c}$. **9.** (i) $2(p^2-2q)+2(p'^2-2q')-2pp'$. (ii) $2q+2q'-pp'$.

10. (*b*) $2p^2=9q$. **14.** (ii) $\dfrac{(p+q)^2}{pq}=\dfrac{b^2}{ac}$. **16.** $k=0$.

18. বীজদ্বয় $\dfrac{\gamma+\delta\pm\sqrt{(\gamma+\delta)^2-4\alpha\beta}}{2}$.

প্রশ্নমালা 3

1. (i) $x^2-12x+35=0$. (ii) $x^2-7x-18=0$.
(iii) $x^2+8x+15=0$. (iv) $x^2-4x-77=0$.

2. (i) $x^2-7x+12=0$; $p=3$, $q=4$. (ii) $x^2-2x-15$; $p=5$, $q=-3$. (iii) $x^2+6x+8=0$; $p=-4$, $q=-2$.
(iv) $x^2-6x+2=0$; $p=3-\sqrt{7}$, $q=3+\sqrt{7}$.
(v) x^2-5x+6; $p=3$, $q=2$. **3.** (i) $8x^2-65x+8=0$.
(ii) $16x^2-128x+255=0$. (iii) $4x^2+5x+1=0$.
(iv) $4x^2+4x+1=0$. (v) $4x^2-12x+5=0$.

4. (i) $qx^2-(p^2-2q)x+q=0$.
(ii) $x^2-2(p^2-2q)x+p^2\times(p^2-4q)=0$.
(iii) $x^2-p^2x+p^2q=0$. **5.** $x^2-50x+49=0$.

6. (i) $x^2-px+9q-2p^2=0$. (ii) $qx^2-(p+q^2)x+pq=0$.
(iii) $x^2-(m+n)px+mn(p^2-2q)+q(m^2+n^2)=0$.
(iv) $qx^2-(p^2-2q)(q+1)x+p^2+q^3-q=0$.
(v) $x^2-px+q=0$. **7.** $qx^2-2px+4=0$.

8. (i) $a^2x^2-(b^2-2ac)x+c^2=0$. (ii) $a^2x^2+a(b+2c)x+c(a+b+c)=0$. (iii) $(x+a)^2=0$. (iv) $a^2x^2+ab(1+m)x+(b^2-2ac)m+ac(1+m^2)=0$. (v) $acx^2+b(a+c)x+(c+a)^2=0$.

11. $6x^2-5x+1=0$. **12.** $x^2-x+1=0$. **13.** $x^2+x+1=0$.

14. নির্ণেয় সমীকরণ ও প্রদত্ত সমীকরণ একই।

16. $\frac{1}{\alpha^2}, \frac{1}{\beta^2}$. **19.** $x^2-6x+4=0$.

20. (i) 1. (ii) 5. (iii) 12. (iv) 3.

21. $4x^2+32x+63=0$. **22.** $cx^2-2bx+a=0$.

প্রশ্নমালা 4

1. (a) $\frac{7}{4}, -\frac{11}{8}$. **4.** $(bc'+b'c)(ab'+a'b)+(ca'-c'a)^2=0$.

5. $(ba'-b'c)(ab'-bc')=(cc'-aa')^2$. **6.** $(pq'-p'q)(p'-p)=(q-q')^2$.

7. $a=0$ বা 24. **10.** $a+b=0$ যখন $m^2+1\neq0$.

14. $m=\pm10$. **15.** $(4x+2y-3)(2x-3y+6)$.

প্রশ্নমালা 5

1. (a) ধনাত্মক ; (b) ঋণাত্মক ; (c) ধনাত্মক ; (d) ধনাত্মক ; (e) ধনাত্মক। **3.** x এর এরূপ কোন মান নাই।

5. x এর মান 3 এবং 5 এর মধ্যবর্তী। **7.** $-\frac{3}{2}<a<\frac{2}{3}$.

9. (a) $-\frac{1}{16}, x=\frac{9}{8}$. (b) $\frac{23}{12}, x=\frac{5}{6}$. (c) $\frac{7}{8}, x=\frac{13}{4}$. **11.** (a) 8, $x=3$. (b) 7, $x=\frac{1}{2}$. (c) 6, $x=\frac{1}{2}$. **12.** $\frac{25}{12}$. **15.** $\frac{1}{5}$ এর 5 এর মধ্যবর্তী।

17. চরম মান $=4$ এবং অবম মান $=-5$. **22.** চরম ও অবম মান যথাক্রমে $\frac{5}{4}$ এবং 1.

প্রশ্নমালা 6

1. 151200 ; 19958400 ; 720 ; 40320 ; 720. **2.** 30.
3. 720. **4.** 40319. **5.** 56. **6.** 840.
7. 462. **8.** (*a*) 6. (*b*) 8. (*c*) 9. (*d*) 4. (*e*) $m=8, n=2$. **9.** 11880.
10. (i) 2016 ; (ii) 3024. **11.** 720 ; 120 ; 24 ; 600 ; 96.
12. $n(n-1)(n-2)\cdots\cdots(n-m+1)$. **13.** 80640.
14. $2(n-1)(n-2)\cdots\cdots 3.2.1$. **15.** 576.
16. 4320. **17.** 1440. **18.** 12.
19. 90720. **20.** 4320. **21.** 864.
22. 34560. **23.** 126. **24.** (*a*) 2903040.
25. 399168000. **26.** 332640.
27. $\dfrac{\lfloor 16 \times \lfloor 15}{\lfloor 4}$. **28.** 6. **29.** (*a*) 210 ; (*b*) 240.
30. 240. **31.** 125.
32. 36. **33.** 154.

প্রশ্নমালা 7

1. 19600 ; 17550 ; 341149446. **2.** $(n-1)$.
4. $r=3$; $n=10$. **5.** $n=15, r=10$.
8. 455. **9.** 210, 84. **10.** 36.
11. 220. **12.** 190, 171. **13.** 120.
14. (i) $\dfrac{n(n-3)}{2}$. (ii) $n(n-1)(n-2)/6$. **15.** (i) $\frac{1}{2}.\{n(n-1) - m(m-1)+2\}$. (ii) $\frac{1}{6}\{n(n-1)(n-2)-m(m-1)(m-2)\}$.
16. 1330. **17.** 25. **18.** 387600.
19. 59850. **20.** 441. **21.** (i) 792 ; (ii) 5940.
22. (i) 196 ; (ii) 252. **23.** 344.
24. 990. **25.** 30030 ; 20020. **26.** 68.
27. 81600. **28.** 224.
30. 40320. **31.** 8436. **32.** 144000.

প্রশ্নমালা 8

1. 4 বা 5 ; 21 বা 35. **2.** 10 ; 92378. **3.** 70 ; 35.

প্রশ্নমালা 9

1. 60. **2.** 5040. **3.** 7560 ; 60.
4. $\lfloor 39/\lfloor 5.(\lfloor 4)^2(\lfloor 6)^3$. **5.** (i) 60 ; (ii) 36. **6.** 4540535999 ; 605404800 ; 9979200. **7.** 2519. **8.** 21599.
9. 1960. **10.** 27720 ; 280. **11.** 50.
12. 8400. **13.** 7 বা 8. **14.** 343. **15.** 243.
16. 16384. **17.** 6144. **18.** 12902400.
19. 729. **20.** m^n.

প্রশ্নমালা 10

1. 362880. **2.** 60. **3.** 2880. **4.** $(4n^2-6n+4)(2n-2)!$.

প্রশ্নমালা 11

1. 63. **2.** 127. **3.** 31. **4.** 279. **5.** 190.
8. 254. **9.** 352716.

প্রশ্নমালা 12

2. $n=b(c-a)/(b^2-ac)$, $r=a(c-b)/(b^2-ac)$. **3.** n^m.
4. 13305600. **5.** 4309200. **6.** 256. **7.** 10648.
8. 498015. **10.** 59.
13. 60. **14.** $\frac{1}{2}\cdot\frac{(m+n)!}{mn}$. **15.** 42. **16.** 2190.
17. 160. **18.** 150, 2510. **19.** 315. **20.** 159.
21. (i) 60 ; (ii) 3255. **22.** 76076.

প্রশ্নমালা 13

1. (a)(i) $a^6+12a^5b+60a^4b^2+160a^3b^3+240a^2b^4+192ab^5+64b^6$.
(ii) $a^6-18a^5x+135a^4x^2-540a^3x^3+1215a^2x^4-1458ax^5+729x^6$.
(iii) $a^6+6a^4+15a^2+20+\frac{15}{a^2}+\frac{6}{a^4}+\frac{1}{a^6}$.

(iv) $\frac{64}{729}x^6 - \frac{32}{27}x^4 + \frac{20}{3}x^2 - 20 + \frac{135}{4x^2} - \frac{243}{8x^4} + \frac{729}{64x^6}$.

(b) $2x^5(1+10y+5y^2)$. **2.** (i) $64a^6 - 96a^4 + 36a^2 - 2$.

(ii) -238. **3.** $-220x^2y^9$. **4.** $-120x^8y^{12}$.

5. $\frac{-120x^4}{a^4}$. **6.** -252. **7.** $84a^3b^6$.

8. $210c^{12}$. **10.** $^nC_m y^{n-m}$, যখন $m \ngtr n$.

11. $(-1)^{n-r}\frac{\lfloor 2n+1}{\lfloor n-r\,\lfloor n+r+1}$. **12.** $\frac{\lfloor 3n}{\lfloor n \lfloor 2n}\cdot\frac{1}{x^n}$.

14. $^{4n+1}C_{n+1}(-1)^{n+1}$. **15.** 252. **16.** (i) 25.

(ii) $\frac{\lfloor m+n}{\lfloor m \lfloor n}$. **17.** 4433. **18.** 150.

19. (i) (a) $70a^4b^4$. (b) $126x$, $\frac{-126}{x}$. (c) $(-1)^n\frac{\lfloor 2n}{\lfloor n \cdot \lfloor n}$. (ii) 101.

20. $\frac{a^{2n+1}}{b^{2n+1}} + {}^{2n+1}C_1\cdot\frac{a^{2n-1}}{b^{2n-1}} + {}^{2n+1}C_2\cdot\frac{a^{2n-3}}{b^{2n-3}} + \cdots$

$\cdots + {}^{2n+1}C_r\cdot\frac{a^{2n-2r+1}}{b^{2n-2r+1}} + \cdots + \frac{b^{2n+1}}{a^{2n+1}}$; সাধারণ পদ $= {}^{2n+1}C_r\cdot\frac{a^{2n-2r+1}}{b^{2n-2r+1}}$;

মধ্যপদদ্বয় $(n+1)$ তম এবং $(n+2)$ তম পদ যথাক্রমে $^{2n+1}C_n\cdot\frac{a}{b}$ এবং $^{2n+1}C_{n+1}\cdot\frac{b}{a}$. **21.** $r=1$. **22.** $r=9$. **23.** $r=n$.

25. $1 - nx + \frac{n(n+1)}{2}x^2 - \frac{n(n-1)(n+4)}{6}x^3$.

প্রশ্নমালা 14

1. (i) 3432. (ii) 489888. **2.** $3^9 . 2^5 . \lfloor 14/\lfloor 5 . \lfloor 9$.

3. (i) 7 তম। (ii) 5 তম এবং 6 তম। **4.** (i) $\frac{15}{4}$.

(ii) 56229888. (iii) $\frac{7}{144}$.

প্রশ্নমালা 15

1. $2^{20}-1$. **2.** (a) 2^{25}. **3.** 11.

6. $a=2$, $x=3$, $n=5$. **7.** $x=1$, $a=2$, $n=7$.

26. (i) 96059601. (ii) ·996.

প্রশ্নমালা 16

1. 1. **2.** $\frac{2}{3}$. **3.** $3\frac{1}{8}$. **4.** $\frac{3}{5}$. **5.** $10\frac{1}{8}$.

6. $\frac{13}{24}$. **7.** $\frac{11}{16}$. **8.** $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$. **9.** $\frac{1}{2}(4+3\sqrt{2})$.

10. $\frac{1}{11}$. **11.** (i) $\frac{1}{36}$; (ii) $1\frac{8}{55}$; (iii) $\frac{358}{1665}$; (iv) $\frac{1}{7}$.

12. $\dfrac{1+x}{(1-x)^2}$. **13.** $\dfrac{2x}{(1-2x)^2}$. **14.** $\dfrac{(1+6x)3x}{(1-3x)^2}$.

15. $\dfrac{1-x}{(1+x)^2}$. **16.** 1. **17.** $\dfrac{1}{(1-r)(1-ar)}$.

প্রশ্নমালা 17

1. (a) $1+\frac{1}{2}x-\dfrac{1}{2.4}x^2+\dfrac{1.3}{2.4.6.}x^3-\cdots$ (b) $1-\frac{1}{3}x-\dfrac{1}{3^2}x^2-\dfrac{5}{3^4}x^3-\cdots$

2. (a) $1+6x+24x^2+80x^3+240x^4+\cdots\cdots$

(b) $1+\dfrac{x}{2}+\dfrac{3x^2}{8}+\dfrac{5x^3}{16}+\dfrac{35x^4}{128}+\cdots\cdots$

(c) $1+x+2x^2+\frac{14}{3}x^3+\frac{35}{3}x^4+\cdots$ **3.** $1+x+\frac{1}{6}x^2-\frac{1}{54}x^3+\cdots$

4. $\frac{1}{27}(1+x+\frac{5}{6}x^2+\frac{35}{54}x^3+\cdots)$.

5. (a) $\frac{1}{3}a^2+\frac{2}{9}a^4x+\frac{4}{27}a^6x^2+\frac{8}{81}a^8x^3+\frac{16}{243}a^{10}x^4+\cdots\cdots$

(b) $1-\dfrac{1}{6}x^{\frac{1}{3}}+\dfrac{7}{72}x^{\frac{2}{3}}-\dfrac{91}{1296}x+\dfrac{1729}{31104}x^{\frac{4}{3}}-\cdots\cdots$

6. $1-x+\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{2}+\dfrac{3}{8}x^4-\dfrac{3}{8}x^5+\dfrac{5}{16}x^6-\cdots$

7. (a) $\dfrac{3.7.11.15.19.23.27.5^7}{4^7.\underline{|7}}$. (b) 2^r.

8. (a) $1-2x-2x^2-4x^3-\cdots$ (b) $1+\frac{1}{4}x+\frac{3}{32}x^2+\frac{5}{128}x^3+\cdots$.

9. $\dfrac{1}{2^{\frac{9}{2}}}\cdot\dfrac{77}{256}x^{10}$. **10.** $-\dfrac{(p-1)(2p-1)(3p-1)\cdots(\overline{r-1}.p-1)}{\underline{|r}}x^r$.

11. $\dfrac{1.5.9\cdots(4r-3)}{4^r\underline{|r}}x^r$. **12.** $\dfrac{7.9.11\ldots.(2r+5)}{\underline{|r}}x^r$.

13. $(-1)^{r-1}.r.\dfrac{x^{2r-2}}{a^{2r+2}}$; $\dfrac{1.4.7.10\ldots.(3r-5)}{3^{r-1}.\underline{|r-1}}x^{2^{r-1}}$.

14. $-\frac{5}{1024}a^{-\frac{35}{2}}b^{18}$.   15. $-1848x^{13}$.

16. $3\left\{1+\frac{1}{3}\cdot\frac{x^2}{a^3}+\frac{2}{9}\cdot\frac{x^4}{a^6}+\frac{14}{81}\cdot\frac{x^6}{a^9}+\cdots\right\}$; $\frac{1.4.7.\cdots(3r-2)}{3^{r-1}.\lfloor r}\cdot\frac{x^{2r}}{a^{3r}}$.

17. (a) $\frac{(n+1)(2n+1)(3n+1)\cdots(\overline{r-2}.n+1)}{n^{r-1}\lfloor r-1}\cdot\frac{x^{r-1}}{a^{\frac{1}{n}+r-1}}$.

(b) $\frac{(n+1)(2n+1)(3n+1)\cdots\{(r-1)n+1\}}{\lfloor r}x^r$.

18. $\frac{2.5.8.11....(3r-1)}{\lfloor r}\cdot\left(\frac{2x}{3}\right)^r$.   22. 4th.

প্রশ্নমালা 18

1. তৃতীয়।   2. 13 তম।   3. দ্বিতীয়।   4. চতুর্থ এবং পঞ্চম।

5. তৃতীয়।   6. (i) ষষ্ঠ।   (ii) নবম।

7. প্রথম ও তৃতীয়।

প্রশ্নমালা 19

1. 1·99776.   2. 1·0099.   3. (i) 1·952.   (ii) 9·997.

(iii) ·990.   4. 3·14138.   5. 5·01329.   6. 9·99333.

7. $1-\frac{41}{24}x$.   8. $1-\frac{989}{192}x$.

প্রশ্নমালা 20

1. -1.   2. 0.   3. 25.   4. $\frac{1}{6}(r+1)(r+2)(r+3)$.

5. (i) 121 ;   (ii) $-\frac{1}{4}\left(3+\frac{5}{3^8}\right)$.   6. 2.

7. (i) 5 ;   (ii) $(-1)^n$;   (iii) $(-1)^r\cdot\frac{1}{2}(r+1)(r+2)$.

9. (i) $\frac{1}{2}y-\frac{3}{2^2}\cdot\frac{y^2}{\lfloor 2}+\frac{15}{2^3}\cdot\frac{y^3}{\lfloor 3}-\cdots$.   10. $\sqrt[3]{4}$.   11. $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

15. $(\frac{9}{4})^{\frac{1}{3}}$.   16. $\frac{19}{8}$.   17. $4(2)^{\frac{1}{3}}-2$.   18. $\frac{2}{\sqrt{5}}$.

19. $\frac{2}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$.   20. $3\sqrt{3}$.   21. $\sqrt[4]{64}$.

31. (a) $\frac{(-1)^n}{2}(9n^2+3n+2)$. (b) 4^n-3^n. **33.** $4n$.

34. $(n+1)(n+2)$. **35.** -1. **38.** (a) $\sqrt[5]{6}$. (b) $\frac{3}{\sqrt{7}}$.

42. x^{2r} এর সহগ $=\frac{1.3.5....(2r-1)}{2^r a^{2r}\lfloor r}$; x^{2r+1} এর সহগ $=\frac{1.3.5....(2r-1)}{2^r.a^{2r+1}\lfloor r}$.

প্রশ্নমালা 21

21. (a) $e+e^{-1}-2$. (b) $\frac{1}{2}e$. (c) $e^{27}-e^8$. **23.** $3e$.

24. $4e$. **25.** $2e-\frac{7}{2}$. **26.** $2e$. **27.** $12e-5$.

28. $11e$. **29.** $\frac{7}{12}$. **30.** $2\times\left\{1+\frac{(2x)^2}{\lfloor 2}+\frac{(2x)^4}{\lfloor 4}+\cdots+\frac{(2x)^{2r}}{\lfloor 2^r}+\cdots\right\}$.

31. $\frac{e}{\lfloor r}$. **32.** $\frac{(-1)^r}{\lfloor r}\{a+ar-r(r-1)\}$.

33. (a) $(-1)^n\frac{(n-1)^2}{\lfloor n}$. (b) $\frac{(-1)^n}{\lfloor n-2}\left\{\frac{a}{n(n-1)}-\frac{b}{n-1}+c\right\}$.

(c) $\frac{-1^{n-1}}{2^n\lfloor n}(3+4n)$ যখন $x>\frac{3}{2}$; $\frac{(-1)^n}{2^n\lfloor n}(3+4n)$ যখন $x<\frac{3}{2}$.

35. (i) $1-\frac{x^2}{\lfloor 2}+\frac{x^4}{\lfloor 4}-\cdots$. (ii) $x-\frac{x^3}{\lfloor 3}+\frac{x^5}{\lfloor 5}-\cdots$

36. (i) $1-2x+\frac{(2x)^2}{\lfloor 2}-\frac{(2x)^3}{\lfloor 3}+\cdots$

(ii) $\frac{(2^2-2)x^2}{\lfloor 2}-\frac{(2^3-2)x^3}{\lfloor 3}+\frac{(2^4-2)x^4}{\lfloor 4}-\cdots$

(iii) $\frac{1}{2}\left\{\frac{(2x)^2}{\lfloor 2}+\frac{(2x)^4}{\lfloor 4}+\frac{(2x)^6}{\lfloor 6}+\cdots\right\}$. **37.** $(x^3+6x^2+7x+1)e^x$.

39. $e.\left(1+x+2\cdot\frac{x^2}{\lfloor 2}+5\cdot\frac{x^3}{\lfloor 3}+15\cdot\frac{x^4}{\lfloor 4}+\cdots\right)$.

প্রশ্নমালা 22

15. $x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3-\frac{3}{4}x^4+\frac{1}{5}x^5+\frac{1}{6}x^6+\frac{1}{7}x^7-\frac{3}{8}x^8+\cdots\cdots$;

x^{2n} এর সহগ $\frac{1}{2n}$(n অযুগ্মসংখ্যা হইলে), $\frac{-3}{2n}$ (n যুগ্মসংখ্যা হইলে)

x^{2n+1} এর সহগ $\frac{1}{2n+1}$.

18. $2\left(x-\frac{2}{3}x^3+\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{7}-\frac{2}{9}x^9+\cdots\right)$.

19. (a) $x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots$ (b) $3(x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots)$.

20. $\frac{a+b}{x}-\frac{a^2+b^2}{2x^2}+\frac{a^3+b^3}{3x^3}-\cdots$ 21. $\log_e 3-\log_e 2$.

22. $-\frac{1}{3}\log_e(1-x^3)$. 23. $\log_e \frac{4}{3}$. 24. $\log_e 3$. 25. $\frac{3}{2}\log_e 2$.

26. $(1-x)\log_e(1-x)+x$. 27. $\frac{x}{1-x}+\log_e(1-x)$.

28. $2\log_e 2$. 29. $3\log_e 2-1$. 30. 28.

ত্রিকোণমিতি

প্রশ্নমালা 1

1. (i) $n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}$. (ii) $2n\pi\pm\frac{\pi}{6}$. (iii) $n\pi+\frac{\pi}{6}$.

(iv) $n\pi-(-1)^n\frac{\pi}{3}$. (v) $2n\pi\pm\frac{3\pi}{4}$. (vi) $n\pi+\frac{2\pi}{3}$.

(vii) $n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{4}$. (viii) $2n\pi\pm\frac{5\pi}{6}$. (ix) $n\pi+\frac{3\pi}{4}$.

2. (i) $2n\pi+\frac{7\pi}{6}$. (ii) $2n\pi-\frac{\pi}{6}$. 3. $n\pi+(-1)^n\left(\frac{\pi}{2}-A\right)$.

4. $n\pi\pm\frac{\pi}{6}$. 5. (i) $n\pi\pm\frac{\pi}{4}$. (ii) $n\pi\pm\frac{\pi}{4}$. 6. $n\pi\pm\frac{\pi}{3}$.

7. $n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{4}$. 8. $n\pi+\frac{\pi}{4}$ বা $n\pi+a$, where $\cot a=\frac{1}{2}$.

9. $n\pi\pm\frac{\pi}{4}$. 10. (i) $\frac{1}{2}n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{12}$. (ii) $(2n+1)\frac{\pi}{14}$.

11. $n\pi+\frac{5\pi}{12}$ বা $n\pi+\frac{\pi}{12}$. 12. $(2n+1)\frac{\pi}{6}$ বা $(2n+1)\frac{\pi}{4}$.

13. $(2n+1)\frac{\pi}{6}$ বা $n\pi-(-1)^n\frac{\pi}{6}$. 14. $n\pi$ বা $\frac{n\pi}{4}+(-1)^n\frac{\pi}{24}$.

15. (i) $(2n+1)\frac{\pi}{2}$ বা $n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}$. (ii) $(2n+1)\frac{\pi}{5}$ বা $\frac{2n\pi}{3}$.

16. $\frac{2r\pi}{m+n}$ বা $\frac{2r+1}{m-n}\pi$. 17. $(2n+1)\frac{\pi}{4}$ বা $2n\pi\pm\frac{2\pi}{3}$.

18. $\frac{n\pi}{3}$ বা $\frac{n\pi}{2}\pm\frac{\pi}{12}$. 19. (i) $(2n+1)\frac{\pi}{5}$ বা $(2n+1)\frac{\pi}{2}$ বা $(2n+1)\pi$.

(ii) $(2n+1)\frac{\pi}{8}$ বা $(2n+1)\frac{\pi}{4}$ বা $(2n+1)\frac{\pi}{2}$.

20. $2n\pi$ বা $(4n+1)\frac{\pi}{6}$. 21. $2n\pi-\alpha$ বা $(4n-1)\frac{\pi}{2}+\alpha$.

22. $n\pi$ বা $\frac{n\pi}{3}$. 23. $m\pi$, বা $(2m+1)\frac{\pi}{2n}$ বা $\frac{m\pi}{n-1}$.

24. $(2n+1)\frac{\pi}{24}$ বা $\frac{n\pi}{4}$. 25. $n\pi+\frac{3\pi}{4}$ বা $\frac{n}{2}\pi+(-1)^n\frac{\pi}{12}$.

26. $2n\pi+\frac{5\pi}{12}$ বা $2n\pi+\frac{\pi}{12}$. 27. $2n\pi+\frac{\pi}{3}$.

28. $2n\pi+\frac{5\pi}{12}$ বা $2n\pi-\frac{\pi}{12}$. 29. $2n\pi+\frac{7\pi}{12}$ বা $2n\pi+\frac{\pi}{12}$.

30. $2n\pi+\frac{\pi}{2}$ বা $2n\pi-\frac{\pi}{2}+2\alpha$. 31. $n.360°$. 32. $\frac{n\pi}{3}+\frac{\pi}{12}$.

33. $\frac{n\pi}{3}$. 34. $n\pi\pm\frac{\pi}{6}$. 35. $\frac{n\pi}{3}$ বা $n\pi$.

36. $\frac{n\pi}{3}$, বা $n\pi$ বা $\frac{n\pi}{2}$. 37. $\frac{2n\pi}{3}$, বা $n\pi+\frac{\pi}{4}$ বা $2n\pi-\frac{\pi}{2}$.

38. $\frac{n\pi}{3}+\frac{\pi}{9}$. 39. $2m\pi$ বা $\frac{4m\pi}{n\mp1}$.

40. $2n\pi\pm\frac{\pi}{3}$. 41. $\frac{n\pi}{4}+(-1)^n\frac{\pi}{40}$. 43. $\frac{n\pi+(-1)^n\alpha}{4-2(-1)^n}$.

44. (i) $\frac{\pi}{3}$, যখন $n=0$. (ii) $\frac{\pi}{12}$, $-\frac{7\pi}{12}$, যখন $n=0$.

(iii) $\frac{5\pi}{12}$, $\frac{23\pi}{12}$, প্রথমটিতে যখন $n=0$ এবং দ্বিতীয়টিতে $n=1$.

45. $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$, প্রথমটিতে যখন $n=1, 2, 3$.

$\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$, দ্বিতীয়টিতে যখন $n=0, 1$, ঋণাত্মক মান বাদ দিয়া।

46. $\frac{\pi}{8}, \frac{5\pi}{8}$, যখন $n=0, 1$. 47. $\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{6}$, যখন $n=0, 1$.

48. $\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}$, যখন $n=0$ এবং 1.

49. $\theta=\left(n+\frac{m}{2}\right)\pi \pm \frac{\pi}{6}+(-1)^m\frac{\pi}{12}$, $\phi=\left(\frac{m}{2}-n\right)\pi \mp \frac{\pi}{6}+(-1)^m\frac{\pi}{12}$.

50. $x=y=\frac{\pi}{4}$.

প্রশ্নমালা 2

1. (i) $\frac{\pi}{3}$, $n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{3}$. (ii) $-\frac{\pi}{6}$, $n\pi-(-1)^n\frac{\pi}{6}$.

(iii) 0, $2n\pi$. (iv) $\frac{3\pi}{4}$, $2n\pi \pm \frac{3\pi}{4}$.

(v) $\frac{\pi}{3}$, $n\pi+\frac{\pi}{3}$. (vi) $\frac{2\pi}{3}$, $n\pi+\frac{2\pi}{3}$.

2. (i) $\sin^{-1}\sqrt{1-x^2}$, $\tan^{-1}\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, $\cot^{-1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$, $\sec^{-1}\frac{1}{x}$,

$\operatorname{cosec}^{-1}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

(ii) $\sin^{-1}\frac{1}{x}$, $\cos^{-1}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$, $\tan^{-1}\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$, $\cot^{-1}\sqrt{x^2-1}$,

$\sec^{-1}\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}$.

(iii) $\sin^{-1}\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, $\cos^{-1}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$, $\cot^{-1}\frac{1}{x}$,

$\operatorname{cosec}^{-1}\frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$, $\sec^{-1}\sqrt{x^2+1}$.

3. (i) $\frac{\pi}{2}$. (ii) 0.

40. (i) $\frac{1}{\sqrt{2}}$. (ii) 1. 41. 13.

42. $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. 43. $-\frac{3}{2}$, 3. 44. $\frac{a+b}{1-ab}$.

45. $-\frac{461}{9}$. 46. 2. 47. $x=\frac{1}{2}$, $y=1$.

48. $\pm\sqrt{\sin 2\beta}$. 49. $\frac{ab}{\sqrt{a^2-1}+\sqrt{b^2-1}}$.

প্রশ্নমালা 3

1. $60°$ বা $120°$. **2.** $A=90°, B=30°, c=10\sqrt{3}$.
3. $\sqrt{\frac{2947}{2373}}$. **4.** $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **5.** (i) 210 বর্গ-একক।
(ii) $12\sqrt{15}$ বর্গ-একক। **41.** $A=90°, B=60°, C=30°$.

প্রশ্নমালা 4

1. $455000\sqrt{3}$ বর্গ-ফুট। **2.** 4 বা $2\sqrt{13}$ মাইল।
3. $a=6$ ফুট, $b=8$ ফুট $c=10$ ফুট। **4.** $\sqrt{\frac{3}{2}}$.

প্রশ্নমালা 5

1. 0·87006. **2.** 0·78042. **3.** 0·47520. **4.** 0·45048.
5. 1·11589. **6.** 1·21707. **7.** 9·77525. **8.** 9·47894.
9. (*a*) 10·00885 ; (*b*) 10·37889. **10.** $25°\ 13'$. **11.** 5·37130064.
12. 4·63849928, $\bar{1}$·6384893.
13. 2·37020915. **14.** ·00338134766.
15. ·7400825. **16.** 0·8862934. **17.** 1·1740732.
18. $40°\ 47'\ 36''$. **19.** $34°\ 27'\ 45''$. **20.** 8·97580486.
21. 9·78673152. **22.** $42°\ 25'\ 24''·9$. **23.** $79°\ 51'\ 47''·2$
24. $68°\ 52'\ 42''·6$. **27.** 10·0940753. **28.** 10·27279.
29. ·6642. **30.** $44°\ 27'\ 2''·4$.

প্রশ্নমালা 6

1. 9·6733937. **2.** $48°11'23''$, $58°24'43''$, $73°23'54''$ (প্রায়)।
3. $104°\ 28'\ 39''$ (প্রায়)। **4.** $52°\ 15'\ 14·86''$. **5.** $132°\ 34'\ 32''$.
6. $55°\ 46'\ 16·14''$ (প্রায়)। **7.** $78°\ 28'\ 13''$. **8.** $71°\ 42'$ (প্রায়)।
9. $48°11'22''·86$, $58°24'42''·7$, $73°23'54''·44$.
10. $104°28'39''$ (প্রায়), $46°34'17''$, $28°57'4''$.

প্রশ্নমালা 7

1. 27·0375. **2.** 7·698622. **3.** 172·6436 ফুট।
4. 14·35948 ফুট। **5.** $70°\ 53'\ 37''$, $49°\ 6'\ 23''$.
6. $78°\ 17'\ 39·6''$, $49°\ 36'\ 20''·4$. **7.** $94°\ 42'\ 54''$, $25°\ 17'\ 6''$.
8. $71°\ 44'\ 29·5''$, $48°\ 15'\ 30''·5$. **9.** $119°\ 16'\ 51''$, $5°\ 43'\ 9''$.
10. $a=1, B=120°, C=30°$.

প্রশ্নমালা 8

1. যথাক্রমে $B=75°$ বা $105°$, $C=60°$ বা $30°$, $c=\sqrt{6}$ বা $\sqrt{2}$.

2. $B=34° 27'$ (প্রায়), $C=100° 33'$ (প্রায়)।

3. $B=67° 22' 48''\cdot5$ বা, $112° 37' 11''\cdot5$; $C=75° 45'$ বা, $30° 30' 37''$; $c=21$ বা 11.
4. $B=66° 52' 11''\cdot6$ বা, $113° 7' 47''\cdot1$; $C=83° 7' 48''\cdot4$ বা $36°52'12''\cdot9$; $c=10$ ফুট (প্রায়) বা, 4 ফুট (প্রায়)।

5. 4·56706 ফুট।
9. $(\sqrt{3}+1) : 2 : \sqrt{2}$.

10. 64279 : 86603 : 98481.

প্রশ্নমালা 9

5. 1 বা 2.
10. 339·4 ফুট।

প্রশ্নমালা 10

2. $\frac{\pi}{4}$.
3. $-\cdot368$ (প্রায়)।

4. $x=38° 10'$ (প্রায়)।
6. $17°20'$ (প্রায়)।

7. লেখ অঙ্কনে x-এর মান radian-এ লইতে হইবে। লেখগুলি পরস্পরকে মূলবিন্দুতে স্পর্শ করিবে।

স্থানাঙ্ক জ্যামিতি

প্রশ্নমালা 1

1. $x^2+y^2=64.$ 2. (i) $x^2+y^2+4x-12=0.$
(ii) $x^2+y^2-8x-10y+16=0.$ (iii) $x^2+y^2+8x+10y-8=0.$
(iv) $x^2+y^2-2ax-2by+2ab=0.$ (v) $x^2+y^2-6x+8y+20=0.$

3. (i) $x^2+y^2=5$; (ii) $x^2+y^2-4x-6y-12=0$;
(iii) $x^2+y^2+4x-10y+19=0$;
(iv) $x^2+y^2+6x+4y-13=0.$ 4. (*a*) $x^2+y^2-10x=0$;
(*b*) $x^2+y^2+2gx+2fy=0.$ 5. $x^2+y^2-14y+12=0.$

6. (i) (0, 0), 4 ; (ii) (0, 0), $\sqrt{3}$;
(iii) (5, 0), 3 ; (iv) (0, − 4), 6 ;
(v) (5, 6), 7 ; (vi) (3, − 7), 5 ;
(vii) $\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$, 1 ; (viii) $\left(-\dfrac{b}{a}, -\dfrac{c}{a}\right), \dfrac{\sqrt{b^2+c^2}}{a}$.

7. (i) $x^2+y^2+5x-5y=0.$ (ii) $x^2+y^2-2x-3y=0.$
(iii) $x^2+y^2-6x-2y+5=0.$ 8. $x^2+y^2-4x-6y+11=0.$

9. 15 বর্গ-একক। 10. কেন্দ্র : (1, − 1), (3, 1),
(4, 2) ; ব্যাসার্দ্ধ : 3, 4, 5 ; $x-y=2.$ 12. $x^2+y^2-2x+4y-20=0.$

13. $x^2+y^2-4x+5y=0.$ 14. (*a*) $x^2+y^2=36$;
(*b*) $x^2+y^2=9.$ 15. $x^2+y^2-2x-2y+1=0.$

16. $n(x^2+y^2-a^2)=(m^2+n^2-a^2)y.$ 17. $x^2+y^2-2x+2y-3=0.$

18. $x^2+y^2-4x+2y=60.$

19. যদি বিন্দুগুলি A, B ও C দ্বারা যথাক্রমে সূচিত হয়, তাহা হইলে AB, BC, CA সরল রেখাত্রয়ের সমীকরণ যথাক্রমে
$x-2y+2=0, y=0, x+y=1$; $x^2+y^2=x+y.$

20. (*a*) $x^2+y^2-5x-3y=0$; (*b*) বৃত্তের বাহিরে।

21. $x^2+y^2-17x-19y+50=0$. **22.** $x^2+y^2\pm 6y-16=0$.

23. (*a*) $x^2+y^2-6x+8y+25=0$; (*b*) বৃত্তের বাহিরে।

24. (*a*) $9(x^2+y^2)+12x-6y+4=0$; (*b*) বিন্দুটি পরিধির উপর।

26. $\frac{3\sqrt{3}}{2}(g^2+f^2-c)$.

প্রশ্নমালা 2

1. $(0, 3), (3, 0)$. **2.** $(5, 2), (-2, 3)$.

3. (i) $6\sqrt{2}$; (ii) $\sqrt{2}$. **4.** 7, 13.

5. $2\sqrt{g^2-c}, 2\sqrt{f^2-c}$. **8.** $(-3, 1)$.

9. $(2, 2\sqrt{3})$. **11.** $(7, 3), (2, 8)$.

12. $(-1, -1)$. **13.** $\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}, \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}\right)$.

14. 34, 8; $(5, -8), (1, -2)$. **15.** $2(1\pm\sqrt{1+m^2})$.

16. (i) $x^2+y^2-16x-16y+64=0$. (ii) $x^2+y^2-2x-2y+1=0$.
(iii) $x^2+y^2\pm 6x-10y+25=0$.
(iv) $x^2+y^2-10x\pm 26y+25=0$. (v) $x^2+y^2-4x-2y+4=0$.

17. $5x^2+5y^2-10x+30y+49=0$. **18.** (i) $x-2y+10=0$.
(ii) $8x+3y+15=0$. **19.** $\pm x-2y=15$.

20. (i) $3x-y=0$. (ii) $x+y-1=0$.

21. (i) $4x+3y\pm 25=0$. (ii) $3x+4y\pm 25=0$.

22. $3x+4y\pm 15=0$. **23.** $4x+3y+19=0$, $4x+3y-31=0$.

24. $x-2y\pm 5=0$. **25.** $7x+2y=33$, $7x+2y+20=0$.

26. (i) $3x-4y=16$. (ii) $x+2=0$. **27.** (i) 1. (ii) 4.

29. $2x-3y+13=0$. **30.** $12y=\pm 5x+65$.

31. $x+2y=0$, $2x+y=0$. **32.** $\sqrt{3}y=x\pm 10$. **34.** $(-2, 3)$.

35. $(11, -6)$. **36.** $a^2(x^2+y^2)=1$.

37. $x^2+y^2-7(2-\sqrt{2})(x+y)+\frac{49}{2}(3-2\sqrt{2})=0$.

প্রশ্নমালা 3

1. (i) 8, (2, 0), $x+2=0$. (ii) 12, $(-3, 0)$, $x-3=0$.
(iii) 20, (0, 5), $y+5=0$. (iv) 16, $(0, -4)$, $y-4=0$.
(v) 10, $(0, -2\frac{1}{2})$, $2y-5=0$. (vi) $\frac{7}{5}$, $(\frac{7}{20}, 0)$, $20x+7=0$.
(i) উপর ; (ii) ভিতর ; (iii) ভিতর ; (iv) ভিতর ;
(v) ভিতর ; (vi) বাহির।

2. (i) $y^2=2x$; (ii) $3x^2+4y=0$.

3. (i) $y^2=16x$; (ii) $y^2=-8x$; (iii) $x^2=3y$; (iv) $x^2+20y=0$.
(i) $x+4=0$; (ii) $x=2$; (iii) $4y+3=0$; (iv) $y=5$.

4. (i) $y^2=16(x-4)$; (ii) $y^2=-16(x+4)$.

5. (i) $y^2=10x+25$; নিয়ামক : $x+5=0$;
(ii) $y^2+10x=25$; নিয়ামক : $x=5$.

6. (i) $x^2=6y+9$; নিয়ামক : $y+3=0$;
(ii) $x^2+6y=9$; নিয়ামক : $y=3$.

7. $x^2=12y$. **8.** $\frac{4}{3}$, $(\frac{1}{3}, 0)$. **9.** $x=5$, (5, 10)(5, −10).

10. (i) $y^2=16x$; নাভি : (4, 0) ; (ii) $y^2=-16x$; নাভি : (−4, 0).

11. (i) $x^2=16y$; নাভি : (0, 4) ; (ii) $x^2=-5y$; নাভি : $(0, -\frac{5}{4})$.

12. (i) 4, (4, 0), $x=2$; (ii) 8, (−3, 0), $x=1$;
(iii) 2, (−1, 0), $x+2=0$; (iv) 4, $(\frac{1}{2}, 0)$, $2x-5=0$;
(v) 1, $(0, \frac{7}{4})$, $4y-5=0$. (vi) 3, $(0, \frac{1}{2})$, $y=2$;
(vii) 4, (4, 2), $x=2$; (viii) 8, (−4, −3), $x=0$.

13. (−2, −3), $(-\frac{3}{2}, -3)$, $2x+5=0$. **14.** (*a*) (1, 2), (0, 2), 4 ;
(*b*) $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac}{4a}\right), \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{b^2-4ac-1}{4a}\right), \frac{1}{a}$.

15. $x^2-2xy+y^2+2x-6y+3=0$.

16. $4x^2+y^2+4xy+14x-18y+56=0$.

17. (i) (1, 4). **18.** $(\frac{3}{10}, 0)$. **19.** $\left\{\frac{ab}{4(a+b)}, 0\right\}$.

20. (i) $(8, 4), (2, -2)$; (ii) $(9, 3), (4, 2)$;
(iii) $(2, -3), (-4, -12)$; (iv) $(\frac{5}{27}, \frac{2}{3}), (\frac{5}{3}, -2)$.

21. $\frac{4}{3}, (\frac{1}{3}, 0)$, ছেদবিন্দুদ্বয় : $(0, 0), (3, 2)$.

22. (i) $(\frac{2}{3}, 4)$; (ii) $(\frac{5}{12}, \frac{5}{2})$; (iii) $(\frac{3}{4}, 3)$;
(iv) $(4ab, 2b)$; (v) $\left(\frac{a}{m^2} - a, \frac{2a}{m}\right)$; (vi) $(am^2, -2am)$.

23. 3. **24.** 6. **25.** (i) 12 ; (ii) 20.

26. $m = -\frac{3}{5}, c = -5$. **27.** $4y = 20x + 1$; $(\frac{1}{20}, \frac{1}{2})$.

28. $y = 3x + 2$. **29.** (i) $x + 3y + 9 = 0, 3x - y = 33$.
(ii) $x + y = 3, y = x + 9$. (iii) স্পর্শক : $4y = 4x + 9$,
$4x + 4y + 9 = 0$; অভিলম্ব : $4x - 4y = 27$; $4x + 4y = 27$.

30. $x + y = 3a, x - y = 3a$. **31.** $4\sqrt{3}y = 12x + b$; $\left(\frac{b}{12}, \frac{b}{2\sqrt{3}}\right)$.

32. $(\frac{5}{4}, -5)$. **33.** $y = 4x + 2, 3y = 2x + 36$.

34. $y + 9 = 0$. **36.** $x + y + 1 = 0$.

37. $5y^2 = 8x - 25y - 64$. **39.** $4(x - y) = 15$.

40. $y + 2x + 1 = 0, (\frac{1}{2}, -2)$; $2y = x + 8, (8, 8)$. **41.** $5y = x + 5$.

প্রশ্নমালা 4

1.

	অক্ষদ্বয়	উৎকেন্দ্রতা	নাভিলম্ব	কেন্দ্র	নাভি	নিয়ামকদ্বয়
(i)	$8, 6$;	$\sqrt{7}/4$;	$9/2$;	$(0, 0)$;	$(\pm\sqrt{7}, 0)$;	$x = \pm 16\sqrt{7}/7$;
(ii)	$20, 12$;	$4/5$;	$36/5$;	$(0, 0)$;	$(\pm 8, 0)$;	$x = \pm 25/2$;
(iii)	$10, 6$;	$4/5$;	$18/5$;	$(0, 0)$;	$(\pm 4, 0)$;	$x = \pm 25/4$;
(iv)	$2\sqrt{2}, 2$;	$1/\sqrt{2}$;	$\sqrt{2}$;	$(0, 0)$;	$(\pm 1, 0)$;	$x = \pm 2$.
(v)	$\sqrt{2}, 2/\sqrt{3}$;	$1/\sqrt{3}$;	$2\sqrt{2}/3$;	$(0, 0)$;	$(\pm 1/\sqrt{6}, 0)$;	$x = \pm\sqrt{6}/2$.
(vi)	$6, 4$;	$\sqrt{5}/3$;	$8/3$;	$(0, 0)$;	$(0 \pm \sqrt{5})$;	$y = \pm 9\sqrt{5}/5$.
(vii)	$4\sqrt{6}/3, 4$;	$1/\sqrt{3}$;	$8/3$;	$(0, 0)$;	$(0, \pm 2/\sqrt{3})$;	$y = \pm 2\sqrt{2}$;
(viii)	$8, 4\sqrt{3}$;	$1/2$;	6 ;	$(4, 0)$;	$(6, 0), (2, 0)$;	$x = 12, x + 4 = 0$;
(ix)	$2\sqrt{3}, 2\sqrt{2}$;	$1/\sqrt{3}$;	$4/\sqrt{3}$;	$(1, 0)$;	$(2, 0), (0, 0)$;	$x = 4, x + 2 = 0$;
(x)	$20, 12$;	$4/5$;	$36/5$;	$(4, -2)$;	$(12, -2), (-4, -2)$	$x = 33/2, 2x + 17 = 0$.

2. $\frac{14}{3}$. **3.** 10. **4.** $4x^2+9y^2=9$.

5. (i) $x^2/25+y^2/16=1$; (ii) $3x^2+5y^2=32$;
(iii) $x^2/5+y^2/4=1$; (iv) $x^2/64+y^2/28=1$.

6. $a=1/5, e=4/5$. **7.** $x^2/49+y^2/25=1$, $2\sqrt{6}/7$, $(\pm 2\sqrt{6}, 0)$.

8. $3x^2+5y^2=32$. **9.** $a=5\sqrt{2}, b=4\sqrt{2}$.

10. 30 ই., 24 ই.। **11.** 1/3. **12.** (*a*) $1/\sqrt{2}$; (*b*) $\sqrt{3}/2$.

13. (i) $x^2/25+y^2/24=1$; (ii) $4x^2/81+4y^2/45=1$;
(iii) $x^2/9+y^2/8=1$. **14.** $20x^2+4y^2=5$.

15. (i) $7x^2+2xy+7y^2+10x-10y+7=0$;
(ii) $25(x^2+y^2)+2xy-130(x+y)+169=0$.

প্রশ্নমালা 5

1. (i) (3, 1), (2, 2) ; $\sqrt{2}$; (ii) (5, 0), (0, 4) ; $\sqrt{41}$;
(iii) (1, 4), (−6, 1) ; $\sqrt{58}$.

2. (i) (−9/5, 8/5) ; (ii) (3, 16/5) ; (iii) (−12/5, 7/5).

3. $(-\sqrt{30}/10, \sqrt{30}/15)$. **4.** $m=\pm 3$, $(-1, \frac{5}{4})$, $(1, \frac{5}{4})$.

5. $a=5, b=4$. **6.** (*a*) $x=4$; (*b*) $y=4$; (*c*) $2x+3y=12$.

7. (i) স্পর্শক : $3x-y=7$, অভিলম্ব : $7x+21y=3$;
(ii) স্পর্শক : $6x+5y=17$, অভিলম্ব : $5x-6y=4$;
(iii) স্পর্শক : $5x-6y=27$, অভিলম্ব : $6x+5y=8$.

8. (i) $y=4x\pm 7$, (−12/7, 1/7), (12/7, −1/7) ;
(ii) $4y=3x+12$, (−8/3, 1), $4y=3x-12$, (8/3, −1).

9. (i) $6y=5x\pm 14$; (ii) $5y=3x\pm 16$.

10. $y=x\sqrt{3}\pm\sqrt{33}$. **11.** $2x-3y+12=0$, $14x+3y=60$.

12. $x+4y=0$. **13.** $x=y$. **14.** $x=y$. **18.** $y=3x$, $x+4y=0$.
$y+3x=0$, $4y-x=0$. **19.** [Read for the ellipse $\frac{x^2}{6}+\frac{y^2}{3}=1$] ;
প্রদত্ত শর্ত সিদ্ধ করে এরূপ একজোড়া বাস্তব অনুবন্ধী ব্যাসের অস্তিত্ব নাই।

20. $3x-2y=8$. **21.** $9x-4y=31$.

24. $\pm\frac{\pi}{4}, \pm\frac{3\pi}{4}$. **25.** $\pm\frac{\pi}{4}, \pm\frac{3\pi}{4}$.

প্রশ্নমালা 6

1. (i) $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{4y^2}{25}=1$; (ii) $x^2-4y^2=4$; (iii) $4x^2-5y^2=11$;

(iv) $x^2-8y^2=64$; (v) $\dfrac{x^2}{16}-\dfrac{y^2}{9}=1$; (vi) $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{7}=1$;

(vii) $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{4y^2}{25}=1$; (viii) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{4y^2}{9}=1$; (ix) $\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{12}=1$.

2.

উৎকেন্দ্রতা	নাভিলম্ব	নাভি	নিয়ামক
(i) $\sqrt{5}/2$	2	$(\pm 2\sqrt{5}, 0)$	$x=\pm 8/\sqrt{5}$;
(ii) $3/2$	5	$(\pm 3, 0)$	$x=\pm\frac{4}{3}$;
(iii) $6/5$	$22/5$	$(\pm 6, 0)$	$x=\pm\frac{25}{6}$.

3. (i) 16; (ii) 12; (iii) 5/4; (iv) $(1, -2)$;
(v) $(11, -2), (-9, -2)$; (vi) $5x=37, 5x+27=0$.

4. $a=4, b=2\sqrt{3}$. **5.** $A=1$; (i) $\frac{4}{5}$; (ii) $4, 4/\sqrt{5}$. (iii) $\frac{1}{5}\sqrt{30}$.

6. $20x^2-16y^2=5$. **7.** $(2, -1), (-4, 3)$; $(-1, 1)$.

8. $27x^2+55y^2-96xy-6x+8y=200$.

9. (i) $(-6, -2)$; (ii) $(54, 20)$. **10.** ± 4. **11.** $a=3, b=\sqrt{7}$.

12. (i) স্পর্শক : $x+2y=2$, অভিলম্ব : $2x-y=13$.
(ii) স্পর্শক : $x-y+4=0$, অভিলম্ব : $x+y+7=0$.

13. (a) $9y=5x\pm 12$; (b) $2y=3x\pm 7$; (c) $y=x\sqrt{3}\pm 4$.

16. $9y=32x$. **17.** $4x-3y=11$. **18.** (i) $3y=\pm 2x$; (ii) $y=\pm x$.

লগারিদ্‌মিক তালিকা

(LOGARITHMIC TABLES)

(Tables I & II দশম শ্রেণীর পাঠসূচীর অন্তর্ভুক্ত বলিয়া দশম শ্রেণীর পুস্তকে দেওয়া হইয়াছে)

TABLE III

NATURAL SINES

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		Mean Differences 1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
0°	0·00000	0·00291	0·00582	0·00873	0·01164	0·01454	0·01745	89°	29	58	87	116	145	175	204	233	262
1°	·01745	·02036	·02327	·02618	·02908	·03199	·03490	88°	29	58	87	116	145	175	204	233	262
2°	·03490	·03781	·04071	·04362	·04653	·04943	·05234	87°	29	58	87	116	145	175	204	233	262
3°	·05234	·05524	·05814	·06105	·06395	·06685	·06976	86°	29	58	87	116	145	174	203	232	261
4°	·06976	·07266	·07556	·07846	·08136	·08426	·08716	85°	29	58	87	116	145	174	203	232	261
5°	0·08716	0·09005	0·09295	0·09585	0·09874	0·10164	0·10453	84°	29	58	87	116	145	174	203	232	261
6°	·10453	·10742	·11031	·11320	·11609	·11898	·12187	83°	29	58	87	116	145	174	203	232	261
7°	·12187	·12476	·12764	·13053	·13341	·13629	·13917	82°	29	58	87	116	145	173	202	231	260
8°	·13917	·14205	·14493	·14781	·15069	·15356	·15643	81°	29	58	86	115	144	173	202	230	259
9°	·15643	·15931	·16218	·16505	·16792	·17078	·17365	80°	29	57	86	115	144	172	201	230	258
10°	0·17365	0·17651	0·17937	0·18224	0·18509	0·18795	0·19081	79°	29	57	86	115	144	172	201	229	258
11°	·19081	·19366	·19652	·19937	·20222	·20507	·20791	78°	29	57	86	114	143	171	200	228	257
12°	·20791	·21076	·21360	·21644	·21928	·22212	·22495	77°	28	57	85	114	142	170	199	227	256
13°	·22495	·22778	·23062	·23345	·23627	·23910	·24192	76°	28	57	85	113	141	170	198	226	255
14°	·24192	·24474	·24756	·25038	·25320	·25601	·25882	75°	28	56	85	113	141	169	197	226	254
15°	0·25882	0·26163	0·26443	0·26724	0·27004	0·27284	0·27564	74°	28	56	84	112	140	168	196	224	252
16°	·27564	·27843	·28123	·28402	·28680	·28959	·29237	73°	28	56	84	112	140	167	195	223	251
17°	·29237	·29515	·29793	·30071	·30348	·30625	·30902	72°	28	56	83	111	139	166	194	222	250
18°	·30902	·31178	·31454	·31730	·32006	·32282	·32557	71°	28	55	83	110	138	166	193	221	248
19°	·32557	·32832	·33106	·33381	·33655	·33929	·34202	70°	27	55	82	110	137	164	192	219	247

20°	0·34202	0·34475	0·34748	0·35021	0·35293	0·35565	0·35837	69°	27	55	82	109	137	164	191	218	246
21°	·35837	·36108	·36379	·36650	·36921	·37191	·37461	68°	27	54	81	108	136	163	190	217	244
22°	·37461	·37730	·37999	·38268	·38537	·38805	·39073	67°	27	54	81	108	135	161	188	215	242
23°	·39073	·39341	·39608	·39875	·40142	·40408	·40674	66°	27	53	80	107	134	160	187	214	240
24°	·40674	·40939	·41204	·41469	·41734	·41998	·42262	65°	27	53	80	106	133	159	186	212	238
25°	0·42262	0·42525	0·42788	0·43051	0·43313	0·43575	0·43837	64°	26	52	79	105	131	157	184	210	236
26°	·43837	·44098	·44359	·44620	·44880	·45140	·45399	63°	26	52	78	104	130	156	182	208	234
27°	·45399	·45658	·45917	·46175	·46433	·46690	·46947	62°	26	52	77	103	129	155	181	206	232
28°	·46947	·47204	·47460	·47716	·47971	·48226	·48481	61°	26	51	77	102	128	154	179	204	230
29°	·48481	·48735	·48989	·49242	·49495	·49748	·50000	60°	25	51	76	101	127	152	177	202	228
30°	0·50000	0·50252	0·50503	0·50754	0·51004	0·51254	0·51504	59°	25	50	75	100	125	150	175	200	225
31°	·51504	·51753	·52002	·52250	·52498	·52745	·52992	58°	25	50	74	99	124	149	174	198	223
32°	·52992	·53238	·53484	·53730	·53975	·54220	·54464	57°	25	49	74	98	123	147	172	196	221
33°	·54464	·54708	·54951	·55194	·55436	·55678	·55919	56°	24	49	73	97	122	146	170	194	219
34°	·55919	·56160	·56401	·56641	·56880	·57119	·57358	55°	24	48	72	96	120	144	168	192	216
35°	0·57358	0·57596	0·57833	0·58070	0·58307	0·58543	0·58779	54°	24	47	71	95	119	142	166	190	213
36°	·58779	·59014	·59248	·59482	·59716	·59949	·60182	53°	23	47	70	94	117	140	164	187	211
37°	·60182	·60414	·60645	·60876	·61107	·61337	·61566	52°	23	46	70	92	116	139	162	185	208
38°	·61566	·61795	·62024	·62251	·62479	·62706	·62932	51°	23	46	68	91	114	137	159	182	205
39°	·62932	·63158	·63383	·63608	·63832	·64056	·64279	50°	22	45	67	90	112	135	157	179	202
40°	0·64279	0·64501	0·64723	0·64945	0·65166	0·65386	0·65606	49°	22	44	66	88	111	133	155	177	199
41°	·65606	·65825	·66044	·66262	·66480	·66697	·66913	48°	22	44	65	87	109	131	153	174	196
42°	·66913	·67129	·67344	·67559	·67773	·67987	·68200	47°	21	43	64	86	107	129	150	172	193
43°	·68200	·68412	·68624	·68835	·69046	·69256	·69466	46°	21	42	63	84	106	127	148	169	190
44°	·69466	·69675	·69883	·70091	·70298	·70505	·70711	45°	21	42	62	83	104	124	145	166	187
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′

NATURAL COSINES

NATURAL SINES

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
									Mean Differences								
45°	0·70711	0·70916	0·71121	0·71325	0·71529	0·71732	0·71934	44°	20	41	61	82	102	122	143	163	184
46°	·71934	·72136	·72337	·72537	·72737	·72937	·73135	43°	20	40	60	80	100	120	140	160	180
47°	·73135	·73333	·73531	·73728	·73924	·74120	·74314	42°	20	39	59	78	98	118	138	157	177
48°	·74314	·74509	·74703	·74896	·75088	·75280	·75471	41°	19	39	58	77	96	116	135	154	173
49°	·75471	·75661	·75851	·76041	·76229	·76417	·76604	40°	19	38	57	76	95	113	132	151	170
50°	0·76604	0·76791	0·76977	0·77162	0·77347	0·77531	0·77715	39°	19	37	56	74	93	111	130	148	167
51°	·77715	·77897	·78079	·78261	·78442	·78622	·78801	38°	18	36	54	72	91	109	127	145	163
52°	·78801	·78980	·79158	·79335	·79512	·79688	·79864	37°	18	35	53	71	89	106	124	142	159
53°	·79864	·80038	·80212	·80386	·80558	·80730	·80902	36°	17	35	52	69	87	104	121	138	156
54°	·80902	·81072	·81242	·81412	·81580	·81748	·81915	35°	17	34	51	68	85	101	118	135	152
55°	0·81915	0·82082	0·82248	0·82413	0·82577	0·82741	0·82904	34°	16	33	49	66	82	99	115	132	148
56°	·82904	·83066	·83228	·83389	·83549	·83708	·83867	33°	16	32	48	64	80	96	112	128	144
57°	·83867	·84025	·84182	·84339	·84495	·84650	·84805	32°	16	31	47	63	78	94	110	125	141
58°	·84805	·84959	·85112	·85264	·85416	·85567	·85717	31°	15	30	46	61	76	91	106	122	137
59°	·85717	·85866	·86015	·86163	·86310	·86457	·86603	30°	15	30	44	59	74	89	103	118	133
60°	0·86603	0·86748	0·86892	0·87036	0·87178	0·87321	0·87462	29°	14	29	43	57	72	86	100	114	129
61°	·87462	·87603	·87743	·87882	·88020	·88158	·88295	28°	14	28	42	55	69	83	97	111	125
62°	·88295	·88431	·88566	·88701	·88835	·88968	·89101	27°	13	27	40	54	67	81	94	108	121
63°	·89101	·89232	·89363	·89493	·89623	·89752	·89879	26°	13	26	39	52	65	78	91	104	117
64°	·89879	·90007	·90133	·90259	·90383	·90507	·90631	25°	13	25	38	50	63	75	88	100	113

65°	0·90631	0·90753	0·90875	0·90996	0·91116	0·91236	0·91355	24°	12	24	36	48	60	72	84	96	108
66°	·91355	·91472	·91590	·91706	·91822	·91936	·92050	23°	12	23	35	46	58	70	81	93	104
67°	·92050	·92164	·92276	·92388	·92499	·92609	·92718	22°	11	22	33	45	56	67	78	89	100
68°	·92718	·92827	·92935	·93042	·93148	·93253	·93358	21°	11	21	32	43	53	64	75	85	96
69°	·93358	·93462	·93565	·93667	·93769	·93869	·93969	20°	10	20	31	41	51	61	71	81	92
70°	0·93969	0·94068	0·94167	0·94264	0·94361	0·94457	0·94552	19°	10	19	29	39	49	58	68	78	87
71°	·94552	·94646	·94740	·94832	·94924	·95015	·95106	18°	9	18	28	37	46	55	64	74	83
72°	·95106	·95195	·95284	·95372	·95459	·95545	·95630	17°	9	18	26	35	44	52	61	70	79
73°	·95630	·95715	·95799	·95882	·95964	·96046	·96126	16°	8	17	25	33	41	50	58	66	74
74°	·96126	·96206	·96285	·96363	·96440	·96517	·96593	15°	8	16	23	31	39	47	54	62	70
75°	0·96593	0·96667	0·96742	0·96815	0·96887	0·96959	0·97030	14°	7	15	22	29	36	44	51	58	65
76°	·97030	·97100	·97169	·97237	·97304	·97371	·97437	13°	7	14	20	27	34	41	47	54	61
77°	·97437	·97502	·97566	·97630	·97692	·97754	·97815	12°	6	13	19	25	32	38	44	50	57
78°	·97815	·97875	·97934	·97992	·98050	·98107	·98163	11°	6	12	17	23	29	35	41	46	52
79°	·98163	·98218	·98272	·98325	·98378	·98430	·98481	10°	5	11	16	21	27	32	37	42	48
80°	0·98481	0·98531	0·98580	0·98629	0·98676	0·98723	0·98769	9°	5	10	14	19	24	29	34	38	43
81°	·98769	·98814	·98858	·98902	·98944	·98986	·99027	8°	4	9	13	17	22	26	30	34	39
82°	·99027	·99067	·99106	·99144	·99182	·99219	·99255	7°	4	8	11	15	19	23	27	30	34
83°	·99255	·99290	·99324	·99357	·99390	·99421	·99452	6°	3	7	10	13	17	20	23	26	30
84°	·99452	·99482	·99511	·99540	·99567	·99594	·99619	5°	3	6	8	11	14	17	20	22	25
85°	0·99619	0·99644	0·99668	0·99692	0·99714	0·99736	0·99756	4°	2	5	7	9	12	14	16	18	21
86°	·99756	·99776	·99795	·99813	·99831	·99847	·99863	3°	2	4	5	7	9	11	13	14	16
87°	·99863	·99878	·99892	·99905	·99917	·99929	·99939	2°	1	3	4	5	7	8	9	10	12
88°	·99939	·99949	·99958	·99966	·99973	·99979	·99985	1°									
89°	·99985	·99989	·99993	·99996	·99998	1·00000	1·00000	0°	এক্ষেত্রে অন্তর এত ক্ষুদ্র যে তাহা উপেক্ষণীয়								
90°	1·00000								বলিয়া প্রদত্ত হইল না।								
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′

NATURAL COSINES

TABLE IV

NATURAL TANGENTS

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
									Mean Differences								
0°	0·00000	0·00291	0·00582	0·00873	0·01164	0·01455	0·01746	89°	29	58	87	116	146	175	204	233	262
1°	·01746	·02037	·02328	·02619	·02910	·03201	·03492	88°	29	58	87	116	146	175	204	233	262
2°	·03492	·03783	·04075	·04366	·04658	·04949	·05241	87°	29	58	87	116	146	175	204	233	262
3°	·05241	·05533	·05824	·06116	·06408	·06700	·06993	86°	29	58	88	117	146	175	204	234	263
4°	·06993	·07285	·07578	·07870	·08163	·08456	·08749	85°	29	58	88	117	146	175	204	234	263
5°	0·08749	0·09042	0·09335	0·09629	0·09923	0·10216	0·10510	84°	29	59	88	118	147	176	206	235	265
6°	·10510	·10805	·11099	·11394	·11688	·11983	·12278	83°	29	59	88	118	147	176	206	235	265
7°	·12278	·12574	·12869	·13165	·13461	·13758	·14054	82°	30	59	89	118	148	178	207	237	266
8°	·14054	·14351	·14648	·14945	·15243	·15540	·15838	81°	30	59	89	119	149	178	208	238	267
9°	·15838	·16137	·16435	·16734	·17033	·17333	·17633	80°	30	60	90	120	150	179	209	239	269
10°	0·17633	0·17933	0·18233	0·18534	0·18835	0·19136	0·19438	79°	30	60	90	120	151	181	211	241	271
11°	·19438	·19740	·20042	·20345	·20648	·20952	·21256	78°	30	61	91	121	152	182	212	242	273
12°	·21256	·21560	·21864	·22169	·22475	·22781	·23087	77°	31	61	92	122	153	183	214	244	275
13°	·23087	·23393	·23700	·24008	·24316	·24624	·24933	76°	31	62	92	123	154	185	216	246	277
14°	·24933	·25242	·25552	·25862	·26172	·26483	·26795	75°	31	62	93	124	155	186	217	248	279
15°	0·26795	0·27107	0·27419	0·27732	0·28046	0·28360	0·28675	74°	31	63	94	125	157	188	219	250	282
16°	·28675	·28990	·29305	·29621	·29938	·30255	·30573	73°	32	63	95	126	158	190	221	253	285
17°	·30573	·30891	·31210	·31530	·31850	·32171	·32492	72°	32	64	96	128	160	192	224	256	288
18°	·32492	·32814	·33136	·33460	·33783	·34108	·34433	71°	32	65	97	129	162	194	226	259	291
19°	·34433	·34758	·35085	·35412	·35740	·36068	·36397	70°	33	65	98	131	164	196	229	262	294

	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
20°	0·36397	0·36727	0·37057	0·37388	0·37720	0·38053	0·38386	69°	33	66	100	133	166	199	232	265	298
21°	·38386	·38721	·39055	·39391	·39727	·40065	·40403	68°	34	67	101	134	168	202	236	269	302
22°	·40403	·40741	·41081	·41421	·41763	·42105	·42447	67°	34	68	102	136	170	205	239	273	306
23°	·42447	·42791	·43136	·43481	·43828	·44175	·44523	66°	35	69	104	138	173	208	242	277	311
24°	·44523	·44872	·45222	·45573	·45924	·46277	·46631	65°	35	70	105	140	176	211	246	281	316
25°	0·46631	0·46985	0·47341	0·47698	0·48055	0·48414	0·48773	64°	36	71	107	143	179	214	250	286	321
26°	·48773	·49134	·49495	·49858	·50222	·50587	·50953	63°	36	73	109	145	182	218	254	291	327
27°	·50953	·51320	·51688	·52057	·52427	·52798	·53171	62°	37	74	111	148	185	222	259	296	333
28°	·53171	·53545	·53920	·54296	·54673	·55051	·55431	61°	38	75	113	151	189	226	264	302	339
29°	·55431	·55812	·56194	·56577	·56962	·57348	·57735	60°	38	77	115	154	192	230	269	307	346
30°	0·57735	0·58124	0·58513	0·58905	0·59297	0·59691	0·60086	59°	39	78	118	157	196	235	274	313	353
31°	·60086	·60483	·60881	·61280	·61681	·62083	·62487	58°	40	80	120	160	200	240	280	320	360
32°	·62487	·62892	·63299	·63707	·64117	·64528	·64941	57°	41	82	123	164	205	245	286	327	368
33°	·64941	·65355	·65771	·66189	·66608	·67028	·67451	56°	42	84	126	167	209	251	293	334	376
34°	·67451	·67875	·68301	·68728	·69157	·69588	·70021	55°	43	86	128	171	214	257	300	342	385
35°	0·70021	0·70455	0·70891	0·71329	0·71769	0·72211	0·72654	54°	44	88	132	176	220	263	307	351	395
36°	·72654	·73100	·73547	·73996	·74447	·74900	·75355	53°	45	90	135	180	225	270	315	360	405
37°	·75355	·75812	·76272	·76733	·77196	·77661	·78129	52°	46	92	139	185	231	277	324	370	416
38°	·78129	·78598	·79070	·79544	·80020	·80498	·80978	51°	48	95	143	190	238	285	333	380	428
39°	·80978	·81461	·81946	·82434	·82923	·83415	·83910	50°	49	98	147	196	245	293	342	391	440
40°	0·83910	0·84407	0·84906	0·85408	0·85912	0·86419	0·86929	49°	50	101	151	201	252	302	352	402	453
41°	·86929	·87441	·87955	·88473	·88992	·89515	·90040	48°	52	104	156	208	260	311	363	415	467
42°	·90040	·90569	·91099	·91633	·92170	·92709	·93252	47°	54	107	161	214	268	321	375	429	482
43°	·93252	·93797	·94345	·94896	·95451	·96008	·96569	46°	55	111	166	221	277	332	387	442	498
44°	·96569	·97133	·97700	·98270	·98843	·99420	1·00000	45°	57	114	172	229	286	343	400	457	515

NATURAL COTANGENTS

NATURAL TANGENTS

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		Mean Differences 1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
45°	1·00000	1·00583	1·01170	1·01761	1·02355	1·02952	1·03553	44°	59	118	178	237	296	355	414	474	533
46°	·03553	·04158	·04766	·05378	·05994	·06613	·07237	43°	61	123	184	246	307	368	430	491	553
47°	·07237	·07864	·08496	·09131	·09770	·10414	·11061	42°	64	127	191	255	319	382	446	510	573
48°	·11061	·11713	·12369	·13029	·13694	·14363	·15037	41°	66	132	199	265	332	397	463	530	596
49°	·15037	·15715	·16398	·17085	·17777	·18474	·19175	40°	69	138	207	276	345	413	482	552	620
50°	1·19175	1·19882	1·20593	1·21310	1·22031	1·22758	1·23490	39°	72	144	216	288	360	431	503	575	647
51°	·23490	·24227	·24969	·25717	·26471	·27230	·27994	38°	75	150	225	300	376	451	526	601	676
52°	·27994	·28764	·29541	·30323	·31110	·31904	·32704	37°	78	157	235	314	392	471	549	628	707
53°	·32704	·33511	·34323	·35142	·35968	·36800	·37638	36°	82	164	247	329	411	493	576	658	740
54°	·37638	·38484	·39336	·40195	·41061	·41934	·42815	35°	86	172	259	345	431	517	603	690	776
55°	1·42815	1·43703	1·44598	1·45501	1·46411	1·47330	1·48256	34°	91	181	272	363	453	544	634	725	816
56°	·48256	·49190	·50133	·51084	·52043	·53010	·53987	33°	96	191	287	382	478	573	669	764	860
57°	·53987	·54972	·55966	·56969	·57981	·59002	·60033	32°	101	201	302	403	504	604	705	806	907
58°	·60033	·61074	·62125	·63185	·64256	·65337	·66428	31°	107	213	320	426	533	639	746	852	959
59°	·66428	·67530	·68643	·69766	·70901	·72047	·73205	30°	113	226	339	451	565	677	790	903	1016
60°	1·7321	1·7437	1·7556	1·7675	1·7796	1·7917	1·8040	29°	12	24	36	48	60	72	84	96	108
61°	1·8040	1·8165	1·8291	1·8418	1·8546	1·8676	1·8807	28°	13	25	38	51	64	77	89	102	115
62°	1·8807	1·8940	1·9074	1·9210	1·9347	1·9486	1·9626	27°	14	27	41	54	68	82	95	109	122
63°	1·9626	1·9768	1·9912	2·0057	2·0204	2·0353	2·0503	26°	15	29	44	58	73	88	102	117	131
64°	2·0503	2·0655	2·0809	2·0965	2·1123	2·1283	2·1445	25°	16	31	47	63	79	94	110	126	141

65°	2·1445	2·1609	2·1775	2·1943	2·2113	2·2286	2·2460	24°	17	34	51	68	85	101	118	135	152
66°	2·2460	2·2637	2·2817	2·2998	2·3183	2·3369	2·3559	23°	18	37	55	73	92	110	128	146	165
67°	2·3559	2·3750	2·3945	2·4142	2·4342	2·4545	2·4751	22°	20	40	60	80	100	119	139	159	179
68°	2·4751	2·4960	2·5172	2·5386	2·5605	2·5826	2·6051	21°	22	43	65	87	109	130	152	174	195
69°	2·6051	2·6279	2·6511	2·6746	2·6985	2·7228	2·7475	20°	24	47	76	95	119	142	166	190	213
70°	2·7475	2·7725	2·7980	2·8239	2·8502	2·8770	2·9042	19°	26	52	78	104	131	157	183	209	235
71°	2·9042	2·9319	2·9600	2·9887	3·0178	3·0475	3·0777	18°	29	58	87	116	145	174	202	231	260
72°	3·0777	3·1084	3·1397	3·1716	3·2041	3·2371	3·2709	17°	32	64	97	129	161	193	225	258	290
73°	3·2709	3·3052	3·3402	3·3759	3·4124	3·4495	3·4874	16°	36	72	108	144	181	216	253	289	325
74°	3·4874	3·5261	3·5656	3·6059	3·6470	3·6891	3·7321	15°	41	81	122	163	204	244	285	326	366
75°	3·7321	3·7760	3·8208	3·8667	3·9136	3·9617	4·0108	14°	46	93	139	185	232	278	325	371	418
76°	4·0108	4·0611	4·1126	4·1653	4·2193	4·2747	4·3315	13°	53	107	160	214	267	320	374	427	481
77°	4·3315	4·3897	4·4494	4·5107	4·5736	4·6382	4·7046	12°	62	124	186	248	311	373	435	497	559
78°	4·7046	4·7729	4·8430	4·9152	4·9894	5·0658	5·1446	11°	73	146	220	293	366	439	512	586	659
79°	5·1446	5·2257	5·3093	5·3955	5·4845	5·5764	5·6713	10°	88	175	263	350	438	526	613	701	788
80°	5·6713	5·7694	5·8708	5·9758	6·0844	6·1970	6·3138	9°									
81°	6·3138	6·4348	6·5606	6·6912	6·8269	6·9682	7·1154	8°									
82°	7·1154	7·2687	7·4287	7·5958	7·7704	7·9530	8·1443	7°									
83°	8·1443	8·3450	8·5555	8·7769	9·0098	9·2553	9·5144	6°									
84°	9·5144	9·7882	10·0780	10·3854	10·7119	11·0594	11·4301	5°									
85°	11·4301	11·8262	12·2505	12·7062	13·1969	13·7267	14·3007	4°									
86°	14·3007	14·9244	15·6048	16·3499	17·1693	18·0750	19·0811	3°									
87°	19·0811	20·2056	21·4704	22·9038	24·5418	26·4316	28·6363	2°									
88°	28·6363	31·2416	34·3678	38·1885	42·9641	49·1039	57·2900	1°									
89°	57·2900	68·7501	85·9398	114·589	171·885	343·774	+∞	0°									
90°	+∞																
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′

(For 9°–5°:) এক্ষেত্রে অন্তর এত দ্রুত পরিবর্তনশীল যে তাহা তালিকাভুক্ত করা সম্ভবপর নহে।

(For 4°–0°:) অতি ক্ষুদ্র x' কোণের ক্ষেত্রে, $\cot x'$ বা $\tan (90° - x')$ প্রায় $3437·7 \div x$ এর প্রায় সমান।

NATURAL COTANGENTS

TABLE V

LOGARITHMIC SINES

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
0°	−∞	7·46373	7·76475	7·94084	8·06578	8·16268	8·24186	89°	এক্ষেত্রে অন্তর এত দ্রুত পরিবর্ত্তনশীল যে তাহাদিগকে তালিকাভুক্ত করা সম্ভবপর নহে। অতি ক্ষুদ্র x' কোণের log tan x' বা $\log\cot(90^\circ - x') = \log x + \bar{4}{\cdot}46373$.								
1°	8·24186	8·30879	8·36678	8·41792	8·46366	8·50504	8·54282	88°									
2°	8·54282	8·57757	8·60973	8·63968	8·66769	8·69400	8·71880	87°									
3°	8·71880	8·74226	8·76451	8·78568	8·80585	8·82513	8·84358	86°									
4°	8·84358	8·86128	8·87829	8·89464	8·91040	8·92561	8·94030	85°									
5°	8·94030	8·95450	8·96825	8·98157	8·99450	9·00704	9·01923	84°									
6°	9·01923	9·03109	9·04262	9·05386	9·06481	9·07548	9·08589	83°									
7°	9·08589	9·09606	9·10599	9·11570	9·12519	9·13447	9·14356	82°	96	192	288	384	480	576	672	768	864
8°	9·14356	9·15245	9·16116	9·16970	9·17807	9·18628	9·19433	81°	85	169	254	338	423	507	592	676	761
9°	9·19433	9·20223	9·20999	9·21761	9·22509	9·23244	9·23967	80°	76	151	227	302	378	453	529	604	680
10°	9·23967	9·24677	9·25376	9·26063	9·26739	9·27405	9·28060	79°	68	136	204	272	341	409	477	545	613
11°	·28060	·28705	·29340	·29966	·30582	·31189	·31788	78°	62	124	186	248	310	373	435	497	559
12°	·31788	·32378	·32960	·33534	·34100	·34658	·35209	77°	57	114	171	228	285	342	399	456	513
13°	·35209	·35752	·36289	·36819	·37341	·37858	·38368	76°	53	105	158	210	263	316	368	421	473
14°	·38368	·38871	·39369	·39860	·40346	·40825	·41300	75°	49	98	147	195	244	293	342	391	440
15°	9·41300	9·41768	9·42232	9·42690	9·43143	9·43591	9·44034	74°	46	91	137	182	228	273	319	364	410
16°	·44034	·44472	·44905	·45334	·45758	·46178	·46594	73°	43	85	128	171	213	256	299	341	384
17°	·46594	·47005	·47411	·47814	·48213	·48607	·48998	72°	40	80	120	160	201	241	281	321	361
18°	·48998	·49385	·49768	·50148	·50523	·50896	·51264	71°	38	76	113	151	189	227	264	302	340
19°	·51264	·51269	·51991	·52350	·52705	·53056	·53405	70°	36	71	107	143	179	214	250	285	321

	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
20°	9·53405	9·53751	9·54093	9·54433	9·54769	9·55102	9·55433	69°	34	68	101	135	169	203	237	270	304
21°	·55433	·55761	·56085	·56408	·56727	·57044	·57358	68°	32	64	96	128	161	193	225	257	289
22°	·57358	·57669	·57978	·58284	·58588	·58889	·59188	67°	31	61	92	122	153	183	214	244	275
23°	·59188	·59484	·59778	·60070	·60359	·60646	·60931	66°	29	58	87	116	146	174	204	233	262
24°	·60931	·61214	·61494	·61773	·62049	·62323	·62595	65°	28	56	83	111	139	166	195	222	250
25°	9·62595	9·62865	9·63133	9·63398	9·63662	9·63924	9·64184	64°	27	53	80	106	133	159	186	212	239
26°	·64184	·64442	·64698	·64953	·65205	·65456	·65705	63°	25	51	76	102	127	152	178	203	229
27°	·65705	·65952	·66197	·66441	·66682	·66922	·67161	62°	24	49	73	97	122	146	170	194	219
28°	·67161	·67398	·67633	·67866	·68098	·68328	·68557	61°	23	47	70	93	117	140	163	186	210
29°	·68557	·68784	·69010	·69234	·69456	·69677	·69897	60°	22	45	67	89	112	134	156	179	201
30°	9·69897	9·70115	9·70332	9·70547	9·70761	9·70973	9·71184	59°	22	43	65	86	107	129	150	172	193
31°	·71184	·71393	·71602	·71809	·72014	·72218	·72421	58°	21	41	62	82	103	124	144	165	185
32°	·72421	·72622	·72823	·73022	·73219	·73416	·73611	57°	20	40	59	79	99	119	139	159	178
33°	·73611	·73805	·73997	·74189	·74379	·74568	·74756	56°	19	38	57	76	96	115	134	153	172
34°	·74756	·74943	·75128	·75313	·75496	·75678	·75859	55°	18	37	55	74	92	110	129	147	165
35°	9·75859	9·76039	9·76218	9·76395	9·76572	9·76747	9·76922	54°	18	35	53	71	89	106	124	142	159
36°	·76922	·77095	·77268	·77439	·77609	·77778	·77946	53°	17	34	51	68	86	103	120	137	154
37°	·77946	·78113	·78280	·78445	·78609	·78772	·78934	52°	17	33	50	66	83	99	116	132	149
38°	·78934	·79095	·79256	·79415	·79573	·79731	·79887	51°	16	32	48	64	80	95	112	127	143
39°	·79887	·80043	·80197	·80351	·80504	·80656	·80807	50°	15	31	46	62	77	92	108	123	138
40°	9·80807	9·80957	9·81106	9·81254	9·81402	9·81549	9·81694	49°	15	30	44	59	74	89	104	118	133
41°	·81694	·81839	·81983	·82126	·82269	·82410	·82551	48°	14	29	43	57	72	86	100	114	129
42°	·82551	·82691	·82830	·82968	·83106	·83242	·83378	47°	14	28	41	55	69	83	97	110	124
43°	·83378	·83513	·83648	·83781	·83914	·84046	·84177	46°	13	27	40	53	67	80	93	106	120
44°	·84177	·84303	·84437	·84566	·84694	·84822	·84949	45°	13	26	38	51	64	77	90	102	115

LOGARITHMIC COSINES

LOGARITHMIC SINES

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		Mean Differences 1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
45°	9·84949	9·85074	9·85200	9·85324	9·85448	9·85571	9·85693	**44°**	12	25	37	50	62	74	87	99	112
46°	·85693	·85815	·85936	·86056	·86176	·86294	·86413	**43°**	12	24	36	48	60	72	84	96	108
47°	·86413	·86530	·86647	·86763	·86879	·86993	·87107	**42°**	12	23	35	46	58	70	81	93	104
48°	·87107	·87221	·87334	·87446	·87557	·87668	·87778	**41°**	11	22	34	45	56	67	78	89	100
49°	·87778	·87887	·87996	·88105	·88212	·88319	·88425	**40°**	11	22	32	43	54	65	76	86	97
50°	9·88425	9·88531	9·88636	9·88741	9·88844	9·88948	9·89050	**39°**	10	21	31	42	52	62	73	83	94
51°	·89050	·89152	·89254	·89354	·89455	·89554	·89653	**38°**	10	20	30	40	50	60	70	80	90
52°	·89653	·89752	·89849	·89947	·90043	·90139	·90235	**37°**	10	19	29	39	49	58	68	78	87
53°	·90235	·90330	·90424	·90518	·90611	·90704	·90796	**36°**	9	19	28	37	47	56	65	74	84
54°	·90796	·90887	·90978	·91069	·91158	·91241	·91336	**35°**	9	18	27	36	45	54	63	72	81
55°	9·91336	9·91425	9·91512	9·91599	9·91686	9·91772	9·91857	**34°**	9	17	26	35	44	52	61	70	78
56°	·91857	·91942	·92027	·92111	·92194	·92277	·92359	**33°**	8	17	25	34	42	50	59	67	76
57°	·92359	·92441	·92522	·92603	·92683	·92763	·92842	**32°**	8	16	24	32	41	49	57	65	73
58°	·92842	·92921	·92999	·93077	·93154	·93230	·93307	**31°**	8	16	23	31	39	47	55	62	70
59°	·93307	·93382	·93457	·93532	·93606	·93680	·93753	**30°**	8	15	23	30	37	45	52	60	67
60°	9·93753	9·93826	9·93898	9·93970	9·94041	9·94112	9·94182	**29°**	7	14	22	29	36	43	50	57	64
61°	·94182	·94252	·94321	·94390	·94458	·94526	·94593	**28°**	7	14	21	27	34	41	48	55	62
62°	·94593	·94660	·94727	·94793	·94858	·94923	·94988	**27°**	7	13	20	26	33	40	46	53	59
63°	·94988	·95052	·95116	·95179	·95242	·95304	·95366	**26°**	6	13	19	25	32	38	44	50	57
64°	·95366	·95427	·95488	·95549	·95609	·95668	·95728	**25°**	6	12	18	24	30	36	42	48	54

65°	9·95728	9·95786	9·95844	9·95902	9·95960	9·96017	9·96073	24°	6	12	17	23	29	35	40	46	52
66°	·96073	·96129	·96185	·96240	·96294	·96349	·96403	23°	6	11	17	22	28	33	38	44	50
67°	·96403	·96456	·96509	·96562	·96614	·96665	·96717	22°	5	10	16	21	26	31	36	42	47
68°	·96717	·96767	·96818	·96868	·96917	·96966	·97015	21°	5	10	15	20	25	29	34	40	44
69°	·97015	·97063	·97111	·97159	·97206	·97252	·97299	20°	5	9	14	19	24	28	33	38	42
70°	9·97299	9·97344	9·97390	9·97435	9·97479	9·97523	9·97567	19°	4	9	13	18	22	27	31	36	40
71°	·97567	·97610	·97653	·97696	·97738	·97779	·97821	18°	4	9	13	17	21	26	30	34	38
72°	·97821	·97861	·97902	·97942	·97982	·98021	·98060	17°	4	8	12	16	20	24	28	32	36
73°	·98060	·98098	·98136	·98174	·98211	·98248	·98284	16°	4	8	11	15	19	22	26	30	34
74°	·98284	·98320	·98356	·98391	·98426	·98460	·98494	15°	4	7	11	14	18	21	25	28	32
75°	9·98494	9·98528	9·98561	9·98594	9·98627	9·98659	9·98690	14°	3	7	10	13	17	20	23	26	30
76°	·98690	·98722	·98753	·98783	·98813	·98843	·98872	13°	3	6	9	12	15	18	21	24	27
77°	·98872	·98901	·98930	·98958	·98986	·99013	·99040	12°	3	6	8	11	14	17	20	22	25
78°	·99040	·99067	·99093	·99119	·99145	·99170	·99195	11°	3	5	8	10	13	16	18	21	23
79°	·99195	·99219	·99243	·99267	·99290	·99313	·99335	10°	2	5	7	9	12	14	16	19	21
80°	9·99335	9·99357	9·99379	9·99400	9·99421	9·99442	9·99462	9°	2	4	6	8	11	13	15	17	19
81°	·99462	·99482	·99501	·99520	·99539	·99557	·99575	8°	2	4	6	8	10	11	13	15	17
82°	·99575	·99593	·99610	·99627	·99643	·99659	·99675	7°	2	3	5	7	8	10	12	13	15
83°	·99675	·99690	·99705	·99720	·99734	·99748	·99761	6°	1	3	4	6	7	9	10	12	13
84°	·99761	·99775	·99787	·99800	·99812	·99823	·99834	5°	1	3	4	5	6	8	9	10	11
85°	9·99834	9·99845	9·99856	9·99866	9·99876	9·99885	9·99894	4°	1	2	3	4	5	6	7	8	9
86°	·99894	·99903	·99911	·99919	·99926	·99934	·99940	3°	1	2	2	3	4	5	5	6	7
87°	·99940	·99947	·99953	·99959	·99964	·99969	·99974	2°	1	1	2	2	3	3	4	4	5
88°	·99974	·99978	·99982	·99985	·99988	·99991	·99993	1°	0	1	1	1	2	2	2	2	3
89°	·99993	·99995	·99997	·99998	·99999	10·00000	10·00000	0°									
90°	10·00000																
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′

LOGARITHMIC COSINES

TABLE VI

LOGARITHMIC TANGENTS

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
									Mean Differences								
0°	$-\infty$	7·46373	7·76476	7·94086	8·06581	8·16273	8·24192	89°	এক্ষেত্রে অন্তর এত দ্রুত পরিবর্তনশীল যে তাহাদিগকে তালিকাভুক্ত করা সম্ভবপর নহে। অতি ক্ষুদ্র x' কোণের ক্ষেত্রে log sin x' বা log cos $(90° - x') = \log x + \bar{4}\ 4{\cdot}6373$.								
1°	8·24192	8·30888	8·36689	8·41807	8·46385	8·50527	8·54308	88°									
2°	8·54308	8·57788	8·61009	8·64009	8·66816	8·69453	8·71940	87°									
3°	8·71940	8·74292	8·76525	8·78649	8·80674	8·82610	8·84464	86°									
4°	8·84464	8·86243	8·87953	8·89598	8·91185	8·92716	8·94195	85°									
5°	8·94195	8·95627	8·97013	8·98358	8·99662	9·00930	9·02162	84°									
6°	9·02162	9·03361	9·04528	9·05666	9·06775	9·07858	9·08914	83°									
7°	9·08914	9·09947	9·10956	9·11943	9·12909	9·13854	9·14780	82°	98	195	293	391	488	586	684	782	879
8°	9·14780	9·15688	9·16577	9·17450	9·18306	9·19146	9·19971	81°	87	173	260	346	433	519	606	692	779
9°	9·19971	9·20782	9·21578	9·22361	9·23130	9·23887	9·24632	80°	78	155	233	310	388	466	543	621	698
10°	9·24632	9·25365	9·26086	9·26797	9·27496	9·28186	9·28865	79°	71	141	212	282	354	420	494	564	635
11°	·28865	·29535	·30195	·30846	·31489	·32122	·32747	78°	65	129	194	259	323	388	453	518	582
12°	·32747	·33365	·33974	·34576	·35170	·35757	·36336	77°	60	120	179	239	299	359	419	478	538
13°	·36336	·36909	·37476	·38035	·38589	·39136	·39677	76°	56	111	167	222	278	334	389	445	500
14°	·39677	·40212	·40742	·41266	·41784	·42297	·42805	75°	52	104	156	208	261	313	365	417	469
15°	9·42805	9·43308	9·43806	9·44299	9·44787	9·45271	9·45750	74°	49	98	147	196	245	294	343	392	442
16°	·45750	·46224	·46694	·47160	·47622	·48080	·48534	73°	46	93	139	186	232	278	325	371	418
17°	·48534	·48984	·49430	·49872	·50311	·50746	·51178	72°	44	88	132	176	220	264	308	352	396
18°	·51178	·51606	·52031	·52452	·52870	·53285	·53697	71°	42	84	126	168	210	252	294	336	378
19°	·53697	·54106	·54512	·54915	·55315	·55712	·56107	70°	40	80	121	160	201	241	281	321	362

20°	9·56107	9·56498	9·56887	9·57274	9·57658	9·58039	9·58418	69°	39	77	116	154	193	231	270	308	347
21°	·58418	·58794	·59168	·59540	·59909	·60276	·60641	68°	37	74	111	148	185	222	259	296	333
22°	·60641	·61004	·61364	·61722	·62079	·62433	·62785	67°	36	72	107	143	179	214	250	286	322
23°	·62785	·63135	·63484	·63830	·64175	·64517	·64858	66°	35	69	104	138	173	208	242	277	311
24°	·64858	·65197	·65535	·65870	·66204	·66537	·66867	65°	34	67	101	134	168	201	235	268	302
25°	9·66867	9·67196	9·67524	9·67850	9·68174	9·68497	9·68818	64°	33	65	98	130	163	195	228	260	293
26°	·68818	·69138	·69457	·69774	·70089	·70404	·70717	63°	32	63	95	126	158	190	221	253	284
27°	·70717	·71028	·71339	·71648	·71955	·72262	·72567	62°	31	62	92	123	154	185	216	246	277
28°	·72567	·72872	·73175	·73476	·73777	·74077	·74375	61°	30	60	90	120	151	181	211	241	271
29°	·74375	·74673	·74969	·75264	·75558	·75852	·76144	60°	29	59	88	118	147	177	206	236	265
30°	9·76144	9·76435	9·76725	9·77015	9·77303	9·77591	9·77877	59°	29	58	87	116	144	173	202	231	260
31°	·77877	·78163	·78448	·78732	·79015	·79297	·79579	58°	28	57	85	113	142	170	198	227	255
32°	·79579	·79860	·80140	·80419	·80697	·80975	·81252	57°	28	56	84	112	139	167	195	223	251
33°	·81252	·81528	·81803	·82078	·82352	·82626	·82899	56°	28	55	83	110	137	165	192	220	247
34°	·82899	·83171	·83442	·83713	·83984	·84254	·84523	55°	27	54	81	108	136	162	190	217	244
35°	9·84523	9·84791	9·85059	9·85327	9·85594	9·85860	9·86126	54°	27	54	80	107	134	160	188	214	241
36°	·86126	·86392	·86656	·86921	·87185	·87448	·87711	53°	26	53	79	106	132	158	185	212	238
37°	·87711	·87974	·88236	·88498	·88759	·89020	·89281	52°	26	52	78	105	131	157	183	209	236
38°	·89281	·89541	·89801	·90061	·90320	·90578	·90837	51°	26	52	78	104	130	156	182	208	234
39°	·90837	·91095	·91353	·91610	·91868	·92125	·92381	50°	26	52	77	103	129	155	180	206	232
40°	9·92381	9·92638	9·92894	9·93150	9·93406	9·93661	9·93916	49°	26	51	77	102	128	154	179	205	230
41°	·93916	·94171	·94426	·94681	·94935	·95190	·95444	48°	25	51	76	102	127	153	178	204	229
42°	·95444	·95698	·95952	·96205	·96459	·96712	·96966	47°	25	51	76	101	127	152	177	203	228
43°	·96966	·97219	·97472	·97725	·97978	·98231	·98484	46°	25	51	76	101	127	152	177	202	228
44°	·98484	·98737	·98989	·99242	·99495	·99747	10·00000	45°	25	51	76	101	127	152	177	202	228
	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′

LOGARITHMIC COTANGENTS

LOGARITHMIC TANGENTS

	0′	10′	20′	30′	40′	50′	60′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
									Mean Differences								
45°	10·00000	10·00253	10·00505	10·00758	10·01011	10·01263	10·01516	44°	25	51	76	101	127	152	177	202	228
46°	·01516	·01769	·02022	·02275	·02528	·02781	·03034	43°	25	51	76	101	127	152	177	202	228
47°	·03034	·03288	·03541	·03795	·04048	·04302	·04556	42°	25	51	76	101	127	152	177	203	228
48°	·04556	·04810	·05065	·05319	·05574	·05829	·06084	41°	25	51	76	102	127	153	178	204	229
49°	·06084	·06339	·06594	·06850	·07106	·07362	·07619	40°	26	51	77	102	128	154	179	205	230
50°	10·07619	10·07875	10·08132	10·08390	10·08647	10·08905	10·09163	39°	26	52	77	103	129	155	180	206	232
51°	·09163	·09422	·09680	·09939	·10199	·10459	·10719	38°	26	52	78	104	130	156	182	208	234
52°	·10719	·10980	·11241	·11502	·11764	·12026	·12289	37°	26	52	78	105	131	157	183	209	236
53°	·12289	·12552	·12815	·13079	·13344	·13608	·13874	36°	26	53	79	106	132	158	185	212	238
54°	·13874	·14140	·14406	·14673	·14941	·15209	·15477	35°	27	54	80	107	134	160	188	214	241
55°	10·15477	10·15746	10·16016	10·16287	10·16558	10·16829	10·17101	34°	27	54	81	108	136	162	190	217	244
56°	·17101	·17374	·17648	·17922	·18197	·18472	·18748	33°	28	55	83	110	137	165	192	220	247
57°	·18748	·19025	·19303	·19581	·19860	·20140	·20421	32°	28	56	84	112	139	167	195	223	251
58°	·20421	·20703	·20985	·21268	·21552	·21837	·22123	31°	28	57	85	113	142	170	198	227	255
59°	·22123	·22409	·22697	·22985	·23275	·23565	·23856	30°	29	58	87	116	144	173	202	231	260
60°	10·23856	10·24148	10·24442	10·24736	10·25031	10·25327	10·25625	29°	29	59	88	118	147	177	206	236	265
61°	·25625	·25923	·26223	·26524	·26825	·27128	·27433	28°	30	60	90	120	151	181	211	241	271
62°	·27433	·27738	·28045	·28352	·28661	·28972	·29283	27°	31	62	92	123	154	185	216	246	277
63°	·29283	·29596	·29911	·30226	·30543	·30862	·31182	26°	32	63	95	126	158	190	221	253	284
64°	·31182	·31503	·31826	·32150	·32476	·32804	·33133	25°	33	65	98	130	163	195	228	260	293

	60′	50′	40′	30′	20′	10′	0′		1′	2′	3′	4′	5′	6′	7′	8′	9′
65°	10·33133	10·33463	10·33796	10·34130	10·34465	10·34803	10·35142	24°	34	67	101	134	168	201	235	268	302
66°	·35142	·35483	·35825	·36170	·36516	·36865	·37215	23°	35	69	104	138	173	208	242	277	311
67°	·37215	·37567	·37921	·38278	·38636	·38996	·39359	22°	36	72	107	143	179	214	251	286	322
68°	·39359	·39724	·40091	·40460	·40832	·41206	·41582	21°	37	74	111	148	185	222	259	296	333
69°	·41582	·41961	·42342	·42726	·43113	·43502	·43893	20°	39	77	116	154	193	231	270	308	347
70°	10·43893	10·44288	10·44685	10·45085	10·45488	10·45894	10·46303	19°	40	80	121	160	201	241	281	321	362
71°	·46303	·46715	·47130	·47548	·47969	·48394	·48822	18°	42	84	126	168	210	252	294	336	378
72°	·48822	·49254	·49689	·50128	·50570	·51016	·51466	17°	44	88	132	176	220	264	308	352	396
73°	·51466	·51920	·52378	·52840	·53306	·53776	·54250	16°	46	93	139	186	232	278	325	371	418
74°	·54250	·54729	·55213	·55701	·56194	·56692	·57195	15°	49	98	147	196	245	294	343	392	442
75°	10·57195	10·57703	10·58216	10·58734	10·59258	10·59788	10·60323	14°	52	104	156	208	261	313	365	417	469
76°	·60323	·60864	·61411	·61965	·62524	·63091	·63664	13°	56	111	167	222	278	334	389	445	500
77°	·63664	·64243	·64830	·65424	·66026	·66635	·67253	12°	60	120	179	239	299	359	419	478	538
78°	·67253	·67878	·68511	·69154	·69805	·70465	·71135	11°	65	129	194	259	323	388	453	518	582
79°	·71135	·71814	·72504	·73203	·73914	·74635	·75368	10°	71	141	212	282	354	420	494	564	635
80°	10·75368	10·76113	10·76870	10·77639	10·78422	10·79218	10·80029	9°	78	155	233	310	388	466	543	621	698
81°	·80029	·80854	·81694	·82550	·83423	·84312	·85220	8°	87	173	260	346	433	519	606	692	779
82°	·85220	·86146	·87091	·88057	·89044	·90053	·91086	7°	98	195	293	391	488	586	684	782	879
83°	·91086	·92142	·93225	·94334	·95472	·96639	·97838	6°									
84°	·97838	·99070	11·00338	11·01642	11·02987	11·04373	11·05805	5°									
85°	11·05805	11·07284	11·08815	11·10402	11·12047	11·13757	11·15536	4°									
86°	11·15536	11·17390	11·19326	11·21351	11·23475	11·25708	11·28060	3°									
87°	11·28060	11·30547	11·33184	11·35991	11·38991	11·42212	11·45692	2°									
88°	11·45692	11·49473	11·53615	11·58193	11·63311	11·69112	11·75808	1°									
89°	11·75808	11·83727	11·93419	12·05914	12·23524	12·53627	+∞	0°									
90°	+∞																

এক্ষেত্রে অন্তর এত দ্রুত পরিবর্ত্তনশীল যে তাহাদিগকে তালিকাভুক্ত করা সম্ভবপর নহে।

LOGARITHMIC COTANGENTS